I. L. Humberstone

FROM WORLDS TO POSSIBILITIES

(1981)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

И. Л. Хамберстоун

ОТ МИРОВ К ВОЗМОЖНОСТЯМ

**Общая идея**

Построение модальной логики по аналогии с темпоральной логикой в *Humberstone I. L.* ‘Interval Semantics for Tense Logic: Some Remarks’ (1979). Основное понятие темпоральной логики в этой работе – интервал, рассматриваемый как самостоятельная сущность, а не как множество моментов времени. Аналогично, для модальной логики в качестве примитива предлагается понятие возможности (possibility), рассматриваемой как самостоятельная сущность, а не как множество возможных миров.

Возможность отличается от возможного мира тем, что она не полностью определена и допускает уточнение (refinement), т.е. дальнейшую спецификацию ее описания путем введения дополнительных условий. Если представлять возможные миры как точки некоторого логического «пространства», то возможности будут областями этого «пространства», причем размер области можно будет уменьшать настолько, насколько это потребуется. Предел такого уменьшения в данном концептуальном каркасе можно называть точкой, но считать (*дополнительное предположение!*), что он никогда не достигается.

*X* (выполняется *π*)

*Y* (выполняется *π* и *ρ*)

*Z* (выполняется *π*, *ρ* и *σ*)

и.т.д. (Ср. с бесточечной геометрией...)

* Философским основанием для такого построения модальной логики может быть антиреализм относительно возможных миров, т.е. утверждение о неправомерности перехода от того, каким *могло бы быть* положение вещей, к тому, каким оно в том или ином смысле *является.* Аналог понятия возможного мира как предела уточнения возможности, который можно здесь получить, является сугубо логическим и свободен от каких-либо онтологических коннотаций.
* Актуальный мир, который, по-видимому, следует все же считать полностью определенной возможностью, при этом реально существующей, не выделяется каким-то специальным образом, поэтому вопрос о статусе его как мира остается не решенным. Однако если не использовать дополнительное предположение, что *всякая* возможность не полностью определена, то возможные миры могут быть введены в модель без негативных последствий.

Задача состоит в том, чтобы показать, как построить на семантике возможностей логику, где будут доказуемы, по крайней мере, основные теоремы классической (и, желательно, модальной) логики.

Все, что требуется, чтобы классическая логика вытекала из семантического подхода, допускающего неопределенности, – это чтобы в неопределенных сущностях, в отношении которых формулы выполняются или не выполняются, можно было разрешить любую данную неопределенность. Нам нужно, чтобы эти элементы всегда можно было сделать более определенными («уточненными», как это называет Хамберстоун), а не чтобы каждый из них был полностью определен.

* Язык логики полностью стандартный!

**Семантика и логика возможностей**

Модель в семантике возможностей – это кортеж <*W*, ⩾, *R*, *V*>, где *W* – непустое множество возможностей, ⩾ и *R* – бинарные отношения на этом множестве, *V* – частичная функция, ставящая в соответствие парам из некоторой метаязыковой пропозициональной переменной и некоторой возможности одно из двух значений истинности (*бинарная логика с неопределенностью!*).

* Отношение *R* играет роль отношения достижимости, как в семантике возможных миров.
* Отношение ⩾ представляет собой отношение уточнения (или дальнейшей спецификации): ‘*X* ⩾ *Y* ’ означает, что *X* уточняет *Y*.
* На *R* не накладывается в связи с его семантикой никаких особых ограничений; от ⩾ требуется, чтобы это было отношение нестрогого частичного порядка (соответствующий строгий порядок обозначается >).

Истинность формулы *π* при возможности *X* в модели <*W*, ⩾, *R*, *V*> обозначается так:

<*W*, ⩾, *R*, *V*>, *X* ⊨ *π.*

Основное условие истинности в модели (*обозначение модели здесь и далее опущено*):

*X* ⊨ *π* е.т.е. *V* (*π*, *X*) = *T*.

