# О КРИТЕРИЯХ НАДЕЖНОСТИ ИНТУИТИВНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА*

*Н.В. Белякин, Е.М. Черепанов*

Понятие интуитивного доказательства представляется важным и при этом в достаточной мере туманным. В данной статье, являющейся продолжением исследования авторов «Об основных критериях убедительности доказательства» (Философия науки, 2010, № 3), сделана попытка уточнения некоторых аспектов этого понятия и рассмотрены условия, при которых интуитивное доказательство может считаться убедительным.

**Ключевые слова:** логика, доказательство, понятие, интуиция

В современной математической практике (научные публикации, доклады и т.д.) отдается предпочтение достаточно свободному стилю изложения. Во многих случаях математический текст доказательства носит «интуитивный характер», обусловленный математическим фольклором, когда опускаются «тривиальные» рассуждения и эти «опускания» заменяются утверждениями типа «отсюда ясно, что…», «нетрудно убедиться, что…», «очевидно, что…» и т.п. Такое изложение базируется на устоявшейся практике, когда опускаемые фрагменты рассуждений проверены и убедительны. Однако в некоторых случаях подобного рода рассуждения, базирующиеся на интуитивной очевидности, требуют более детального обоснования, так как эта «очевидность» не лежит в области устоявшейся практики. После соответствующей верификации либо такого рода рассуждение может оказаться несостоятельным, поскольку формализация показывает неверность этого рассуждения, либо «очевидность» после формализации оказывается валидной и в таком случае подтверждается правильность интуитивного доказательства.

Прежде всего необходимо уточнить хотя бы в общих чертах, что мы имеем в виду, говоря об интуитивном доказательстве. Интуицию

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (грант № 3 СО РАН (2012-2014) «Принципы построения онтологии на основе концептуализаций средствами логических дескриптивных языков».

мы можем понимать двояко. В первом случае интуиция связана с пониманием, ясным видением, с мыслью, делая эту мысль непреложной. Мы хорошо осознаем, к примеру, что прямая пересекает окружность в двух, а не в трех или четырех точках, и это осознание, несомненно, продиктовано определенным наглядным представлением о возможных положениях окружности и прямой на плоскости. Интуиция в этом смысле тесно связана с нашим опытом.

Интуиция во втором смысле лучше всего характеризуется словом «озарение». Под интуицией в этом случае мы понимаем особый процесс перехода от незнания к знанию, не опирающийся на последовательное рациональное рассуждение.

Указанные подходы к пониманию интуиции являются существенно различными. Интуитивно ясная идея в первом смысле предполагается ясной, так как мы уже имеем ее истолкование, базирующееся на предыдущем опыте. Говоря же об интуиции как об озарении, мы подчеркиваем как раз то обстоятельство, что наша идея не является изначально ясной и что эта ясность достигается здесь лишь в течение некоторого времени, в процессе перехода от неясности к ясности. Интуиция в первом смысле связана с содержанием, полнота которого определена как субъективно, так и принятыми соглашениями научного сообщества, в то время как интуитивно ясное во втором смысле определяется специфическими особенностями субъекта: идея, озарившая одного и интуитивно ясная для него, как правило, не является очевидной для других.

В рассмотрении процесса математического доказательства интуиция в обоих ее смыслах играет существенную роль. Интуиция как акт озарения, как творческий акт проявляет себя как непосредственное усмотрение истинности некоторого утверждения, а также нахождение способа убеждения в истинности этого утверждения. Этим способом является математическое доказательство. Интуиция в первом смысле подсказывает нам, как этот акт убеждения сделать понятным, что делает и акт убеждения, и его результат ценными в познавательном смысле. Поэтому роль интуитивно понятного изложения столь важна.

