Проблемы логики и методологии науки

УДК 160.1
DOI:
10.15372/PS20160303

Целищев В.В., А.В. Бессонов

ПОДСТАНОВОЧНАЯ КВАНТИФИКАЦИЯ В БАЗОВОЙ ЛОГИКЕ И ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ДОПУЩЕНИЯ В ФОРМАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ*

В статье рассматриваются проблемы семантики для постановочной квантификации в сопоставлении с объектной квантификацией, а также сопутствующие онтологические допущения теорий. Анализируются три затруднения с подстановочной квантификацией, а именно, аргумент о недостаточности имен, аргумент об избыточности числовых знаков, аргумент о непоименованных объектах. Показано, что семантика Гича – Лавина является вполне удовлетворительной для установления эквивалентности двух интерпретаций.

Ключевые слова: семантика, онтологические допущения, подстановочная квантификация, атомарные предложения, истина

V. Tselishchev, A. Bessonov

THE SUBSTITUTIONAL QUANTIFICATION IN BASIC LOGIC AND ONTOLOGICAL COMMITMENTS IN FORMAL MATHEMATICAL THEORIES

The article deals with problems of semantics for the substitutional quantification in contrast with objectual quantification, and related ontological commitments of theories. Three difficulties with the substitution quantification is considered, namely, the argument about the lack of names, the argument about the redundancy of numeric characters, the argument of the unnamed objects. It is

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 16-18-10359.

Публикуется в авторской редакции.

shown that the Geach- Lavine semantics is quite satisfactory for establishing the equivalence of two interpretations.

Keywords: semantics, ontological assumptions, substitutional quantification, atomic sentences, truth

Понятие подстановочной квантификации привлекло интерес в связи с проблемой онтологических допущений формализованной научной теорией, инициированной работами Куайна по регламентации языка научной теории логикой первого порядка. Включенное в куайновский единый концептуальный каркас, объединяющий понятия онтологии, экстенсиональности, квантификации и предикации, он стало играть важную роль в интерпретации теории истины в формализованных языках А. Тарского [1], особенно в модификации ее Д. Дэвидсоном [2]. В работах Уоллеса [3], Тарпа [4] и ряда других исследователей указывалось на противопоставление референтативной (в другой терминологии – объектной) и подстановочной интерпретации квантификаций, с упором на меньшие выразительные возможности последней. Смысл такой постановски вопроса сводился к тому, что формулировка истинности при подстановочной интерпретации кванторов требуют формулировки дополнительных предположений об указании терминами языка объектов. В этом отношении подстановочная квантификация объявлялась производной от более фундаментальной объектной интерпретации. Однако в своей известной статье С. Крипке опроверг утверждение о второстепенном статусе подстановочной квантификации, и на некоторое время эта интерпретация дискуссия вокруг нее ослабла. В отечественной литературе этот этап получил довольно полное освещение в работах Бессонова А.В. и Целищева В.В. [5] . Однако в последние полтора десятка лет споры о подстановочной семантике и ее роли в выявлении онтологических допущений в научной теории возобновились с новой силой, особенно в связи с надеждами на разрешение парадоксов и проблем при формализации знания, в частности, математического знания [6].

Рассмотрим более точно, что представляют собой объектная и подстановочная интерпретация кванторов.

Обычные определения для кванторов $\exists$ и $\forall$ таковы: для некоторой формулы φ с единственной свободной переменной x

$(\forall x)\ \varphi$ истинно, если и только если, каждый индивид удовлетворяет φ,

$(\exists x)\ \varphi$ истинно, если и только если, некоторый индивид удовлетворяет φ.

Это объектная интерпретация первопорядковой универсальной и экзистенциальной квантификаций, где предполагается универсум рассмотрения (область значений переменных) и приписывание значений переменным квантификации. Истинность предложений при объектной квантификации основывается на понятии выполнимости. Подстановочная интерпретация кванторов не требует этого, поскольку истинностные условия предложений там задаются напрямую:

$(\forall x)$ φ истинно, если и только если, для каждого индивида φ истинно.

$(\exists x)$ φ истинно, если и только если, для некоторого индивида φ истинно.

Для отличения двух интерпретаций принято в подстановочной квантификации использовать символ «Π» (вместо $\forall$) и «Σ» (вместо $\exists$).

Философский интерес в различении объектной и подстановочной квантификации распадается на две отдельные ветви, одна из которых связана с проблемой онтологических допущений, а вторая – с проблемой значения. В данной статье мы имеем дело только с первым направлением.