* Поскольку *V* – это частичная функция, отрицание можно определить двумя способами: слабым, классическим, и сильным, в интуиционистском стиле. Слабое отрицание означает, что отрицаемая формула не является истинной в модели при данной возможности, сильное же – что она является ложной. Хамберстоун выбирает сильное отрицание, а вместо слабого использует запись ‘*X* ⊭ *π*’.

На модель в целом накладываются два требования: Устойчивость и Уточняемость.

УСТОЙЧИВОСТЬ (Persistance):

Для всякой пропозициональной переменной *π* и всяких *X*, *Y* ∈ *W*, если *V* (*π*, *X*) определено и *X* ⩾ *Y*, то *V* (*π*, *X*) = *V* (*π*, *Y*).

УТОЧНЯЕМОСТЬ (Refinability):

Для всякого *π* и всякого *X*, если *V* (*π*, *X*) не определено, то существуют *Y* и *Z* из *W* такие, что *Y* ⩾ *X* при *V* (*π*, *Y*) = *T* и *Z* ⩾ *X* при *V* (*π*, *Z*) = *F.*

Соответствующее требованию Устойчивости условие истинности для отрицания:

(~) *X* ⊨ ~*α* е.т.е. для всякого *Y* ⩾ *X* выполняется *Y* ⊭ *α.*

Т.е. отрицаемая при данной возможности формула не должна становиться истинной (*но может стать неопределенной!*) при каких-либо уточнениях этой возможности.

Требование Уточняемости представляет собой подвид принципа разделения (principle of subdivision): возможность, в которой не определено значение истинности некоторой формулы, всегда может быть специфицирована так, чтобы неопределенность была снята одним из двух способов – так, чтобы формула стала истинной, и так, чтобы она стала ложной.

Ссылка на *Kamp J. A. W*. ‘Two Theories about Adjectives’ (1975) и *Fine K.* 'Vagueness, Truth and Logic' (1975), где подобный метод используется для вычисления значения неясных выражений (и сформулировано соответствующее требование).

Условие истинности для конъюнкции:

(∧) *X* ⊨ *α* ∧ *β* е.т.е. *X* ⊨ *α* и *X* ⊨ *β.*

Общезначимость формулы определяется как истинность этой формулы при всякой возможности во всякой модели.

Отношение логического следования между формулами *α1* ... *αn* и формулой *β* обозначается так:

*α1* ... *αn* ⊩ *β.*

Запись означает, что при всякой возможности и во всякой модели если истинны формулы *α1* ... *αn*, то также истинна формула *β.*

ЛЕММА 1:

Если *Y* ⩾ *X* и *X* ⊨ *α*, то *Y* ⊨ *α.*

Прямое следствие принципа Устойчивости.

ЛЕММА 2:

Для всякой формулы *α*, *α* общезначима е.т.е. *α* является классической тавтологией.

Доказательство: «Только если» доказывается так. Предположим, что *α* не является классической тавтологией. Пусть тогда *V* одной из копий нашей модели, при какой-то возможности *X*, будет иметь те значения истинности для переменных в *α*, которые в классической пропозициональной логике делают эту формулу ложной. «Если» доказывается отдельно по каждой аксиомной схеме классической пропозициональной логики (замечание: для доказательства того, что modus ponens сохраняет общезначимость, в терминах ‘~’ и ’ ∧’, возможно, требуется Лемма 3 ниже). Указано также, что здесь возможно и семантическое доказательство.

ЛЕММА 3:

Если *X* ⊭ *α*, то для некоторого *Y* ⩾ *X* выполняется *Y* ⊨ ~*α.*

Доказывается индукцией по структуре формулы, с использованием принципа Уточняемости для базового случая.

ЛЕММА 4:

*X* ⊨ ~~*α* е.т.е. *X* ⊨ *α*.

