

СОДЕРЖАТЕЛЬНОСТЬ, ИНФОРМАТИВНОСТЬ И ПРОСТОТА

Е.М. Черепанов

Предлагаемая статья посвящена исследованию общности и различия понятий *содержательности* и *информативности* утверждений теорий первого порядка, а также связи этих понятий с понятием простоты таких утверждений. Главной целью статьи являются попытка уточнения понятия *информативности утверждения* теории и изучение факторов, влияющих на степень информативности утверждения.

I

Большая часть публикаций, в которых используется термин «информативность», имеют либо технический, либо информационно-кибернетический характер. В технической литературе речь идет об информативности показаний аппаратуры, по которым мы можем судить о состоянии некоторой сложной системы в целом. В случае, например, медицинской аппаратуры это ряд показателей, позволяющих судить о состоянии больного, в случае показаний аппаратуры атомной электростанции это состояние действующих агрегатов. В названных и подобных случаях информативными признаками, или показателями, являются те, которые позволяют построить в соответствии с принятыми в данной системе правилами утверждение, являющееся для нас по каким-то причинам важным. И речь в этих случаях идет об информативности утверждений, построенных на основе таких признаков.

В области информационных технологий часто речь идет об информативности сетевых ресурсов. Чаще всего информативность здесь понимается как возможно бóльшая информационная содержательность. К примеру, начальная страница какого-то сетевого ресурса более информативна, если на ней с помощью ключевых слов (в виде меню, ссылок и прочего) наиболее полно анонсируется содержание

данного сетевого ресурса. Здесь мы также сталкиваемся с некоторым набором информативных признаков, позволяющих получить при помощи этих признаков некоторое содержание, выраженное текстом, состоящим из одного или нескольких предложений. Но дело в том, что не всякое содержание, выраженное некоторым текстом, на данный момент является для нас информативным в том смысле, что относительно контекста, которым мы располагаем, это содержание может и не быть для нас новым и важным, или оно может быть новым, но не важным. В случае же с показаниями приборов такой контекст либо неявно подразумевается, либо он явный, но несущественный и неизменный. Например, речь идет о больном, когда подразумевается, что нормальная температура – это $36,6^{\circ}$. В этих случаях обычно важно сообщение в виде некоторого набора предложений, построенных в соответствии с принятыми правилами и говорящих, что «все в норме» или что «имеется отклонение от нормы» с последующей детализацией.

Иногда информативность отождествляется с содержательностью, иногда – с осмысленностью, при этом предполагается, что содержание должно быть осмысленным, но не уточняется, что следует понимать под осмысленностью. Однако практически нет попыток эксплицировать понятие информативности или же эти попытки невняты. В математической и философской литературе также есть работы, в которых используются понятия информативности и содержательности. И если о содержательности утверждения или теории многими авторами сказано достаточно ясно и точно, то понятию информативности посвящено небольшое количество работ и исследовано оно, на наш взгляд, пока неудовлетворительно. Здесь также информативность часто редуцируется к содержательности или к информативности в шенноновском смысле.

II

Большинство исследователей сходятся во мнении о том, что утверждение является для них информативным потому, что оно *новое* и *важное*. Кажется вполне очевидным то обстоятельство, что если некоторое сообщение для кого-то является информативным, то оно обязательно будет информативным для другого. Это сообщение может оказаться для другого человека или не новым, или если даже и новым, то не важным. Подобное имеет место и в быту, и в науке. Здесь существенное значение имеет контекст, или база знаний, а возможно, и важность

решаемой проблемы или задачи, относительно которых мы оцениваем информативность утверждения. Таким образом, будем считать, что *новизна* и *важность* суть необходимое и достаточное условие информативности утверждения. Будем говорить, что, для того чтобы утверждение φ было *информативным*, необходимо и достаточно, чтобы оно было *новым* и *важным*.