В.Я. Перминов в книге «Развитие представлений о надежности математического доказательства» [1] выделяет четыре типа интуитивной ясности, которые существенно различаются по своим истокам и достоверности:

1) *эмпирическая интуиция*. Простейшим видом интуиции, который встречается в математике, как и во всякой другой науке, является

интуиция, базирующаяся на опыте, появляющаяся на основе длительного общения с определенного рода объектами;

2) *праксеологическая интуиция.* Человеческое знание основано на очевидности в том смысле, что каждая сколь угодно сложная теория должна в конечном итоге опираться на некоторого рода простейшие констатации, в которых люди обычно не расходятся друг с другом. Отсутствие соглашения относительно таких констатаций было бы, видимо, смертью всякого объективного исследования;

3) *категориальная интуиция.* Наряду с непосредственным видением предметов и их простейших отношений человек обладает видением некоторых универсальных свойств бытия или категорий. Эта идея была развита Кантом в его учении о непосредственном внеэмпирическом созерцании пространства и времени;

4) *концептуальная интуиция.* Математические теории, возникая на некоторой интуитивной основе или без нее, обладают способностью продуцировать внутренний интуитивный фон, вторичную интуицию, уже подчиненную сложившейся формальной системе. Каждый математик знает, что в процессе работы в самой малоинтуитивной сфере постепенно вырабатываются некоторые способы чувствования возможного положения дел, система вспомогательных аналогий, метафор и т.п., которая играет ту же роль, что и естественная наглядность в элементарной геометрии. На это явление обратил внимание Г. Рейхенбах в своей книге «Философия пространства и времени» [2]. Основная идея Рейхенбаха состоит в том, что нормативная сила представлений проистекает не из опыта, не из непосредственных эмпирических ассоциаций, на базе которых создается теория, но имеет вторичное, логическое происхождение.

Эти четыре типа интуиции и служат основой для понимания природы интуитивного доказательства, причем понятие концептуальной интуиции здесь представляется существенным.

Для понимания процесса формирования «вторичной» интуиции в конкретной формальной системе приведем цитату из книги Д. Гильберта и П. Бернайса «Основания математики»: «Формальная аксиоматика по необходимости нуждается в содержательной как в своем дополнении, поскольку именно эта последняя поначалу руководит нами в процессе выбора соответствующих формализмов, а затем, когда формальная система уже имеется в нашем распоряжении, она подсказывает нам, как эта теория должна быть применена к рассматриваемой действительности. С другой стороны, мы не можем ограничиться содержательной аксиоматикой по той простой причине, что в науке – если не всегда, то все же по преимуществу – мы имеем дело с такими теориями, которые отнюдь не полностью воспроизводят действительное положение вещей, а являются лишь *упрощающей идеализацией* этого положения, в чем и состоит их значение. Такого рода теория, конечно, не может быть обоснована путем ссылки на ее очевидность или на опыт. Более того, ее обоснование и может быть осуществлено только в том смысле, что будет установлена непротиворечивость произведенной в ней идеализации, то есть той экстраполяции, в результате которой введенные в этой теории понятия и ее основные положения переступают границы наглядно очевидного или данных опыта. Прийти к выводу о непротиворечивости этой теории нам не поможет и ссылка на приблизительную значимость ее основных положений. В самом деле, противоречие может наступить как раз в результате того, что мы считаем вполне определенным какое-нибудь отношение, которое имеет место только в некотором ограниченном смысле» [3].

Здесь важно отметить следующее обстоятельство. История математики показывает, что в ее развитии очевидна тенденция устранения неявных посылок, используемых в доказательствах математических утверждений, так как использование таких посылок не гарантирует строгости математического доказательства с формальной точки зрения. Все посылки, используемые в математических рассуждениях, должны быть зафиксированы. Здесь мы и сталкиваемся с ситуацией *упрощающей идеализации,* которую нам подсказывает наша интуиция, и эта идеализация, в свою очередь, выводит нас за рамки интуитивно понятного, формируя то, что в приведенной выше цитате называется *вторичной интуицией.* С другой стороны, сам логический аппарат есть фиксация наших интуитивных представлений о правильности переходов от одного суждения к другому. Собственно, вопрос о непротиворечивости математических систем и есть вопрос о совместимости идеализаций этих интуитивных представлений. Можно поставить вопрос в более общей формулировке: представляется ли возможным сформулировать условия, при которых мы можем гарантировать подобного рода совместимость?