Если для каждого члена области квантификации U есть имя в языке, тогда объектная квантификация и подстановочная квантификация совпадают в своих истинностных значениях. Если не для всех индивидов имеются имена, тогда $\forall x$ φx может оказаться ложным, а Πx φx – истинным, потому что все поименованные индивиды могут удовлетворять φ, а некоторые непоименованные могут не удовлетворять φ. Те же соображения верны для экзистенциального квантора: когда только непоименованные индивиды удовлетворяют φ, $\exists x$ φ может быть истинным, а Σx φ – ложным.

Вопрос об онтологических допущениях типов квантификации четко сформулирован Куайном в его знаменитом критерии «Быть это значит быть значением связанной переменной» [7]. Поскольку символ «$\exists x$» читается как «существует такая вещь как x», экзистенциальный квантор в объектной интерпретации утверждает существование вещей, обозначенных именами, в качестве значений переменных подставляемых вместо переменной x. Квантификация выступает как инструмент указания на существующий универсум. В подстановочной интерпретации нет универсума объектов, поскольку в область квантификации входят только имена. Таким образом, подстановочная квантификация не обращается к понятию онтологии. Это обстоятельство является источником утверждений как о преимуществах, так и о недостатках этой интерпретации.

Основным недостатком ее являются отказ от онтологических обязательств и некоторые сомнения в ее корректности, а преимуществом – решение ряда логико-философских проблем, не поддающихся разрешению при объектной квантификации. У. Куайн так формулирует некоторые подобного рода проблемы:

> Подстановочная квантификация в классе подстановок сингулярных терминов, или имен, предельно близка объектной квантификации. Но ясно и то, что она не эквивалентна ей, если не предположить, что каждый объект специфицирован некоторым сингулярным термином в нашем языке, и ни один из терминов в подстановочном классе не остается без объекта. По этой причине подстановочная квантификация не дает приемлемой версии концепции существования, по крайне мере не так, как это делает объектная квантификация. Больше того, подстановочная квантификация вполне имеет смысл, будучи эксплицированной в терминах истины и подстановки, независимо от того, каков выбранный класс подстановок – даже если единственным его членом будет левая скобка. Поскольку такого рода сущности предполагают тривиальность рассмотрения, это означает просто отказ от онтологических вопросов [8].

Рассмотрим преимущества и недостатки подстановочной квантификации. М. Хэнд называет следующие проблемы, которые решаются с помощью подстановочной интерпретации кванторов. Краткий перечень проблем в философской логике действительно впечатляет:

1) Отказ от эссенциализма в кванторной модальной логике.

2) Осмысленное употребление предложений с пустыми терминами.

3) Удовлетворительная семантика для пропозициональных установок.

4) Поддержка аргументации в пользу номинализма.

5) Номиналистическая элиминация натуральных чисел из онтологии элементарной арифметики.

6) Сопоставление онтологических допущений аксиоматических теорий множеств Цермело – Френкеля и Неймана – Бернайса – Геделя [6].

Как видно, большая часть этих проблем связана с номиналистической стратегией. Для иллюстрации рассмотрим, как решаются проблемы с помощью подстановочной интерпретации кванторов. Действительно, важнейшим относительно подстановочной квантификации является вопрос, имеет ли такая интерпретация логического аппарата какое-то применение, помимо чисто логических проблем. В нашем случае, интерес представляет, в какой степени подстановочная квантификация может помочь в разрешении метафизических затруднений.

Одно из таких затруднений связано напрямую с интерпретацией логических систем, в частности, с проблемой квантификации модальных контекстов. У. Куайн выдвинул ряд возражений против модальных концепций, считая, что они противоречат эмпиристской концепции знания, которой он отдавал предпочтение при исследовании соотношения языка и мира [9]. При этом он различал степени «угрозы» эмпиристской концепции со стороны модальностей, наиболее серьезной из которых являлось признание метафизической аристотелевской концепции эссенциализма. Куайн говорит о трех степенях вовлечения в модальность, которые характеризуются взаимоотношением модального оператора и предложений язык [10]. Первая заключается в приписывании семантического предиката необходимости (или оператора возможности, который определяется через оператор необходимости) именам утверждений. Пусть имеем N – оператор необходимости, и истинное утверждение «9 > 7». Тогда

$$N \text{ «}9 > 7\text{»}$$

читается как «утверждение «9 > 7» необходимо истинно»). В этом случае модальный оператор принадлежит метаязыку, а предикация модального оператора производится в отношении замкнутого предложения.