Рассмотрим эти понятия информативности и содержательности более подробно. Пусть дан язык логики первого порядка L сигнатуры Ω и пусть T – элементарная теория этого языка, а $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ – множество внелогических аксиом теории T , т.е. $T = Th(\{\psi_1, \dots, \psi_n\})$. *Содержательность теории T* определяется всем множеством выводимых в ней предложений. Аналогичным образом определяется обычно и *содержательность произвольного утверждения* этой теории: если φ есть некоторое утверждение теории T , то содержательность этого утверждения определяется множеством следствий из него, т.е. множеством предложений $Th(\varphi)$. Если φ_1 и φ_2 – некоторые утверждения теории T и $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, то φ_1 и φ_2 суть *одинаковые по содержательности утверждения*. Если, к примеру, $\varphi_1 \vdash \varphi_2$, то и $Th(\varphi_2) \subset Th(\varphi_1)$, и, следовательно, утверждение φ_1 является *более содержательным*, чем утверждение φ_2 . Можно также полагать, что если $Th(\varphi_1) \cap Th(\varphi_2) \subset Th(\varphi_1)$ и/или $Th(\varphi_1) \cap Th(\varphi_2) \subset Th(\varphi_2)$, то утверждения φ_1 и φ_2 имеют *общее содержание*.

При принятии нами основных постулатов теории T все множество утверждений этой теории является для нас *потенциально информативным*. Для того чтобы выделить из множества потенциально информативных утверждений информативные утверждения, уточним понятия новизны и важности утверждения.

III

Пусть Γ есть некоторое известное нам на сегодняшний день подмножество предложений теории T . Будем полагать множество предложений Γ контекстным знанием теории T .

Определение 1. Утверждение φ теории T будем считать *новым* относительно множества утверждений Γ , если:

$$\Gamma \vdash \varphi, \text{ то } \varphi \notin \Gamma \text{ и если } \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi, \text{ то и } \psi \notin \Gamma.$$

Важность относительно Γ выводимого утверждения определяется прагматикой, т.е. целенаправленностью научного исследования. Не все выводимые следствия в теории T имеют для нас познавательную ценность. Попробуем построить один из возможных критериев для селекции выводимых утверждений.

В классическом исчислении логики первого порядка основными правилами вывода являются следующие:

$$\text{а) } \frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi} \text{ (modus ponens);}$$

$$\text{б) } \frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\Phi \rightarrow \forall x \Psi};$$

$$\text{в) } \frac{\Phi \rightarrow \Psi}{\exists x \Phi \rightarrow \Psi}.$$

В том, чтобы мы получили возможность выводить важные для нас теоремы, решающую роль начинает играть интерпретация нами импликации, обеспечивающей нам целенаправленный вывод следствий. По-видимому, можно как-то на формальном уровне определить интересные и важные для нас выводимые следствия, как это делается в релевантных интерпретациях импликации. В качестве примера такого критерия можно было бы задать одну из интерпретаций осмысленного вывода и считать такой вывод важным.

Определение 2. Пусть $\phi \in \Gamma$, $\phi \vdash \psi$ и $\psi \notin \Gamma$. Будем считать утверждение ψ *важным* в том случае и только в том случае, если существует формула η такая, что она является как подформулой [1] формулы ϕ , так и подформулой формулы ψ , т.е. у этих утверждений есть общий контекст.

По-видимому, возможны и другие способы определения важности утверждения. Например, можно считать выведенное утверждение важным в силу того, что оно упрощает для нас вывод других важных следствий. Важность выводимого утверждения может определяться и с помощью нескольких критериев. В данном случае это для нас не является существенным. Будем полагать, что мы знаем, какое из выводимых следствий для нас важно и имеет смысл.

IV

Рассмотрим теперь базовые принципы сравнения утверждений по степени их информативности и установим отношение частичного порядка на множестве всех информативных утверждений.

Во-первых, будем считать, что два утверждения φ и ψ сравнимы по степени их информативности тогда и только тогда, когда либо $Th(\varphi) \subset Th(\psi)$, либо $Th(\psi) \subset Th(\varphi)$. Будем также считать, что *более содержательное утверждение более информативно*.

