УДК 51:101.8
DOI:
10.15372/PS20160205

В.М. Резников

Институт философии и права СО РАН, 630090, г. Новосибирск, ул. Николаева 8,
mathphil1976@gmail.com

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТРЕБОВАНИЙ КОЛМОГОРОВА К ПРИМЕНЕНИЮ МАТЕМАТИКИ*

Современники Колмогорова – известные математики Фреше, Борель, Леви считали, что формальное описание неформально заданного Колмогоровым требования о близости вероятности к ее частотным характеристикам совпадает с заключением теоремы Бернулли. Поэтому требование Колмогорова избыточно, так как оно выводится с помощью теоремы. В статье показано, что требование Колмогорова допускает две различные формализации. В частотной интерпретации оно естественно формализуется посредством геометрической близости частот. В этом случае требование Колмогорова невыводимо из теоремы, а наоборот, его выполнимость является предусловием применения теоремы. Показана неадекватность идеи Фреше, Бореля и Леви о том, что при использовании субъективной вероятности в теореме Бернулли ее заключение будет иметь объективный характер, а это не согласуется со свойством консервативности математических утверждений.

Ключевые слова: принцип Курно, теорема Бернулли, устойчивость частот, субъективная интерпретация вероятностей, объективная интерпретация вероятностей, консервативность математики, Колмогоров, Мизес, Фреше, Борель, Леви

V.M. Reznikov

Institute of philosophy and Law SB RAS, Nikolaeva str. 8, Novosibirsk, 630090, Russia
mathphil1976@gmail.com

METHODOLOGICAL ANALYSIS OF THE EMPIRICAL INTERPRETATION OF KOLMOGOROV'S CONDITIONS ON THE USE OF MATHEMATICS

Kolmogorov's contemporaries, famous mathematicians Frechet, Borel, Levy supposed that formalization of Kolmogorov's informal condition about the nearness of a probability event to the

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-03410).

frequency characteristics is the same as for the conclusion of Bernoulli's theorem. So, Kolmogorov's condition is redundant because it is deduced by means of the theorem. I demonstrate that the informal condition has two different formal descriptions. In the frequency interpretation, the natural formalization consists in the geometrical nearness of the frequencies. In this case, Kolmogorov's condition isn't deduced from the theorem, conversely the feasibility of the condition is the precondition of using the theorem. The article shows the inadequacy of the idea of Frechet, Borel and Levy that when using the subjective probability in Bernoulli's theorem, its conclusion will be objective. I demonstrate that the idea doesn't agree with persistence property of the mathematical statements.

Keywords: Cournot's principle; Bernoulli's theorem; frequencies stability; subjectivistic interpretation of the probability theory; objectivistic interpretation of the probability theory; persistence property of mathematics Kolmogorov, Mises, Frechet, Borel, Levy

В 1933 г. в Германии вышла книга А.Н. Колмогорова [7], в которой была предложена аксиоматика теории вероятностей, со временем принятая математическим сообществом. В 1936 г. эта книга была впервые опубликована на русском языке, а в 1974 г. вышло ее второе издание, на которое мы будем ссылаться [2]. Эта небольшая по объему монография не является чисто математической, в ней также исследуется несколько вопросов, относящихся к методологии применения теории вероятностей. Во-первых, Колмогоров отмечает значимость философского анализа для исследования предпосылок, при которых реальные явления могут считаться независимыми. Он пишет: «…Одной из важнейших задач философии естественных наук, после разъяснения пресловутого вопроса о сущности самого понятия вероятности, является выяснение и уточнение тех предпосылок, при которых можно какие-либо данные действительные рассматривать как независимые» [2, с. 19]. Во-вторых, Колмогоров формулирует два утверждения, описывающие свойства вероятностей, для событий, которые изучаются в приложениях теории вероятностей. Эти требования Колмогорова таковы:

«А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий S будет повторен большое число раз n и если при этом через m обозначено число случаев, при которых событие A наступило, то отношение m/n будет мало отличаться от $P(A)$.

В. Если $P(A)$ очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий S событие A не будет иметь места» [2, с. 13].