Вторая степень вовлечения состоит в понимании модального оператора как сентенционального оператора. Присоединяя оператор к замкнутому предложению, мы получаем новое замкнутое предложение, например, из «9 > 7» и «N» мы получаем

$$N\,(9 > 7).$$

Ясно, что при этом модальный оператор является частью объектного языка, а не метаязыка, как в предыдущем случае.

Третий тип вовлечения в модальность состоит в присоединении модального оператора к открытой формуле или открытому предложению. При этом результат такого присоединения «приглашает» к квантификации: квантор связывает переменную, находящуюся в области действия модального оператора. Именно такая ситуация приводит, с точки зрения

Куайна, к неприемлемым метафизическим результатам. В традиционной терминологии речь идет о «de re» модальностях, когда необходимость относится не к предложениям («de dicto»), а к вещам.

Метафизические неприемлемые следствия третьей степени вовлечения в модальность состоят в принятии аристотелевской доктрины эссенциализма, согласно которой некоторые свойства вещи могут быть для нее существенными, а некоторые случайными. В самом деле, из «N (9 > 7)» и истинного утверждения «9 есть число планет» получаем ложное утверждение «N (число планет > 7). Далее, по правилу экзистенциального обобщения получаем «(∃x) N (x > 7)». Если вместо переменной подставляем имя объекта, то истинность результирующего выражения зависит от того, как мы специфицируем этот объект – цифрой «9» или же «число планет». В более общем виде речь идет об обладании объектом свойством в выражении «(∃x) N F x». Но такая спецификация указания именем объекта не имеет смысла, потому что при квантификации важно указание само по себе. А теперь оказывается, что обладание свойством зависит от способа указания. Некоторые способы указания делают утверждение об объекте необходимо истинным (цифра «9»), и значит, объект этот имеет приписываемое ему свойство необходимо. Другие способы («число планет») делают утверждение об объекте ложным за счет приписывания объекту случайного свойства.

В данном случае ясно, что речь идет об объектной квантификации. Но вот переинтерпретация кванторов может избавить нас от беспокойства по поводу эссенциализма. Вместо выражения «(∃x) N Fx» в случае подстановочной квантификации мы имеем «(Σx) N Fx». Его истинность не требует от нас утверждать, что существует некоторый объект, который необходимо обладает свойством F. Вместо этого утверждается, что для некоторого термина t языка «(N Fx» истинно.

В чем состоит разрешение метафизической проблемы с эссенциализмом? Если две первые степени вовлечения в модальность по Куайну имеют природу *de dicto*, то есть, приписывание модальности предложениям, то есть, лингвистическим сущностям, то третья степень имеет характер de re, то есть, приписывание модальностей объектам, что и означает эссенциализм. Использование подстановочной квантификации делает третью степень вовлечения в модальность ограниченной лингвистическими сущностями, что и выводит эссенциализм за пределы следствий квантификации модальностей.

Другая проблема метафизического порядка, которая может быть решена с помощью подстановочной интерпретации, связана с проблемой «пустых» терминов, которые в стандартной семантике ничего не указывают. Речь может идти о фикциях, вымышленных объектах, гипотетических объектах и т.д. С точки зрения дискурса, в которых термины для таких объектов встречаются, желательно придать им статус существующих. Помимо этого обстоятельства, употребление таких терминов ставит вопрос об истинностном значении предложений, в которые они входят. Теория дескрипций Рассела решает проблему истинности таких предложений, сохраняя объектную интерпретацию кванторов, а именно, через такой анализ, в результате которого они признаются ложными [11].

Опять-таки, суть затруднений состоит в применении правила экзистенциального обобщения при объектной интерпретации кванторов. Классической иллюстрацией является предложение

Пегас есть летающая лошадь,

из которого по этому правилу выводится

$(\exists x)$ (x есть летающая лошадь).

Объектная интерпретация предполагает, что переводом последнего предложения на обыденный язык, является

Существуют летающие лошади.

Даже если признать желательным истинность для определенных контекстов предложений типа «Пегас есть летающая лошадь», уже то, что оно ведет к ложному предложению «Существуют летающие лошади», заставляет объявить ложным и первое предложение, которое выглядит достаточно невинно. Как видно, в такого рода затруднениях виновата объектная интерпретация кванторов. Правда, помимо нее тут включены и другие составляющие куайновского «пакета» философских предпосылок, в частности, предположения об экстенсиональности и концепции онтологии. Принятие интенсиональной онтологии ставит вопрос о «пустых» терминах совсем в другом ракурсе. В частности, экспликация философии А. Мейнонга являет применение логики к метафизике более тонким предприятием, чем это считал Куайн [12]. Но все-таки следует признать, что расчистка «мейнонговских джунглей» [13] представляется делом более трудоемким, чем принятие подстановочной интерпретации. Действительно, если предложение «Пегас есть летающая лошадь» признать истинным, тогда экзистенциальное обобщение, только уже в подстановочной интерпретации,

$$(\Sigma x)\ (x\ \text{есть лошадь}\ \&\ x\ \text{летает})$$

также является истинным. В этом смысле подстановочная семантика, будучи онтологически нейтральной, более удобна в контекстах с пустыми терминами.