Во-вторых, пусть φ и ψ две информативные формулы и $\varphi \leftrightarrow \psi$, т.е. формулы содержательно эквивалентны. Считать ли нам эти формулы одинаково информативными или предпочесть одну из них как более информативную? Из двух содержательно эквивалентных формул естественным кажется считать более информативной более простую формулу. Резоны здесь носят скорее психологический характер: новое знание воспринимается легче, если оно выражено простейшим из возможных способов. Таким образом, будем оказывать предпочтение простейшей из логически эквивалентных формул. Эта разновидность простоты, учитывающая удобство использования и легкость восприятия, является *прагматической простотой*. Способ измерения данной разновидности простоты утверждений теории будет предложен ниже. А пока будем полагать, обозначив через $v_p(\varphi)$ прагматическое значение сложности формулы φ , а через $inf(\varphi)$ степень информативности формулы φ , что если $\varphi \leftrightarrow \psi$ и $v_p(\varphi) \leq v_p(\psi)$, то $inf(\varphi) \leq inf(\psi)$.

Обозначив через $inf(\varphi)$ степень информативности формулы φ , сформулируем некоторые вытекающие из первого принципа простые теоремы. Пусть Γ есть множество информативных на данный момент утверждений и пусть $\varphi \in \Gamma$. Тогда

- IV.1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \Rightarrow inf(\varphi) \geq inf(\varphi \rightarrow \psi)$;
- IV.2. $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi \Rightarrow inf(\varphi \& \psi) \geq inf(\varphi)$;
- IV.3. $\varphi \& \psi \rightarrow \psi \Rightarrow inf(\varphi \& \psi) \geq inf(\psi)$;
- IV.4. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi \Rightarrow inf(\varphi) \geq inf(\varphi \vee \psi)$;
- IV.5. $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t) \Rightarrow inf(\forall x \varphi(x)) \geq inf(\varphi(t))$;
- IV.6. $\varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi(x) \Rightarrow inf(\varphi(t)) \geq inf(\exists x \varphi(x))$.

V

Рассмотрим теперь условия, влияющие на информативность выводимого утверждения. Пусть по-прежнему Γ есть некоторое известное нам на сегодняшний день подмножество предложений теории T .

1. Пусть $\varphi \in \Gamma$ и $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Здесь возможны два случая:

а) если $\psi \in \Gamma$, то информативность утверждения φ снижается условием, выраженным формулой ψ , а формула $\psi \rightarrow \varphi$ является информативной лишь в том случае, если она важная;

б) если $\psi \notin \Gamma$, то будем считать утверждение $\psi \rightarrow \varphi$ неинформативным в силу того, что неизвестны истинность или ложность условия, выраженного формулой ψ .

Таким образом, если утверждение φ являлось информативным утверждением, то выведенное следствие понижает его информативность и делает ее зависимой от условия, выраженного формулой ψ . Если обозначить через $\mathit{inf}(\varphi \mid \mu)$ степень информативности утверждения φ при условии утверждения μ , то справедливым в данном случае будет следующее отношение:

$$\mathit{inf}(\varphi \mid (\psi \rightarrow \varphi)) \leq \mathit{inf}(\varphi).$$

2. Пусть $\Gamma, \Gamma \vdash \varphi \& \psi$ и $\psi \notin \Gamma$. Тогда информативность формулы φ не снижается и ψ является новым и, возможно, информативным утверждением. В случае если и ψ есть информативное утверждение, то возможно, что и $\varphi \& \psi$ является информативным утверждением. Для того чтобы установить отношение информативности в случаях информативности конъюнкции двух утверждений, рассмотрим эти случаи на конкретных примерах.

Пусть мы имеем утверждение «завтра будет дождь» и пусть мы вывели утверждение «завтра будет дождь и завтра будет град», причем утверждение «завтра будет град» является информативным. Очевидно, что в данном случае утверждение «завтра будет дождь и завтра будет град» более информативно, чем каждое из этих утверждений по отдельности. Здесь согласно теоремам IV.2 и IV.3 справедливы будут следующие отношения:

$$\begin{aligned} \mathit{inf}(\varphi \& \psi) &> \mathit{inf}(\varphi); \\ \mathit{inf}(\varphi \& \psi) &> \mathit{inf}(\psi). \end{aligned}$$