Доказательство: «Если» доказывается как в интуиционистской логике. «Только если» доказываем от противного с использованием Леммы 3. Лемма 4 дана отдельно для удобства, поскольку она является частным случаем Леммы 5.

ЛЕММА 5:

Для всякой формулы *α*1, ... *αn*, *β* выполняется, что *β* является тавтологическим следствием *α*1, ... *αn* е.т.е. *α1* ... *αn* ⊩ *β.*

Доказательство: «Если» доказывается как в части «только если» Леммы 2. «Только если» доказывается так. Пусть (1) *β* является тавтологическим следствием *α*1, ... *αn*, но (2) *α1* ... *αn* ⊮ *β*. (2) означает, что в какой-то модели при некотором *Х* выполняется *X* ⊨*αi* для 1⩽*i*⩽*n*, и при этом *X* ⊮ *β.* Обозначим конъюнкцию *αi*  как *α*. Тогда, согласно (∧), *X* ⊨*α.* Поскольку *X* ⊮ *β*, по Лемме 3, для некоторого *Y* ⩾ *X* выполняется *Y* ⊨ ~*β.* Одновременно, поскольку *X* ⊨*α*, согласно Лемме 1, *Y* ⊨*α*; отсюда *Y* ⊨*α* ∧ ~*β.* Однако из (1) следует, что ~(*α* ∧ ~*β*) является тавтологией, т.е. истинно при всякой возможности во всякой модели, по Лемме 2. Отсюда можно получить *Y* ⊨~(*α* ∧ ~*β*), что противоречит предыдущему выводу.

Лемма 5 означает, что отношение следования в логике возможностей является вполне классическим.

Дизъюнкция и импликация определяются через два основных коннектива обычным способом:

(Def. ∨) *α* ∨ *β* =df ~(~*α* ∧ ~*β*)

(Def. ⊃) *α* ⊃ *β* =df ~(*α* ∧ ~*β*)

Если раскрыть эти определения с помощью (~) и (∧), получим такие условия истинности:

(∨) *X* ⊨ *α* ∨ *β* е.т.е. для всякого *Y* ⩾ *X* или существует *Z1* ⩾ *Y* такое, что *Z1* ⊨ *α*, или существует *Z2* ⩾ *Y* такое, что *Z2* ⊨ *β.*

Или проще:... существует *Z* ⩾ *Y* такое, что *Z* ⊨ *α* или *Z* ⊨ *β*.

(⊃) *X* ⊨ *α* ⊃ *β* е.т.е. для всякого *Y* ⩾ *X*, если *Y* ⊨ *α*, то существует *Z* ⩾ *Y* такое, что *Z* ⊨ *β.*

То, что в правых частях условий фигурирует не *X*, а *Y* и *Z*, является следствием существования неопределенности. Для дизъюнкции очевидно, что так и должно быть: дизъюнкция может быть истинной при такой возможности, при которой ни один из дизъюнктов не является истинным. Для импликации последствия такого задания условий истинности становятся более понятны, если сравнить ее с временно введенным коннективом → со следующими условиями истинности:

(→) *X* ⊨ *α* → *β* е.т.е. *X* ⊭ *α* или *X* ⊨ *β.*

Оказывается, для *α* и *β*, свободных от → (т.е. для формул постоянного языка логики возможностей, на которые действуют уже доказанные леммы), можно доказать, что *α* ⊃ *β* ⊩ *α* → *β*.

Доказательство: Пусть *X* ⊨ *α* ⊃ *β* и *X* ⊭ *α* → *β.* Это означает, что *X* ⊨ *α* и *X* ⊭ *β*; отсюда, согласно Лемме 3, для некоторого *Y* ⩾ *X* выполняется *Y* ⊨ ~*β.* Однако, по Лемме 1, *Y* ⊨ *α*, что противоречит предположению, что *X* ⊨ *α* ⊃ *β*, поскольку *Y* является таким уточнением *X*, у которого нет ни одного дальнейшего уточнения, верифицирующего *β.*

Однако обратное неверно; к тому же → может приводить к нарушениям Устойчивости.