Избегание онтологических допущений при подстановочной интерпретации фиксирует Ч. Парсонс, но в несколько более слабом виде, чем это считается ее сторонниками [14]. Он полагает, что подстановочная квантификация занимает в плане онтологических допущений промежуточное положение между онтологией так называемых виртуальных классов и онтологией «реальных» классов. Такого рода различение было введено Куайном, в качестве постепенного вовлечения утверждений аксиоматической теории множеств в онтологические допущения [15]. Тизен рассматривает в этой связи предположение Парсонса о том, что подстановочная семантика для конечных множеств представляет собой стадию в генезисе концепции множества [16]. Куайн полагает, что некоторые базисные утверждения теории множеств представляют собой комбинацию объектной и подстановочной интерпретаций. Парсонс говорит о преимуществах подстановочной квантификации для общих терминов, имея в виду проблему элиминации абстрактных терминов, и в то же время отмечает трудности такой интерпретации для индивидных переменных. Действительно, при спецификации классов открытыми предложениями Fx предполагается, что в этом выражении переменная x является связанной. В самом деле, предложение $(\exists x)\ Fx$ истинно, если и только если, имеется некоторый замкнутый термин языка t, для которого Ft истинно. Трудность при такой трактовке состоит в том, что условия истинности при подстановочной квантификации сами предполагают квантификацию над выражениями. Замкнутость термина t достигается как раз такого рода «предварительной» квантификацией.

Рассмотрим эту трудность на примере аксиомы свертывания в теории множеств

$$(\exists Z)\ (\forall x)\ [(x \in Z) \equiv Fx).$$

(Здесь Z – предикатная переменная). Это утверждение истинно, если и только если, имеется его подстановочный пример, для которого выражение под квантором ($\exists$Z) становится истинным. Действительно, из тавтологии

$$(\forall X)\ (Fx \equiv Fx)$$

путем подстановки вместо Fx выражения «x есть y такой, что Fy» получаем

$$(\forall x)\ (x \text{ есть } y \text{ такой, что } Fx \equiv Fy).$$

Используя обозначение для класс-абстракции, имеем

$$(\forall x)\ [(x \in \{y\colon Fy\}) \equiv Fx].$$

Это утверждение является подстановочным примером исходной аксиомы свертывания. Подстановочная квантификация в данном случае равносильная квантификации над всеми специфицированными классами, то есть, над классами, определенными всеми открытыми предложениями Fx. Но как было указано ранее, эта спецификация уже предполагает объектную квантификацию.

Эта трудность связана с проблемой спецификации подстановочных примеров. Другими словами, коль скоро в качестве подстановочных примеров для индивидных переменных выступают имена, возникает вопрос о соотношении объектов области квантификации при объектной интерпретации и имен при подстановочной квантификации. Ясно, что нет прямого соответствия между именами и объектами. В качестве примера можно указать на то обстоятельство, что подстановочная интерпретация противоречит теореме Кантора о несчетности действительных чисел. Действительно, поскольку множество имен счетно, между двумя этими множествами нет одно-однозначного соответствия. Это значит, что спецификация множеств в подстановочной интерпретации требует дополнительных условий. Другим примером может служить ситуация с ω- противоречивыми системами, в которых для некоторой формулы Fx доказуемо в формальной системе F0, F1, F2, F3, …, и в то же самое время доказуемо выражение

$$(\exists x)\ (x \in N\ \&\ \neg\, Fx)$$

(где N – множество натуральных чисел). Это обстоятельство говорит о наличии нестандартных моделей, то есть, о появлении «лишних» объектов, которые являются с точки зрения объектной квантификации непоименованными, то есть, неспецифированными объектами. Явная онтология интерпретированной формальной системы должна проявляться в указании объектов именами, и различение онтологии с непоименованными объектами и поименованными объектами лишено смысла в подстановочной интерпретации.

Таким образом, подстановочная интерпретация встречается с некоторыми проблемами, которые Лавин Ш. суммировал в виде трех аргументов против нее [17]:

1) Аргумент о недостаточности имен;
2) Аргумент об избыточности числовых знаков;
3) Аргумент о непоименованных объектах.