Эти условия имеют историческую значимость, так как они связаны с разработкой аксиоматизации теории вероятностей. Однако они и прагматически значимы. Так, в условии А формулируется связь теоретических и эмпирических закономерностей, и оно в определенном смысле является критерием правильности оценки теоретической вероятности на основе частот. Условие B известно в литературе под названием принципа Курно [3]. А. Курно писал: «…Физически невозможное событие – это такое событие, математическая вероятность которого бесконечно мала» [3, с. 89]. Это условие является составной частью критериев проверки гипотез в стандартной математической статистике. Так как Колмогоровым задано несколько условий, то возникает вопрос об их совместимости.

В современной литературе вопрос о совместимости не рассматривался до появления публикаций Г. Шафера и В. Вовка, где эти требования были проанализированы. Шафер и Вовк отмечали, что современники Колмогорова – Э. Борель, П. Леви, М. Фреше и др. критиковали использование первого условия, так как, по их мнению, оно является избыточным. Они полагали, что условие A совпадает с заключением теоремы Бернулли. Если же принимается во внимание второе требование, то первое оказывается выполнимым на любой типичной выборке, т.е. использование второго требования ускоряет выполнимость первого. Так как условие A оказывается зависимым от условия B на основе теоремы Бернулли, то имеет смысл сформулировать теорему.

Теорема Бернулли. Проводится n независимых испытаний события A, и m экспериментов оказались успешными. Известно, что теоретическая вероятность появления события A в каждом эксперименте равняется $p(A)$, m/n – это частота события A, ε – это точность вычислений. Тогда при бесконечном числе экспериментов выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p(A)| < \varepsilon) = 1\,. \tag{1}$$

Шафером и Вовком было предложено несколько объяснений факту зависимости [8; 9]. Эти объяснения являются интересными, но не могут считаться в полной мере объективными. Так, одно из объяснений для использования зависимого условия опирается на следующие два аргумента. Во-первых, в своей книге Колмогоров отмечает, что в вопросе применения теории вероятностей в целом следует выводам Р. Мизеса. Во-вторых, Колмогоров мог не быть безоговорочным сторонником частотной интерпретации и обратился к ней из-за соображений политкорректности. Дело в том, что Колмогоров был лидером отечественной математики, поэтому ему удобнее было использовать частотную интерпретацию, так как А.Я. Хинчин обосновал совместимость основных ее положений с марксистской философией [5].

По нашему мнению, объективная аргументация для выбора частотной концепции должна опираться на реальные свойства этой интерпретации, достижения на ее основе и принципы применения. В этой работе мы преследуем две цели. Одна из них состоит в обосновании предположения, что аргументация Шафера и Вовка, не всегда имеющая объективистский характер, может быть дополнена строгими аргументами, являющимися вполне объективными. Так как требования Колмогорова реально используются в приложениях, то актуальной является задача получения полных и объективистских объяснений для применения зависимого требования. Другая цель заключается в обеспечении аргументации, показывающей, что в рамках последовательной частотной интерпретации условие А, определяющее близость вероятности события к частотным характеристикам, описывается геометрически и не является заключением теоремы Бернулли, а оказывается предусловием применения теоремы в частотной интерпретации.

Для обоснования выбора частотной интерпретации приведем следующие аргументы. Во-первых, для науки важны объективистские, частотные характеристики. Так, И. Хакинг отмечает: «В объективистском варианте теории вероятностей понятие «вероятность» означает некоторое свойство материального мира явлений. Какие требования предъявляются к типичной объективистской характеристике? Эта характеристика должна быть измеримой, устойчивой, прогнозируемой. В качестве таких характеристик в математической статистике и других науках, где применяются методы математической статистики, используются средние, частоты, медианы и другие статистические характеристики» [6, р. 1].

Во-вторых, частотные характеристики широко применяются в различных науках. Хакинг пишет: «Специалистам как в области статистики, так и в различных специальных областях знания, например в эпидемиологии, судебной медицине и других, хорошо известны достаточно точные границы вариабельности таких частотных характеристик, как число столкновений автомобилей в гололедицу, число суицидов в течение года и границы изменчивости других, самых различных статистических характеристик» [Там же].