В том случае, когда оба утверждения не являются новыми и принадлежат к нашему контексту (например, в конъюнкции «завтра будет дождь и завтра будет град» оба члена конъюнкции нам уже были известны), выведенное предложение является информативным в силу того, что оно новое и важное, потому что представляет собой уточняющее обстоятельство, так как возможны другие варианты следствий. Скажем, мы могли бы получить следствие вида «завтра будет дождь или завтра будет град» или «если завтра будет дождь, то завтра будет град». В случае если ψ не является информативным утверждением, естественно полагать, что информативность конъюнкции не будет выше информативности базового утверждения. Для всех рассмотренных случаев будет справедливо следующее соотношение:

$$\text{inf}(\varphi \ \& \ \psi) \geq \text{inf}(\psi).$$

3. Пусть $\varphi \in \Gamma$ и $\Gamma + \varphi \vdash \psi$. Тогда утверждение ψ , является альтернативным утверждением утверждению φ . Рассмотрим на примерах возможные случаи. Допустим, что у нас есть утверждение «завтра будет дождь» и мы получили дополнительное утверждение «завтра будет дождь или завтра будет снег», причем утверждения «завтра будет снег» у нас до этого не было. Утверждение «завтра будет снег» может быть как истинным, так и ложным. Если это утверждение истинное, то интуитивно понятно, что информативность первого утверждения понизилась. Если оно ложное, то на степень информативности первого утверждения второе утверждение не влияет. Если же мы имеем оба этих утверждения, то можно утверждать, что «завтра будет дождь и завтра будет снег», т.е. будет снег с дождем, а это не тот случай, который мы рассматриваем. И еще один возможный случай альтернативы: как в известном стишке «то ли будет, то ли нет», выводимое утверждение может иметь вид «завтра будет дождь или завтра не будет дождя». Естественно считать такое утверждение неинформативным.

Таким образом, возможны три случая:

- а) если утверждение $\varphi \notin \Gamma$ и $\Gamma \vdash \psi$, т.е. ψ является теоремой теории, то оно понижает информативность утверждения φ ;
- б) если утверждение $\psi \notin \Gamma$, тогда если утверждение ψ тождественно ложно, то есть выводимо утверждение $\neg\psi$, то резонно полагать, что на информативность утверждения φ выведенное следствие не влияет;

в) утверждение $\varphi \vee \neg\varphi$ не информативно.

Следует отметить, что в случае, если $\psi \in \Gamma$, то $\varphi \vee \psi$ является новой и, возможно, информативной формулой.

Обобщая первые два случая, получаем следующее отношение:

$$\mathit{inf}(\varphi) \geq \mathit{inf}(\varphi \mid (\varphi \vee \psi)).$$

Учитывая третий случай, устанавливаем минимум информативности:

$$\mathit{inf}(\varphi \vee \neg\varphi) = 0.$$

4. Пусть $\Gamma \vdash \neg\psi$ и $\neg\psi \notin \Gamma$. Тогда будем считать отрицание утверждения информативным в таком же смысле, как в случае $\Gamma \vdash \psi$ и $\psi \in \Gamma$.

Таким образом, естественно полагать, что альтернативность и условность понижают информативность ранее выведенного утверждения, в то время как отрицание утверждения столь же информативно, как и само утверждение. Вывод конъюнкции двух информативных формул является информативной формулой без понижения информативности каждого из компонентов. Вывод дизъюнкции двух информативных формул может быть информативной формулой, но дизъюнкция понижает информативность каждого из компонентов. Вывод импликации из одной информативной формулы в другую информативную формулу понижает информативность консеквента.

Итак, базовые принципы сравнения утверждений по степени их информативности пополним следующими отношениями:

$$\text{а) } \mathit{inf}((\varphi \mid (\psi \rightarrow \varphi))) \leq \mathit{inf}(\varphi);$$

$$\text{б) } \mathit{inf}(\varphi) \geq \mathit{inf}(\varphi \mid (\varphi \vee \psi));$$

$$\text{в) } \mathit{inf}(\varphi \vee \neg\varphi) = 0;$$

г) если $\varphi \in \Gamma$, то естественно полагать, что утверждение вида $\varphi \rightarrow \varphi$ не несет никакой новой информации, и поэтому будем считать, что $\mathit{inf}(\varphi \rightarrow \varphi) = 0$.