Практически все эти возражения в той или иной степени присутствуют у Куайна.

Аргумент о недостаточности имен может быть сформулирован следующим образом. Любой используемый язык содержит счетное число выражений, и стало быть, счетное число выражений для указаний на объекты. Таким образом, когда область квантификации несчетна, как это имеет место в случае действительных чисел или множеств, явно будут такие числа, которые не обозначены никаким выражением. Этот факт будет проявляться в различных истинностных условиях утверждений с такими объектами для объектной и подстановочной квантификаций.

Сам Куайн по этому поводу имеет весьма противоречивые взгляды. Действительно, при обсуждении природы ω-непротиворечивости им утверждается, что применение подстановочной интерпретации возможно, если все объекты могут быть поименованы. В этом случае можно забыть об объектах и говорить только об именах. Это не значит, что разговор об объектах принципиально излишен, поскольку можно предположить существование непоименованных объектов и для ω- непротиворечивой теории: все свойства поименованных и непоименованных объектов могут совпадать, и тогда два рода объектов неотличимы. В этом случае внутри самой теории невозможно доказать различие двух типов квантификации, а значит, и определить, какой тип квантификации использует теория. Если же имеется ω-противоречивая теория, в которой выражения $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, …доказуемы, и одновременно доказуемо $\neg(\forall x)\, F(x)$, то с уверенностью можно утверждать существование непоименованных объектов; теория в этом случае допускает лишь объектную квантификацию [18].

Однако несколько позднее Куайн принимает точку зрения, согласно которой аргумент о недостаточности имен не проходит, так как

> На самом деле, нет явного противоречия между подстановочной квантификацией и несчетностью. Никакая функция f не перечисляет всех классов натуральных чисел; это показал Кантор, указывая на класс $\{n: \neg (n \in f(n)\}$ как такой класс, которые избегает нумерацией через f. Требует ли подстановочная квантификация противоположного – то есть того, чтобы некоторая функция f перечисляла все классы натуральных чисел? С первого взгляда кажется, что именно так: есть ощущение, что мы могли бы произвести лексиграфически перечисление всех класс-абстрактов. Однако функция, которые перечисляет класс-абстракты, не вполне та самая функция f; это другая функция g. Ее значениями вляются класс-абстракты, в то время как функция f, которая противоречит теореме Кантора, должна иметь в качестве значений классы. В конце концов, подстановочный характер наших кванторов и переменных не означает, что классы *являются* класс-абстрактами; подстановками для переменных являются не имена абстрактов, но сами абстакты, имеющие целью быть именами классов или симулировать их. Функция f, которая должна была бы конфликтовать с теоремой Кантора, это скорее функция такая, что f(n) есть класс, *поименованный* n-ым абстрактом g(n). Но нет никаких перспектив специфицирования такой функции в нотации системы; потому что отношение именования является пресловуто неспецифицируемым, ввиду знакомых семантических парадоксов Греллинга или Ришара [19].

Аргумент об избыточности числовых знаков направлен не столько против подтановочной квантификации, сколько против ее применения в специфической философской программе элиминации чисел в пользу цифр, или числовых знаков. Некоторые исследователи интерпретируют эту программу как своего рода номинализм, а другие считают ее более скромной программой онтологической редукции, но все-таки номиналистического толка, а именно, программой избавления от абстрактных объектов. Наиболее отчетливый вид эта программа приняла в работе Д. Готлиба [20].

Куйан полагает, что само применение подстановочной квантификации в такой программе делает цель онтологической экономии (замена абстрактных объектов – чисел конкретными объектами – цифрами) нереализуемой, поскольку в предположении требуемого для реконструкции математики бесконечного числа констант уже содержится предположение об абстрактном характере цифр, поскольку множество конкретных объектов не столько счетно, но и конечно. В самом деле, tсли нет конца натуральным числам, при подстановочной квантификации должно быть доступно бесконечное число цифр для подстановки вместо переменных. Подстановочная экспликация арифметической квантификации не приносит онтологической экономии элементарной теории чисел, потому что, либо чисел не будет достаточно, либо цифр окажется бесконечно много. Если объяснение предположения о бесконечном количестве цифр само должно быть понято в свою очередь в терминах подстановочной квантификации, мы сталкиваемся с той же трудностью, для решения которой придумана подстановочная квантификация.