В-третьих, математики, активно занимающиеся приложениями, высоко оценивают частотную теорию Мизеса. Например, В.Н. Тутубалин пишет: «Сейчас считается, что подход Мизеса описывает свойства реальных явлений, к которым приложима математическая теория вероятностей» [4, с. 14]. И продолжает: «…в то время как подход Колмогорова создает весьма удобную схему, на основе которой развивается математическая теория, формально независимая от каких-либо приложений» [Там же].

В-четвертых, в отличие от работ прикладников, высоко оценивающих теорию Мизеса, она получила жесткую критику по ряду оснований в работах чистых математиков. Критики полагали, что слабое звено теории Мизеса заключается в том, что она не обеспечивает формальное описание случайных последовательностей. Однако прикладные математики, в частности Ю.И. Алимов [1], полагают, что строгие правила для описания случайности не представляют большого интереса, так как невозможность осуществления предсказаний для исследуемого процесса является основанием считать такой процесс случайным. Приведенные рассуждения имеют объективистский характер и служат основаниями для выбора частотной интерпретации. По нашему мнению, эти же рассуждения показывают, что необходимо исследовать выводимость требования А на основе теоремы Бернулли и условия В в рамках частотной интерпретации.

Отметим, что Колмогоров не был безоговорочным сторонником концепции Мизеса, но он, бесспорно, интересовался его теорией. Так, в своей книге Колмогоров писал: «В изложении необходимых предпосылок для приложимости теории вероятностей к миру действительных событий автор в значительной мере следует выводам Мизеса» [2, с. 12]. Принимая концепцию Мизеса, Колмогоров, тем не менее, не считает, что его теория идеально подходит для практических применений, потому что у Мизеса вероятность определяется как предел сходящейся бесконечной последовательности частот, а Колмогоров настаивал на необходимости дискретной теории вероятностей в контексте приложений. Действительно, теория Мизеса, апеллирующая к бесконечным последовательностям, не вполне подходит для приложений.

Реалистичный анализ теории Мизеса в контексте практических применений был проведен в работах Ю.И. Алимова, из которых наиболее известна «Альтернатива методу математической статистики» [1]. У Алимова речь идет не о новой математике, а о специфическом взаимоотношении мира опыта с математикой. Фундаментальная задача прикладной статистики заключается в определении устойчивых частотных оценок некоторой исследуемой случайной переменной. Роль математического аппарата сводится к определению устойчивых усредненных характеристик другой случайной переменной, если известен оператор, связывающий эти величины.

В настоящей статье в соответствии с работами Р. Мизеса, Ю.И. Алимова, В.Н. Тутубалина все теоретические вероятности считаются неизвестными и определяются на основе частотных оценок. Теперь в контексте частотной интерпретации рассмотрим требования Колмогорова и теорему Бернулли.

Эмпирическая интерпретация требования А

Условие А не является полностью эмпирическим, так как в нем используется теоретическая вероятность. Его эмпирический прообраз – устойчивость частот. Условие служит основанием для оценивания теоретической вероятности на основе частот. Устойчивость означает, что частоты попадают в достаточно узкий интервал при проведении ряда экспериментов. Другими словами, устойчивость частот означает их геометрическую близость, часто наблюдаемую при реализации экспериментов. Для того чтобы оценка теоретической вероятности была обоснованной, необходимо, чтобы эмпирические частоты были устойчивыми. Таким образом, геометрическая близость частот, имеющая место при проведении повторных наблюдений, является предусловием близости теоретической вероятности к наблюдаемым частотам.

Эмпирическая интерпретация требования В

Условие В содержит ссылку на событие, имеющее ничтожную вероятность. Согласно эмпирической традиции теоретические вероятности должны быть измерены на основе частот. Определение частоты для события с низкой вероятностью предполагает проведение большого числа испытаний. По оценке Алимова, для определения частоты порядка 10^{-n} требуется реализация порядка 10^{n+1} экспериментов. Принцип Курно не вполне укладывается в частотную традицию, так как описывает поведение сингулярного события, а такого рода события не являются легитимными в теории Мизеса.