VI

Рассмотрим условия, влияющие на потенциальную информативность теории в целом. Термин «потенциальная информативность» здесь

отражает тот простой факт, что в рамках данного рассмотрения термин «информативность» применим лишь к конкретному утверждению и, говоря о потенциальной информативности теории, мы говорим о возможном множестве информативных предложений $\inf \mathbf{T} \supset T$. Это множество является возможным, так как нельзя исключать вырожденный случай (например, противоречивая теория), когда $\inf \mathbf{T} = \emptyset$. Включение является строгим, так как не все выводимые предложения информативны. Очевидно, что логически более сильная теория более содержательна, а следовательно, потенциально более информативна, так как увеличивается множество выводимых предложений теории, в том числе и информативных. Поэтому добавление новых аксиом порождает новую потенциально более информативную теорию.

Рассмотрим теперь, каким образом меняется (и меняется ли?) потенциальная информативность теории при ее консервативном расширении. Важным случаем консервативного расширения элементарной теории (и именно этот случай наиболее интересен в данном контексте) является так называемое расширение теории с помощью определений, или *дефинициальное* расширение. Определим это понятие. Рассмотрим два типа расширений элементарной теории.

Расширения первого типа. Пусть $T_1^{\Omega_1}$ – аксиоматическая теория сигнатуры Ω_1 ; $\{x_1, \dots, x_n\}$ – различные переменные из множества V переменных языка; ψ – формула теории $T_1^{\Omega_1}$, такая что множество свободных переменных этой формулы – $FV(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Образуем теорию $T_2^{\Omega_2}$ добавлением к $T_1^{\Omega_1}$ нового n -местного символа P , причем $P \notin \Omega_1$ и новой нелогической аксиомы

$$\forall x_1, \dots, x_n (P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)),$$

которую назовем *определяющей аксиомой* для P . Назовем теорию $T_2^{\Omega_2}$ *расширением $T_1^{\Omega_1}$ первого типа*.

Расширения второго типа. Пусть $T_1^{\Omega_1}$ – аксиоматическая теория сигнатуры Ω_1 ; $FV(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y_1, y_2\}$ – различные переменные из V ; формула ψ теории $T_1^{\Omega_1}$ такая, что $FV(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y_1\}$ и выполняются следующие условия:

$$(i) \forall x_1, \dots, x_n \exists y_1 \psi(x_1, \dots, x_n, y_1) \in T_1^{\Omega_1};$$

$$(ii) \forall x_1, \dots, x_n \exists y_1 y_2 (\psi(x_1, \dots, x_n, y_1) \& \psi(x_1, \dots, x_n, y_2) \rightarrow y_1 = y_2).$$

Образуем теорию $T_2^{\Omega_2}$ добавлением к $T_1^{\Omega_1}$ нового n -местного функционального символа f и новой нелогической аксиомы

$$\forall x_1, \dots, x_n \forall y (y = f(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)),$$

которую назовем *определяющей аксиомой* для f . Будем называть выражение (i) *условием существования*, а выражение (ii) – *условием единственности* для f , а теорию $T_2^{\Omega_2}$ – *расширением второго типа*.

Указанные определяющие аксиомы для P и f называются также *явными определениями* n -местного предикатного символа P и n -местного функционального символа f соответственно.

Теория $T_2^{\Omega_2}$ называется *расширением теории с помощью определений* (дефинициальным расширением) теории $T_1^{\Omega_1}$, если $T_2^{\Omega_2}$ получается из $T_1^{\Omega_1}$ конечным числом расширений первого и второго типа.