В связи с вышесказанным, приведем цитату из книги В.Я. Перминова «Развитие представлений о надежности математического доказательства»: «Строгое математическое доказательство отличается от всякого другого рассуждения тем, что в нем не используется никаких допущений, которые не зафиксированы в посылках. Это свойство доказательства мы будем называть герметичностью. Герметичность доказательства не тождественна простой достаточности посылок, ибо при наличии таких посылок доказательство может проводиться не строго, а с обращением к некоторого рода наглядности, аналогиям и т.п. При анализе герметичности мы будем обращать внимание не на формальную достаточность посылок в теории для того или иного доказательства, но на фактический процесс доказательства в плане наличия или отсутствия в нем посылок, не оговоренных в условиях. Это простое требование на практике оказывается чрезвычайно трудно выполнимым. История математики показывает, что многие доказательства даже в элементарной математике, считавшиеся совершенно строгими в течение многих веков, при более тщательном анализе оказались негерметичными, неполными с точки зрения фиксации своих посылок. Теоретическая задача состоит в том, чтобы понять вообще принципиальные возможности математического рассуждения быть абсолютно герметичным. Негерметичное доказательство выглядит для нас убедительным, принимается как строгое по той причине, что оно является интуитивно ясным. Именно интуиция скрывает от нас недостаточность логики, принципиальную нестрогость доказательства. Исследование герметичности, таким образом, требует прежде всего анализа доказательства с точки зрения взаимосвязи в нем интуитивных и логических элементов» [4].

Таким образом, центральным пунктом обоснования убедительности интуитивного доказательства является анализ соотношения в нем логических и интуитивных компонентов. После принятия некоторого способа рассуждения, т.е. фиксации некоторого логического аппарата, самым важным критерием оценки убедительности математического доказательства становится его формализуемость, т.е. приведение текста доказательства к такому виду, где переход от одного утверждения к другому формально обоснован в рамках принятого нами логического аппарата. Тем не менее в математической практике так называемое *интуитивное доказательство* является весьма значительным элементом этой практики, и значимость интуитивного доказательства проявляется в двух планах: *предварительном* и *последующем*.

Предварительный план интуитивного доказательства состоит в следующем. Непосредственное усмотрение истины (интуитивное озарение) формулируется в виде утверждения, которое требует обоснования, и это обоснование должно быть убедительным. В математической практике это выражается в цепочке утверждений, где переход от одного утверждения к другому представляется интуитивно обоснованным и такая интуитивная обоснованность базируется либо на накопленной математической практике (доказанные ранее результаты, устоявшиеся приемы доказательства и т.д.), либо на вере в возможность представления строгого обоснования таких переходов. Этот этап представляет собой процесс поиска доказательства.

Суть данного этапа лучше всего проиллюстрировать высказыванием Дж. Харди: «Я всегда представлял себе математика прежде всего как *наблюдателя*, который смотрит с приличного расстояния на горы и делает заметки о своих наблюдениях. Его цель состоит в том, чтобы увидеть наибольшее число пиков и сообщить об этом другим. Есть такие пики, которые легко различимы, но есть и такие, которые едва видны. Он отчетливо видит пик A, но едва может распознать пик B. Наконец, он видит отрог, который ведет от пика A, и следуя взором вдоль него, натыкается на пик B. Теперь B зафиксирован в его зрительном поле и отсюда он переходит к новым открытиям. В других случаях, вероятно, он может распознать отрог, который исчезает вдали, и делает предположение, что этот отрог ведет к пику за облаками или же за горизонтом. Но когда наш наблюдатель видит пик, он верит, что пик существует просто потому, что он видит его. Если он хочет, чтобы этот пик увидел другой человек, он просто указывает на этот пик либо прямо, либо через цепь вершин, которые ведут к нему» [5].