Эмпирическая интерпретация теоремы Бернулли

Теорема не является эмпирической, так как в ней априори задана теоретическая вероятность и заранее известно, что проводимые эксперименты независимые. Эмпирическая трактовка теоремы предполагает оценивание теоретической вероятности события в том случае, если наблюдаемые частоты этого события оказываются устойчивыми. Если имеет место геометрическая близость частот, то оцениваемая вероятность оказывается близкой к частотам, так как в качестве оценки вероятности подходит любая величина, принадлежащая интервалу. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\left|m / n - p(A)\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

Выполнимость второго неравенства является формальным условием для того, чтобы теорема Бернулли имела эмпирический смысл. В эмпирической традиции применение математики не начинается с чистого листа. Вначале экспериментально устанавливается существование некоторой закономерности, в данном случае второе неравенство. Далее, если известен оператор (для теоремы Бернулли это P в выражении (1)), связывающий определенную эмпирически переменную величину, обладающую этой закономерностью, с некоторой другой величиной (в данном случае это заключение теоремы), то эта другая величина вычисляется математически. Применительно к теореме Бернулли это означает, что выполнимость второго неравенства и верификация независимости наблюдений являются основанием для использования теоремы Бернулли.

Мы дали эмпирическую интерпретацию теоремы Бернулли в контексте ее применения на основе анализа структуры заключения теоремы. Теперь на основе эмпирической интерпретации условий Колмогорова и теоремы Бернулли рассмотрим основания вывода Бореля и Леви, согласно которым требование А является зависимым. Борель, Леви и Фреше полагали, что для развития теории вероятностей в наибольшей степени подходит субъективистская интерпретация теории вероятностей. Первоначальные вероятности в ней задают на основе принципа индифферентности. В случае отсутствия информации о величинах вероятностей им присваивают одинаковые вероятности. Применительно к теореме Бернулли это означает, что для вероятности успеха в этой теореме принимается значение 0,5. Французские математики полагали, что принцип Курно является мостом между миром опыта и миром математики. Для них теорема Бернулли имеет особую значимость. При подстановке в теорему произвольно назначенной вероятности получается, что вероятность ничтожного отклонения частотных характеристик от субъективной вероятности при большом числе испытаний равняется единице. Таким образом достигается объективация исходных субъективистских вероятностей.

Является ли данный способ объективации приемлемым для сторонников частотной интерпретации? В действительности в эмпирической интерпретации такого рода объективация не может быть принята по ряду причин. Во-первых, отвергается сам принцип индифферентности. Как отмечает Мизес, принцип безразличия предполагает, что ничего неизвестно об изучаемом объекте, и тогда получается, что для того чтобы познать некоторую сущность, необходимо ничего не знать о ней, т.е. путь к знанию предполагает абсолютное незнание, что является абсурдным. Во-вторых, математика применяется к эмпирически установленным характеристикам одних переменных величин для того чтобы аналитическим образом получить аналогичные характеристики других переменных, связанных с первыми. Или она применяется на основе определенных эмпирически характеристик одной переменной для получения аналитически других характеристик той же переменной, если эти характеристики сущностно связаны. Поэтому теорема Бернулли неприменима для вероятностей, которые не были определены экспериментально. В-третьих, близость вероятности и частотных характеристик в эмпирической интерпретации не является заключением теоремы Бернулли, а определяется геометрически на основе второго неравенства. В-четвертых, применение теоремы Бернулли предполагает верификацию независимости изучаемых данных, и при большом объеме данных это требует значительных временных и вычислительных ресурсов. Кроме того, как отмечают Шафер и Вовк, если объем новых данных все время увеличивается, то постоянная верификация на независимость увеличивающихся по объему данных приводит к ухудшению точности модели.

Таким образом, для последовательного сторонника частотной интерпретации условие А является следствием геометрической устойчивости частот. Это условие невыводимо на основе теоремы Бернулли, а наоборот, является предусловием применимости теоремы в рамках частотной интерпретации. Если считать Колмогорова безоговорочным сторонником частотной интерпретации, то нет особой необходимости в определении причин, по которым он использовал требование А. Однако нет достаточных оснований считать Колмогорова полным сторонником эмпирической интерпретации. Во-первых, он критиковал теорию Мизеса, так как в ней понятие случайной последовательности не было формализовано, а во-вторых, им отвергалось определение вероятности Мизеса как предела сходящейся бесконечной последовательности частот. Колмогоров считал, что для приложений нужна финитная теория вероятностей. Он создал вариант такого рода теории, но работа не была завершена, так как его исследования введенного им понятия сложности выявили большие перспективы в определении случайности на основе понятия сложности. Поэтому исследование частотной интерпретации было отложено. Колмогоров создал мощную математическую теорию случайных последовательностей на основе понятия сложности, которая успешно совершенствуется в настоящее время. По нашему мнению, Колмогоров, бесспорно, интересовался частотной интерпретацией, но не был ее адептом. Поэтому предпринятое Шафером и Вовком исследование причин, по которым было использовано требование А, совпадающее с заключением теоремы, имеет значение.