Оба затруднения с подстановочной квантификацией решаются принятием семантики, в рамках которой можно вводить дополнительные константные символы. Такую семантику предлагает Лавин в виде комбинации семантики Тарского и Гича [17]. Семантика Гича переносит центр тяжести онтологических допущений с квантификации, как это имеет место у Куайна, на атомарные предложения. Существуют те объекты, о которых говорится в истинных атомарных предложениях теории. Идея Гича состоит в комбинировании подстановочной интерпретации кванторов с возможностью введения новых имен в качестве подстановок вместо переменных.[21]. Исходная теория может быть расширена введением новых константных символов, интерпретация которых состоит в приписывании им членов области квантификации опять-таки исходной теории в стиле. семантики Тарского. Другими словами, неявно указываемые кванторами объекты в референтативной интерпретации получают имена, необходимые для подстановочной интерпретации. Корректность такого семантики отстаивает Лавин, апеллируя к тому факту, что она имеет важнейшее свойство, присущее семантике Тарского, а именно, композициональность [17. с. 12].

Как видно, введение новых константных символов действительно решает две упомянутые выше проблемы с подстановочной квантификацией. Третья проблема, а именно, непоименованные объекты, представляется более серьезной, чем первые две. В самом деле, в математике есть истинные утверждения о действительных числах, которые попросту не могут быть поименованы согласно хорошо известным фактам о кардинальности чисел. Коль скоро эти утверждения истинны, они говорят о существующих объектах, которые не обнаруживаются в подстановочной семантике [22].

Лавин разрешает эту проблему, утверждая, что для неспецифицированного объекта *a* и новой константы *c* всегда существует такое расширение теории, содержащей объект *a*, в котором этому объекту приписывается имя *c*. Он полагает, что такое расширение полностью аналогично самой процедуре приписывания имен в стандартной в стиле Тарского семантике.

> Требуемая структура [с новым константным символом *c* для неспецифицированного объекта *a*] образуется добавлением упорядоченной пары $\langle c, a\rangle$ к функции интерпретации в исходной структуре. Трудно понять, как можно отрицать этот факт, не будучи вынужденным также отрицать, что при данном приписывании s переменным из области структуры, в которой находится объект *a*, специфицированный или нет, а *x* – переменная, можно сделать новое приписывание *t*, полностью согласующееся с s в том отношении, что t приписывает те же значения всем переменным, за исключением *x*, и приписывает переменной *x* значение *a*: требуемое t есть просто $(s - \{\langle x, s(x)\rangle\}) \cup \{\langle x, a\rangle\}$. Обе конструкции столь похожи, что должны выстоять обе или пасть вместе [17, с. 19-21].

В более общем плане вопрос заключается в том, насколько обоснована подстановочная семантика Гича – Тарского. Ее оправдание, согласно Лавину, состоит в том, что она во всем подобна семантика Тарского, и даже превосходит ее в некоторых отношениях. С другой стороны, неясно, в какой степени произвольное введение новых константных символов действительно разрешает проблемы, которыми чревата подстановочная квантификация при анализе уже математических теорий. Ответ на этот вопрос дает Ф. Феррейра, используя ту же стратегию, что и Лавин, а именно, опираясь не на квантификацию, а на атомарные предложения [23].

В качестве аналога атомарных предложений Ферейра рассматривает базисные математические истины вроде «7 + 5 = 12», представленные в формальной системе первого порядка с помощью понятия нумерического квантора, введенного Г. Фреге. Пусть имеется некоторое свойство F. Утвеждение, что не существует объектов со свойством F, равносильно утверждению о пустоте множества, определяемого свойством F, то есть, выражению «$\neg\, (\exists x)\, Fx$», которое можно записать в виде «$(\exists_0 x)$ Fx». Далее можно определить выражение «$(\exists_1 x)$ Fx» как сокращение для выражения

$$(\exists x)\ \{[Fx\ \&\ «(\exists_0 y)\ [Fy\ \&\ (x \neq y)]\},$$

а также выражение «$(\exists_2 x)$ Fx» как сокращение для

$$(\exists x)\ \{[Fx\ \&\ «(\exists_1 y)\ [Fy\ \&\ (x \neq y)]\},$$

и т.д., так что имеем «$(\exists_{n+1} x)$ Fx» для

$$(\exists x)\ \{[Fx\ \&\ «(\exists_n y)\ [Fy\ \&\ (x \neq y)]\}$$

Ясно, что последнее выражение соответствует математическому объекту, а именно, числу n.