В приведенном рассуждении переход от пика к пику и есть цепь утверждений в доказательстве, и в этой цепи либо переход от одного утверждения к другому обоснован, либо обоснованность такого перехода требует верификации. Следует, однако, отметить, что путь к достижению поставленной цели может быть отнюдь не единственным. Это хорошо известно из практики передоказывания теорем, которая служит как цели получения более простого доказательства для обоснования убедительности уже полученного результата, так и цели увеличения и познавательной ценности полученного результата, и познавательной ценности нового доказательства, поскольку в процессе передоказывания теоремы возможны промежуточные результаты, имеющие самостоятельную познавательную ценность. Таким образом, возможен класс интуитивных относительно преследуемой цели эквивалентных доказательств. Каждое из таких доказательств, отметим еще раз, кажется для нас интуитивно убедительным. Эта интуитивная убедительность базируется на некоторых вполне приемлемых признаках, касающихся, собственно, рассмотренных выше понятий интуитивности.

Если резюмировать все вышесказанное, то понятие интуитивного доказательства должно обладать следующими признаками. Во-первых, интуитивное доказательство должно быть в целом представимо перед мысленным взором, т.е. оно должно быть *локально обозримо*. Локальная обозримость, напомним, характеризуется тем, что на каждом шаге $n$ мы способны воспроизвести все предыдущие шаги [6]. Во-вторых, интуитивное доказательство характеризуется цепочкой *интуитивно понятных* утверждений, часть из которых либо имеют убедительно установленную эпистемическую значимость, либо это утверждения, эпистемическая значимость которых, в свою очередь, требует установления. И наконец, в-третьих, либо все переходы от одного утверждения к другому валидны, т.е. являются обоснованными в формальном плане, либо валидность этих переходов представляется обосновываемой. Обоснованность в формальном плане не означает, что в тексте доказательства является обязательным представление полной формализации перехода от одного утверждения к другому, так как во многих случаях или это ссылки на уже доказанные результаты, или подразумеваются уже устоявшиеся и достаточно тривиальные стандарты рассуждений. В этом смысле мы имеем не обязательно полностью формализованное доказательство. В случае, когда все переходы являются валидными, мы будем иметь формализованное интуитивное доказательство.

Термин «интуитивно понятное утверждение» носит достаточно размытый характер в силу того, что он характеризует некую негласную и совсем не обязательную конвенцию относительно интерпретации роли и смысла тех или иных утверждений. Здесь свою роль играет и праксеологическая интуиция, которая базируется на существующих в математическом сообществе конвенциях в принятии истинными тех или иных результатов, в которых люди обычно не расходятся друг с другом. И тем не менее в математическом сообществе невозможно гарантировать одинакового понимания как доказательства утверждения, так и самого доказанного утверждения.

Следует отметить, что в формальной системе в обеспечении интуитивной понятности доказательства большую роль играет введение с помощью определений новых понятий и функций, которые способствуют достижению цели доказательства утверждения.

Таким образом, интуитивное доказательство, имеющее предварительный характер в указанном выше смысле, нуждается в обосновании его убедительности. Проверка валидности такого доказательства состоит в формализации тех его фрагментов, где переход от одного утверждения к другому требует обоснования. Таким средством является формализация данных фрагментов, для того чтобы убедиться в нормативности этих переходов. Правда, такая процедура не всегда достигает поставленной цели. Подробно эти вопросы рассмотрены в другой статье [7].