Мы сформулировали объяснения Шафера и Вовка, а так как они не в одинаковой степени убедительны, упорядочили их по степени убедительности в порядке ее возрастания следующим образом.

1. Зависимость не является существенным недостатком, поскольку в книге Колмогорова условия применения теории вероятностей представлены после его аксиоматики, следовательно, теорема Бернулли еще не была получена и поэтому вывод требования A на основе B и теоремы Бернулли не мог быть осуществлен. Очевидно, что это объяснение является формальным и не вполне серьезным.

2. Колмогоров мог просто не обратить внимания на то, что требование А оказалось зависимым. Это предположение основано на том, что Колмогоров нигде не дал каких-либо объяснений факту зависимости условия А. Предположение о том, что факт зависимости был пропущен, представляется маловероятным. Во-первых, условие А задано неформально, поэтому допускаются его различные формальные экспликации. Например, с помощью второго неравенства, являющегося следствием устойчивости частот. В этом случае требование А не зависит от теоремы Бернулли. Во-вторых, книга Колмогорова до сих пор популярна, однако в современной литературе не отмечается факт зависимости условия А. По нашему мнению, многие читатели воспринимают требования Колмогорова неформально, интуитивно. Интуитивное восприятие часто связано с геометрическими образами, а применительно к условию А это означает, что близость частот к вероятности воспринимается как группирование частот вокруг теоретической вероятности, в узкой области, и такое понимание естественно формализуется с помощью второго неравенства. В-третьих, геометрическая интуиция частично согласуется с пониманием вероятности у Мизеса как предела бесконечной сходящейся последовательности частот. Дело в том, что Мизесом не рассматривается сходи-

мость по вероятности, а используется сходимость, принятая в классическом математическом анализе, которая допускает геометрическую интерпретацию близости частот к вероятности. Колмогоров не принимал асимптотический характер определения вероятности у Мизеса, однако идея близости частот вполне подходит и для финитной теории вероятностей. В-четвертых, трудно предположить, будто многие математики не поняли, что условие А – это неформальное представление заключения теоремы Бернулли, или будто Колмогоров не смог донести до читателей, что формальным воплощением условия А является заключение теоремы.

3. Условие *A* хотя и выводимо на основе условия *B*, имеет самостоятельное значение, так как является частотным, а Колмогоров отмечал, что его требования к применению теории вероятностей близки к представлениям Мизеса, одного из основателей частотной интерпретации теории вероятностей. Третье условие является значимым, ранее мы предложили его объективистскую трактовку.

4. Корректное применение теоремы Бернулли предполагает осуществление трудоемких вычислений по верификации свойства независимости в исследуемых данных. Кроме того, когда модель данных непрерывно возрастает, это может привести к ухудшению свойств модели, к снижению точности определения независимости в такой степени, что модель не сможет обеспечить получение высоковероятных предсказаний.

В теореме Бернулли представлено два вида близости: второе неравенство описывает геометрическую близость, а заключение – близость по вероятности. Для исследования их связи предлагается моделирование теоремы Бернулли посредством следующего эксперимента.

Применение частотной интерпретации теоремы Бернулли

До применения теоремы необходимо определить теоретическую вероятность и провести верификацию второго неравенства. Оценивание неизвестной вероятности и проверка выполнимости неравенства реализуются посредством модели независимых испытаний. Последние заключаются в бросании правильной монеты, и эксперимент считается успешным, если выпадает герб. Каждая серия испытаний состоит из n бросаний, k – число планируемых серий экспериментов, тогда всего необходимо осуществить $k \times n$ экспериментов. Отметим, что в каждой серии экспериментов определяется одна частотная характеристика события A, а при реализации k серий будет получено k частот. В предлагаемом эксперименте вероятность $p(A)$ определяется с помощью частотных характеристик изучаемого события. А именно, если они близки друг к другу, т.е. попадают в интервал, который меньше или равен точности наблюдений – ε, то в качестве вероятности возьмем любую из частот или их среднее арифметическое, если большинство попало в выделенный интервал. В том случае, если частотные характеристики очень вариабельны, хорошей частотной оценки не существует и нет смысла применять теорему. Предположим, что теорема Бернулли применима. Существуют различные подходы к определению искомой вероятности P.