Тогда математическая истина «7 + 5» в первопорядковом языке с нотацией нумерических кванторов будет иметь следующий вид:

$$\{(\exists_7 x)\ Fx\ \&\ (\exists_5 x)\ Gx\ \&\ \neg\ (\exists x)\ (Fx\&\ Gx)\} \rightarrow (\exists_{12} x)\ (Fx \vee Gx).$$

Такого рода схемы Ферейра называет проверочными точками (checking point) арифметики. Именно они являются аналогами атомарных предложений. Эти атомарные формулы должны быть истинны, если и только если, соответствующие схемы являются логически общезначимыми. Если задан референтативный язык первого порядка, дополненный нумерическими кванторами, то он может быть достроен до другого языка с подстановочной интерпретацией, где в качестве подстановочного класса выступает класс цифр n, входящих в выражения «$(\exists_n x)$ Fx». Из этого результата следуют две вещи: во-первых, арифметическая истины подчинена логической истине, и, во-вторых, природа определимости арифметики через проверочные точки зиждется в подстановочной квантификации. Это обстоятельство является чрезвычайно важным для оценки роли подстановочной квантификации в понимании природы математических утверждений.

Для этих языков можно ввести проверочные точки, отвечающие арифметическим операциям; например, для операции умножения цифры *n* на цифру *k* с произведением *r*, предлагается такая схема:

$$\{(\exists_n x\ Fx\ \&\ (\forall x)\ (\forall w)\ (\forall y)\ [\ (Fx\ \&\ Fw\ \&\ Gxy\ \&\ Gwy) \rightarrow (x = w)]\&$$
$$\&\ (\forall x)\ [Fx \rightarrow (\exists_k y)\ Gxy]\} \rightarrow (\exists_r y)\ [(\exists x)\ (Fx\ \&\ Gxy)].$$

Подставляя вместо переменных n, k, r числа, получим результат, совпадающий с интуитивно ожидаемым.

Используя трактовку подстановочной квантификации, данную С. Крипке [24], Феррейра делает заключение о соотношении референтативной и подстановочной семантики в виде следующей теоремы:

> Если S есть истинное предложение референтативного языка L_a, тогда соответствующая схема для подстановочной версии *S* состоит из форм истинного предложения подстановочного языка L_{sa}.

Фактически эта теорема устанавливает эквивалентность двух интерпретаций, но при этом нужно иметь в виду, что подстановочная интерпретация опирается на проверочные пункты арифметики, то есть, на ее атомарные истины. Кардинальный вопрос, который возникает в этом случае, формулируется следующим образом: определяются ли арифметические истины проверочными точками плюс логическая общезначимость плюс минимальный подстановочный аппарат? Если ответ на этот вопрос утвердителен, тогда подстановочной интерпретации отведено почетное место в обосновании математики в русле логицизма. Действительно, схемы для подстановочной интерпретации берутся из референтативного языка первого порядка, но в полном соответствии с проверочными точками. В этом смысле эти проверочные точки являются теми самыми атомарными фактами относительно чисел, и служат общим основанием для референтативного языка и подстановочных схем. Как следствие, язык подстановочного исчисления L_{sa} полностью созвучен с языком L_a референтативного исчисления, их семантика отлична. Это в первую очередь касается знака равенства, поскольку в подстановочной семантике он не может быть интерпретирован как отношение между объектами.

Поскольку подстановочный язык L_{sa} строится на основании референтативного языка L_a, и в подстановочной семантике используются другие кванторы, онтологические допущения для обеих интерпретаций могут показаться одинаковыми. Куайн трактует этот вопрос с помощью концепции перевода подстановочного языка в объектный, и уже в нем с помощью своего критерия определить «подлинные»онтологические допущения подстановочной теории [8].

Однако сторонники подстановочной интерпретации кванторов отвергают вообще понятие онтологического допущения, определяемого для области квантификации. Не в последнюю очередь этот отказ от концепции онтологических допущений связан с тем, что подстановочные кванторы пробегают над лингвистическими сущностями, которые при определенной трактовке представляются такими же абстрактными сущностями, как и числа. Для абстрактных сущностей Ч. Парсонс утверждает возможность квантификации над общими терминами с сохранением для этих кванторов особого статуса в утверждении существования, как это показано выше [14]. В этом смысле позиция Парсонса является компромиссной между референтативной и постановочной интерпретациями квантора как концепции существования.

Таким образом, семантика Гича – Тарского и семантика Ферейры устанавливают подстановочную интерпретацию на основе истинности атомарных предложений или же проверочных точек, которые полностью подобны. Вопрос заключается в том, как отсортировать истинные атомарные предложения или проверочные точки от ложных. Этот важнейший философский вопрос относительно подстановочной интерпретации кванторов остается открытым, и единственно, что тут советует Ферейра, это «использовать в изучении мира истинные утверждения арифметики, а не ложные!».