Резюмируя все сказанное выше, отметим, что с каждым доказываемым утверждением φ мы будем соотносить класс $I_\varphi$ интуитивных и, по нашему предположению, эквивалентных относительно утверждения φ доказательств. Обозначим через $I_\varphi = \Psi$ этот класс интуитивных доказательств, доказывающих утверждение φ. Каждое из доказательств этого класса для обретения статуса убедительности нуждается в формализации. Формализация интуитивного доказательства утверждения φ может быть осуществлена разными способами, а значит, не является единственной. Поэтому каждому интуитивному доказательству из класса $I_\varphi$ соответствует класс $E_\varphi$, эквивалентных относительно ϕ формализованных доказательств. Таким образом, процедура верификации интуитивного доказательства состоит в процедуре отображения доказательств из класса $I_\varphi$ в класс $F_\varphi$. Это отображение $G$ является гомоморфным. Напомним, что понятие гомоморфизма относится к системе объектов с заданными в них операциями или отношениями. Это отображение, которое сохраняет такие операции или отношения.

Пусть $T$ есть произвольная теория первого порядка в конечной сигнатуре и пусть $s = \{\varphi_1, ... \varphi_{n+1}\}$, где $\varphi_{n+1} = \varphi$ – интуитивное доказательство, доказывающее утверждение φ. На классах $I_\varphi$ и $F_\varphi$ эквивалентных по модулю φ доказательств будем рассматривать другой тип эквивалентности. Будем говорить, что два доказательства $s_1 = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ и $s_2 = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ эквивалентны, и писать $s_1 \approx s_2$, если они имеют одинаковую длину и на каждом шаге $i$ $\varphi_i \leftrightarrow \psi_i$. Тогда гомоморфное отображение $G: I_\phi \to F_\phi$ характеризуется тремя возможными случаями:

1) $G(s) = d$, где $d$ есть формализованное доказательство из класса $F_\varphi$ и $d$ не эквивалентно $s$;

2) $G(s) = d$ и $s \approx d$;

3) $G(s) = d$ и $d = \varnothing$.

Первый случай нам говорит нечто существенное относительно убедительности интуитивного доказательства $s$, но не говорит ничего относительно интуитивности доказательства $d$ в указанном выше смысле. Во втором случае интуитивная понимаемость доказательства $d$ сохраняется, так как мы получаем эквивалентное доказательство и его интуитивное понимание обеспечивается интуитивной понимаемостью доказательства $s$ . Это обстоятельство говорит нам о том, что интуитивное доказательство убедительно и в предварительном, и в последующем плане. Третий случай указывает нам на то, что интуитивное доказательство было ошибочным, так как не проходит проверки формализацией.

Следует еще раз подчеркнуть, что отображение $G$ не единственно, так как формализовать интуитивное доказательство можно различными методами (в том числе и методы компьютерного доказательства могут быть различными).

Наиболее важным с точки зрения рассмотрения убедительности доказательства является первый случай, так как формализованное доказательство $d$ может оказаться локально необозримым и его проверка будет затруднительным предприятием. Однако это доказательство будет глобально обозримым, и его *глобальная обозримость* [8] гарантируется последовательностью формул $s$ интуитивного доказательства. Это обстоятельство (наряду с другими) и объясняет математическую практику передоказывания теорем. Целью такого передоказывания теорем является получение более простого, а значит, и более убедительного доказательства.

Существует мнение, что «в некотором смысле эту практику можно рассматривать как движение от формализованного доказательства к интуитивному» [9] и что это обратное движение состоит в том, чтобы формализованное доказательство становилось интуитивным в указанном смысле, т.е. более понятным. Дело в том, что сколь угодно длинное и сложное доказательство может быть в достаточной мере интуитивно понятным и понятность такого доказательства лежит в контексте его глобальной обозримости. Глобальная обозримость доказательства, опирающаяся на конечную последовательность ключевых (возможно, и эпистемически значимых) утверждений, выражает идею доказательства и может обеспечивать интуитивную понимаемость такого доказательства. Нам представляется, что процесс передоказывания теорем преследует, как уже было сказано, две цели: первая – получить более простое доказательство для обоснования убедительности полученного результата (более простое доказательство легче проверить), вторая – увеличить познавательную ценность как полученного результата, так и нового доказательства, поскольку в процессе передоказывания теоремы возможны промежуточные результаты, имеющие эпистемическую значимость.