Во-первых, если при большом количестве испытаний подавляющее число частотных оценок теоретической вероятности $p(A)$ принадлежит к выделенному интервалу с длиной меньше ε, то тем самым осуществляется качественная верификация утверждения А без использования заключения теоремы Бернулли. Тогда в оценивании внешней вероятности P нет особой значимости, так как ее определение основано на полученной оценке для вероятности $p(A)$ и, кроме того, требует дополнительных вычислений. Тем не менее в целом оценивание внешней вероятности имеет значение.

Во-вторых, например, в стандартной теории вероятностей известен вывод теоремы Бернулли на основе локальной теоремы Муавра – Лапласа, но он предполагает проведение значительного числа испытаний, и еще больше необходимо экспериментов для получения этой теоремы на основе неравенства Чебышева. В случае верификации независимости данных, имеются основания для применения теоремы Бернулли, однако для выборок большого объема требуются существенные трудозатраты. Кроме того, постоянная проверка на независимость возрастающих объемов данных (по Шаферу и Вовку) приводит к ухудшению точности модели и к невозможности ее использовать для получения надежных результатов.

В-третьих, если независимость данных не установлена и нет оснований для применения теоремы Бернулли, то вероятность P может быть определена в рамках предложенного эксперимента. В этом эксперименте внешняя вероятность P в теореме Бернулли определяется по аналогии с вероятностью $p(A)$ и на ее основе.

Теперь проведем анализ требуемого количества испытаний для оценивания внешней вероятности P. Внешняя вероятность вычисляется на основе частот w, с которыми выполняется неравенство (2). Отметим, что хотя вычисление частотных характеристик w для события, описываемого выражением (2), сложнее вычисления частот события A, тем не менее эти частоты w определяются в рамках того же самого эксперимента, на котором основано определение частот события A. Тогда согласно формуле (2) частоты w будут вычисляться на основе частот появления события A и уже известной оценки вероятности события A. Предположим, что проведена i-я серия *из n* наблюдений и определена некоторая частота m_I / n события A. Тогда зная $p(A)$ и ε, осуществляем верификацию выполнимости неравенства (2). Ранее проведение каждой серии из n испытаний обеспечивало получение частоты события A, теперь та же серия экспериментов приводит лишь к получению сингулярной оценки, определяющей единичную выполнимость или невыполнимость второго неравенства. Если мы хотим определить частотные характеристики w с той же точностью, с какой вычислялись частоты события A, т.е. на основе n свидетельств, то необходимо определять каждую частоту w также на основе n сингулярных характеристик, описывающих выполнимость неравенства (2). Следовательно, для получения n свидетельств, определяющих выполнимость неравенства (2), надо провести n серий экспериментов, каждая из которых состоит из n бросаний монеты, и тогда для получения одной частотной характеристики w необходимо проведение n^2 экспериментов. Так как вероятность $p(A)$ определялась на основе k частотных характеристик m_i / n, i=1, k, то для определения вероятности выполнимости (2) также на основе k частотных характеристик предполагается реализация $k \times n^2$ экспериментов. И для каждой новой оценки вероятностей на основе предложенного эксперимента требуется в n раз больше испытаний.

Однако в действительности для получения частоты более сложного события, определенного выражением (2), необходимо, чтобы соответствующая серия экспериментов состояла из N наблюдений, где $N>>n$, и также потребуется провести намного больше серий наблюдений K, где $K >>k$. Здесь выражение $X>>Y$ означает, что X намного больше Y. В результате вместо $n \times k$ наблюдений для определения вероятности $p(A)$ необходимо провести $N \times K$ наблюдений с целью получения вероятности P, где $N \times K>>k \times n^2$. Таким образом, геометрическая близость частотных характеристик и вероятности имеет большее значение по сравнению с близостью на основе заключения теоремы. Если геометрическая близость не выполняется, то теорема неприменима, а при эмпирическом моделировании вычисление заключения основано на выполнимости второго неравенства. Кроме того, определение внешней вероятности в итоговом суждении теоремы не всегда имеет значение, а при необходимости ее определения требуются более громоздкие вычисления по сравнению с определением теоретической вероятности на основе частот.