Консервативное расширение теории с помощью определений повышает ее потенциальную информативность. Во-первых, вводя новое понятие, мы через определение нового термина обращаем внимание на некоторые объекты или обстоятельства. Как справедливо отмечает Г.Фреге, «посредством определений некоторым знакам или словам, до этого не имевшим никакого значения, оно придается. Таким образом, как посредством определения этому знаку придано значение, данное определение превращается в самостоятельное предложение» [2]. Во-вторых, введение нового термина согласуется с принятыми понятиями новизны и важности. Предложение, определяющее новый термин, является новым в нашей теории. Важность здесь будет иметь несколько иной смысл, чем в приведенном выше примере определения важности для вновь получаемых утверждений теории. Важность определяемого в теории термина имеет здесь зачастую сугубо прагматический смысл, так как введение нового термина содержательно ничего не добавляет, а лишь фиксирует какое-то важное для нас содержание. Утверждения теории, в которые входит определяемый термин, становятся проще и удобнее именно в прагматическом смысле. Таким образом, понятие важности нового термина можно истолковывать еще и в кон-

тексте простоты. Действительно, с простыми выражениями проще работать. Рассмотрим критерий простоты такого вида подробнее.

Построим отображение $\mathbf{f}$, которое для всякой формулы φ языка L ставит в соответствие атомарную формулу языка L_φ , в сигнатуре которого имеется единственный предикатный символ и местность которого определяется суммой мест входящих в формулу φ предикатов. Это сопоставление будем осуществлять по следующему правилу:

- а) если φ есть формула вида $P(x_1, \dots, x_n)$, то $\mathbf{f}(\varphi) = \varphi$;
- б) если φ есть формула вида $\neg P(x_1, \dots, x_n)$, то $\mathbf{f}(\varphi) = P(x_1, \dots, x_n)$;
- в) если φ есть формула вида $P(x_1, \dots, x_n) \nabla Q(y_1, \dots, y_m)$, где $\nabla \in \{\&, \vee\}$, то $\mathbf{f}(\varphi) = R(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$;
- г) если φ есть формула вида $Qx\psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $\mathbf{f}(\varphi) = \mathbf{f}(\psi)$;
- д) если φ есть формула вида $\psi_1 \nabla \psi_2$, то $\mathbf{f}(\varphi) = \mathbf{f}(\psi_1) \nabla \mathbf{f}(\psi_2)$.

Таким образом, если каждой формуле φ языка L отображение $\mathbf{f}$ ставит в соответствие формулу $R(x_1, \dots, x_k) = \mathbf{f}(\varphi)$, то, обозначив через $v_p(\varphi)$ значение прагматической сложности утверждения φ , а через $v_G(R)$ – значение сложности класса интерпретаций термина R по Н.Гудмену [3], определим прагматическую сложность формулы φ следующим образом:

$$v_p(\varphi) = v_p(\mathbf{f}(\varphi)) = v_G(R).$$

Рассмотрим теперь одно важное свойство отображения $\mathbf{f}$.

Теорема. Пусть формула φ имеет вид $\psi_1 \& \psi_2$, тогда

$$v_p(\varphi) \geq v_p(\psi_1) + v_p(\psi_2).$$

Доказательство. Пусть отображение $\mathbf{f}$ ставит в соответствие формулам φ , ψ_1 и ψ_2 языка L формулы языка L_1 , в сигнатуре которого три предикатных символа. Допустим, что $\mathbf{f}(\psi_1) = R_1(x_1, \dots, x_k)$, $\mathbf{f}(\psi_2) = R_2(y_1, \dots, y_l)$ и $\mathbf{f}(\varphi) = R(z_1, \dots, z_m)$. Расширим язык L_1 и определим предикат Q следующим образом:

$$\forall x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l (Q(x_1, \dots, x_k y_1, \dots, y_l) \leftrightarrow R_1(x_1, \dots, x_k) \& R_2(y_1, \dots, y_l)).$$

В соответствии с определением отображения $\mathbf{f}$ число мест предиката R является суммой числа мест предикатов R_1 и R_2 , т.е. $m = k + l$. Столько же мест имеет и предикат Q . Согласно мере Гудмена

$$v_G(Q) = v_G(R_1) + v_G(R_2).$$

Кроме того, согласно этому подходу Гудмена верно и следующее отношение: $v_G(Q) \leq v_G(R)$. А так как $v_p(\varphi) = v_p(R)$, $v_p(\psi_1) = v_G(R_1)$ и $v_p(\psi_2) = v_G(R_2)$, получаем то, что требовалось.