Достигаемая при этом большая интуитивная понимаемость процесса доказательства является побочным продуктом. Более простое доказательство более понимаемо и в интуитивном смысле.

Таким образом, процесс передоказывания теорем состоит в новом процессе представления интуитивного доказательства и в процессе обоснования его валидности через верификацию с помощью формализации его формально не обоснованных фрагментов. Причем здесь важно, чтобы полученное строгое доказательство было и структурно более простым. Возникает, правда, вопрос: каким образом сравнивать два доказательства по степени их сложности?

С одним из возможных подходов к оценке структурной сложности математического доказательства можно ознакомиться в статье «Простота как критерий убедительности доказательства» [10]. Суть этого подхода состоит в том, что используя значение структурной сложности терминов языка первого порядка (местность и некоторые структурные свойства терминов), мы можем оценить значение структурной сложности формул этого языка и исходя из этого – значение структурной сложности конечной последовательности формул. Это позволяет нам выбрать как более простое интуитивное доказательство с целью обоснования его убедительности, так и наиболее простое из всех возможных его формализаций.

В связи с этим возникает вопрос. Обозначим через $\mathrm{Simp}(x, y)$ предикат, характеризующий отношение сложности «$x$ проще $y$» и пусть $G: I_\phi \to F_\phi$. Тогда если $G(s_1) = d_1$ и $G(s_2) = d_2$, то $\mathrm{Simp}(s_1, s_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathrm{Simp}(d_1, d_2)$ ? Вопрос этот существен, так как касается постановки задачи: приводит ли более простая (а следовательно, и более интуитивно понятная) постановка задачи к более простому решению? В этом отношении интуитивное доказательство в предварительном плане может представлять собой задачу обоснования его убедительности.

Таким образом, интуитивное доказательство является убедительным в двух случаях. Во-первых, оно убедительно в предварительном плане лишь тогда, когда его формализация приводит к эквивалентному интуитивному доказательству, и, во-вторых, оно убедительно в последующем плане, если оно формализуемо, но результат формализации не является интуитивным доказательством.

## Примечания

1. См.: *Перминов В.Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – С. 28–35.

2. См.: *Рейхенбек Г.* Философия пространства и времени. – М.: Прогресс, 1985.

3. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики: Т. I: Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1979. – С. 25.

4. *Перминов В.Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства.

5. *Hardy G.H.* Mathematical proof // Philosophy of Mathematics / Ed. by D. Jacquette. – Blackwell, 2002. – P. 182.

6. См.: *Белякин Н.В.,Черепанов Е.М.* Об основных критериях убедительности доказательства // Философия науки. – 2010. – № 3 (46). – С. 31–44.

7. Там же.

8. Там же.

9. *Целищев В.В.* Эпистемология математического доказательства. – Новосибирск: Параллель, 2006. – С. 42–43.

10. См.: *Черепанов Е.М.* Простота как критерий убедительности доказательства // Философия науки. – 2010. – № 1 (44). – С. 91–101.

Дата поступления 08.11.2012

Новосибирский государственный
университет
Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск
emcher@math.nsc.ru

***Belyakin, N.V. and Ye.M. Cherepanov.* On the criteria of reliability of intuitive proof**

In our view, the concept of intuitive proof is important but rather vague. In the present paper which continues our work “On the main criteria of reliability of proof” (*Philosophy of Science*, Novosibirsk, Russia, [*Filosofia nauki*] 2010, No.3), we attempt to make more precise some aspects of this concept and analyze conditions under which intuitive proof may be considered as reliable.

**Keywords:** logic, proof, concept, intuition