* * *

Итак, во-первых, предложена частотная интерпретация теоремы Бернулли и требований Колмогорова к вероятностям. Показано, что в рамках частотной интерпретации условие А невыводимо на основе В и теоремы Бернулли. Вывод о зависимом характере условия А является правильным в субъективистской интерпретации теории вероятностей, но абсолютно неприемлем в частотной интерпретации. Дело в том, что в объективистской интерпретации математический аппарат применяется к объективно установленным частотным характеристикам. Кроме того, предположение Бореля, Фреше и Леви о том, что применение теоремы Бернулли на основе субъективных вероятностей приводит к объективным характеристикам, представляется интересным, рискованным, но не полностью учитывающим природу математики. Дело в том, что математический аппарат обладает свойством консервативности по отношению к обнаруженным закономерностям. Например, если посылки являются истинными, то на их основе, правильно рассуждая, получаем истинное заключение. Однако математические утверждения не обладают свойством эмерджентности, т.е. не обеспечивают возникновение новых качеств в итоговом суждении, если их не было в посылках.

Во-вторых, принимая во внимание предыдущий пункт, если считать Колмогорова безоговорочным последователем частотной интерпретации, то мы уже не нуждаемся в объяснениях, почему им было использовано зависимое условие А, так как в этой интерпретации оно не является зависимым. Однако более реалистично считать, что Колмогоров не был полным последователем эмпирической интерпретации, но, бесспорно, интересовался этой концепцией. Поэтому сделанные Шафером и Вовком объяснения использования Колмогоровым зависимого требования представляют интерес. На основе предложенной нами частотной интерпретации теоремы и требований Колмогорова для некоторых объяснений Шафера и Вовка получены дополнительные и в большей степени объективные объяснения. Представляется перспективным проведение частотной интерпретации для других теорем, чтобы проверить, в какой степени полученные в них результаты являются инвариантными по отношению к различным интерпретациям.

Литература

1. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.
2. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.
3. *Курно А.* Основы теории шансов и вероятностей. – М: Наука, 1970.
4. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. – М: Академия, 2008.
5. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей // *Вопросы философии.* – 1961. – № 1. – С. 91–102.
6. *Hacking I.* Logic of statistical inference. – Cambridge: Cambridge University Press, 1965.
7. *Kolmogoroff A*. Grundbegrife der Wahrscheinlichkeitsrechnung. – Berlin: Springer, 1933.
8. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance It’s Only a Game! – N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001.
9. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov’s Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, No. 1. – P. 70–98.

References

1. *Alimov Yu.I.* Alternativa metodu matematicheskoi statistiki [Alternative to method of mathematical statistics]. – M.: Znanie, 1980. (In Russ.)
2. *Kolmogorov A.N.* Osnovnye ponjatija teorii verojatnostei [Foundations of the theory of probability]. – M.: Nauka, 1974. (In Russ.)
3. *Kurno A.* Osnovy teorii shansov i verojatnostei [Exposition of the theory of chances and probabilities]. – M.: Nauka, 1970. (In Russ.)
4. *Tutubalin V.N.* Teorija verojatnostei [Theory of probabilities]. – M.: Akademija, 2008. (In Russ.)
5. *Khinchin A.Ya. Chastotnya teoriya R. Misesa I sovremennye idei teorii veroyatnostei* [Frequency theory of R. Mises and contemporary ideas of probability theory]. *// Voprosy filosophii.* 1961. – № 1. S. 91–102. (In Russ.)
6. *Hacking I.* Logic of statistical inference. – Cambridge: Cambridge University Press, 1965.
7. *Shafer G., Vovk V.* Probability and Finance It’s Only a Game! – N.Y.: A Wiley-Interscience Publication, 2001.
8. *Shafer G., Vovk V.* The Sources of Kolmogorov’s Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21, № 1. P. 70–98.

Дата поступления 10.05.2016