Следствие. Значение сложности всякой формулы больше либо равно сумме значений сложности входящих в нее подформул.

Доказанное выше свойство отображения $\mathbf{f}$ окажется полезным при оценке *прагматической* сложности индуктивного аппарата теории. Действительно, например, кажется очень сложным воспринять и запомнить пароль программы: 11111111111111111111, – но задача становится легкой, если этот пароль представить в таком виде: 11111–11111–11111–11111. Этот пример показывает, что вторая запись проще. Пусть $A_1, \dots, A_k$ есть множество внелогических аксиом теории T . Это множество аксиом всегда можно заменить одной-единственной аксиомой $A \equiv A_1 \& A_2 \& \dots \& A_k$. Первая запись проще, так как

$$v_p(A) \geq v_p(A_1) + v_p(A_2) + \dots + v_p(A_k).$$

Пусть ψ есть формула языка теории T и пусть T^* есть консервативное расширение теории T , образованное добавлением с помощью определения в сигнатуру теории единственного термина Q , т.е. если $\{x_1, \dots, x_m\}$ есть свободные переменные формулы ψ , то

$$\forall x_1 \dots x_m (Q(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_m)).$$

Теорема 2. $v_p(Q(x_1, \dots, x_m)) \leq v_p(\psi)$.

Доказательство. В определении предиката $Q(x_1, \dots, x_m)$ в формуле указаны только свободные переменные. Поэтому если n есть общее число переменных формулы ψ , то $m \leq n$. Согласно мере сложности по Гудмену, если $m \leq n$, то $v_G(P^m) \leq v_G(P^n)$. Пусть $\mathbf{f}(\psi) = R(y_1, \dots, y_n)$. Тогда

$$v_G(Q(x_1, \dots, x_m)) \leq v_G(R(y_1, \dots, y_n)).$$

А поскольку согласно определению отображения $\mathbf{f}$

$$v_p(Q(x_1, \dots, x_m)) = v_G(Q(x_1, \dots, x_m)),$$

постольку $v_p(Q(x_1, \dots, x_m)) \leq v_p(\psi)$. Что и требовалось.

Пусть формула ψ , являющаяся определением нового термина Q , есть подформула утверждения φ теории T . Тогда утверждение φ логически эквивалентно утверждению φ^* теории T^* , в которую входит термин Q . Следствием предложенного выше метода измерения сложности утверждений теории и доказанной выше теоремы является то, что $v_p(\varphi^*) \leq v_p(\varphi)$ и, следовательно, $\inf(\varphi^*) \geq \inf(\varphi)$. Таким образом, введение нового и важного термина повышает информативность нашей теории, т.е. теория T^* потенциально более информативна, чем теория T .

VII

В заключение повторим основные положения данной работы. Во-первых, научная теория рассматривается как множество информативных утверждений, являющееся подмножеством всех выводимых в этой теории утверждений. Информативным может быть только содержательное утверждение, но не всякое содержательное утверждение оказывается информативным. Во-вторых, утверждение теории является информативным, если оно новое и важное относительно данного контекста, или базы знаний. В-третьих, рассмотрен возможный вариант экспликации понятия информативности утверждения и введено отношение частичного порядка на множестве всех информативных утверждений. Показаны случаи влияния простоты утверждения на его информативность.

Примечания

1. Напомним, что подформулой формулы Φ называется такое подслово формулы Φ , которое само является формулой.
2. *Frege G.* Избранные работы. – М.: Дом интел. книги; Рус. феноменол. о-во, 1997.
3. *Goodman N.* The structure of apperance. – Harward Univ. Press, 1961; *Черепанов Е.М.* Сложность «экстралогического базиса системы» по Гудмену и сложность научной теории // Вычислительные системы. – Новосибирск, 2001. – Вып. 168.

Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск

The Cherepanov, E.M. Contensiveness, factuality, and simplicity

The paper studies the community and the difference between the concepts of *contensiveness* and *factuality* of statements in first order theories, as well as the relation of these concepts with the concept of *simplicity* of such statements. The major aim of the paper is to attempt to define the concept of contensiveness of a theoretical statement more exactly and to study factors influencing the degree of factuality of the statement.