Однако выбор истинных арифметических утверждений в значительной степени зависит от правильного описания объектов в мире, и в этом отношении вопрос об онтологических допущениях теории опять-таки выходит на передний план. Очевидно также, что выбор этот диктуется и выразительными средствами языка, которые в свою очередь зависят от концепции кванторов.

Литература

1. *Tarski A*. Logic, Semantics and Metamathematics. – Oxford: Clarendon Press, 1956.

2. *Дэвидсон Д*. Истина и интерпретация. – М.: Праксис, 2003. – С. 108–122.

3. *Wallace J*. On the Frame of Reference // Synthese. – 1970. – Vol. 22, No. 1/2. – P. 117–150.

4. *Tharp L*. Truth, Quantification and Abstract Objects // Nous. – 1971. – Vol. 5, No. 4. – P. 363–372.

5. *Целищев В.В., Бессонов А.В*. Две интерпретации логических систем. – М.: URSS, 2010.

6. *Hand M*. Objectual and substitutional interpretations of the quantifiers // Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Logic / Ed. Jacquette D. General Editors: Gabbay D., Thaggard P., Woods J. Elsevier. – 2007. – P. 649–674.

7. *Куайн У.В.О*. О том, что есть // С точки зрения логики. – М.: Канон+, 2010. – С. 21–44.

8. *Quine W.V.O*. Existence and Quantification // Ontological Relativity and Other Essays. – N.Y.: Columbia University Press, 1969. – P. 107.

9. *Куайн У*. Слово и объект. – М.: Праксис, 2000.

10. *Quine W.V.O.* Three Grades of Modal Involvement // The Ways of Paradox and Other Essays. – N.Y.: Random House, 1956. – P. 156–174.

11. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. – Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2007.

12. *Jacquette D.* Alexius Meinong, the Shepherds of Non-Being. – N.Y.: Springer, 2015.

13. *Routley R.* Exploring Meinong's Jungles and Beyond // Journal of Philosophy. – 1983. – Vol. 80, No.3. – P. 173–179.

14. *Parsons C.* A Plea for Substitutional Quantification // Philosophy of Logic / Ed. Jacquette D. – Oxford: Blackwell, 2002. – P. 156–160.

15. *Quine W.V.O.* Set Theory and Its Logic. – Cambridge: Harvard University Press, 1969.

16. *Tieszen R.* Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge. – Dordrecht: KluwerAcademic Publishers, 1989. – P. 11.

17. *Lavine S.* Quantification and Ontology // Synthese. – 2000. – Vol. 124. – P. 14.

18. *Quine W.V.O.* Ontological Relativity // Ontological Relativity and Other Essays. – N.Y.: Columbia University Press, 1969.

19. *Quine W.V.O.* Roots of Reference. – La Salle: Open Court, 1973. – P. 113.

20. *Gottlieb D.* Ontological Economy: Substitutional Quantification and Mathematics. – N.Y.: Oxford University Press, 1980.

21. *Geach P.* Reference and Generality: An Examination of Some Medieval and Modern Theories. – N.Y.: Cornell University Press, 1980.

22. *Hugly P., Sayward C.* Quantifying over the Reals // Synthese. – 1994. – Vol. 101, No. 1. – P. 53–64.

23. *Ferreira F.* A Substitutional Framework for Arithmetical Validity // Grazer Philosophische Studien. – Brill, Rodopi. – 1999. – Vol. 56.

24. *Kripke S.* Is There a Problem about Substitutional Quantification // Truth and Meaning: Essays in Semantics / Eds. Evans G., McDowell J. – Oxford: Clarendon Press, 1976. – P. 325–419.

Информация об авторах

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Институт философии и права, Сибирское отделение РАН (ул. Николаева 8, Новосибирск, 630090, e-mail: leitval@gmail.com)

Бессонов Александр Владимирович – доктор философских наук, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Институт философии и права, Сибирское отделение РАН (ул. Николаева 8, Новосибирск, 630090, e-mail: trt@academ.org)

Information about the autor

Tselishchev V. – Novosibirsk State University, Pirogov Street 2, Novosibirsk 630090, Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch RAS (Nikolaev Street, Novosibirsk 630090, e-mail: leitval@gmail.com)

Bessonov A. – Novosibirsk State University, Pirogov Street 2, Novosibirsk 630090, Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch RAS, Nikolaev Street, Novosibirsk 630090, e-mail: trt@academ.org)

Дата поступления 30.08.2016