В качестве контрпримера берется α с неопределенными значениями истинности (при валюации *V*) пропозициональных переменных при возможности *X* и *β* с такими пропозициональными переменными, что *V* (*β*, *Y*) = *F* для всех *Y* в модели. Тогда *X* ⊨ *α* → *β* и в то же время *X* ⊭ *α* ⊃ *β.*

Т.е. коннектив ⊃ лучше.

Также можно сравнить импликацию по Хамберстоуну с импликацией в интуиционистском стиле:

(⇒) *X* ⊨ *α* ⇒ *β* е.т.е. для всякого *Y* ⩾ *X*, если *Y* ⊨ *α*, то *Y* ⊨ *β.*

Оказывается, что их условия истинности эквивалентны.

То, что *α* ⊃ *β* ⊩ *α* ⇒ *β*, следует из рефлексивности ⩾. Обратное доказывается от противного. Из существования *Y* ⩾ *X* такого, что *Y* ⊨ *α* и *Y* ⊭ *β*, согласно Лемме 3, следует, что для некоторого *Z* ⩾ *Y* выполняется *Z* ⊨ ~*β*; и одновременно, согласно Лемме 1, следует *Z* ⊨ *α.* По транзитивности ⩾, *Z* является таким уточнением *X*, при котором *α* истинно, но ни при каком его дальнейшем уточнении не истинно *β*, т.е. *Z* ⊭ *α* ⊃ *β*.

Таким образом, для импликации, использующейся в постоянном языке логики возможностей, можно взять это, более простое условие истинности.

**Модальности**

Модальный оператор □ вводится с обычным значением и условиями истинности:

(□) *X* ⊨ □*α* е.т.е. для всякого *Y* ∈ *W* такого, что *RXY*, выполняется *Y* ⊨ *α*.

Очевидно, что на расширенный с помощью модального оператора язык должна распространяться Лемма 1. Для индуктивных случаев, включающих применение оператора □, нужно убедиться, что этот оператор, по крайней мере, когда он применяется к устойчивой формуле, дает устойчивую формулу. Это гарантируется посредством наложения на модели трех условий:

(P1) для всяких *X*, *X'* и *Y*, если *X'* ⩾ *X* и *RX'Y*, то *RXY*;

(P2) для всяких *X*, *Y* и *Y'*, если *Y'* ⩾ *Y* и *RXY*, то *RXY'*;

(R) для всяких *X*, *Y*, если *RXY*, то для некоторого *X'* ⩾ *X* выполняется *R+X'Y*,

где запись ‘*R+X'Y* ’ является сокращением для записи ‘для всякого *X''* ⩾ *X'* выполняется *RX''Y* ’.

Условие (R) представляет собой модальный аналог Леммы 3 в том смысле, что оно гарантирует глобальное соблюдение принципа Уточняемости.

Показано, почему нельзя принять вместо (R) более простое условие (R\*)

(R\*) для всяких *X*, *Y*, если *RXY*, то *R+XY.*

□*α α*

□~*α*

Предположение построения: *X* ⊨ □*α* ∨ □~*α.*

Имея условия (P1), (P2) и (R), можно дополнить доказательства лемм 1-5 индуктивными случаями, включающими □. (Леммы 2 и 5 понимаются при этом так, что понятия тавтологии и тавтологического следствия применяются – путем подстановки – к формулам, содержащим □).

ТЕОРЕМА (Soundness & Completeness):

Формула является общезначимой е.т.е. она доказуема в системе *K*.

Доказательство: «Только если» (Soundness) доказывается отдельно (1) для тавтологий и их подстановочных случаев (аксиомных схем) и (2) для принципа *K*, т.е. для формул вида □(*α* ⊃ *β*) ⊃ (□*α* ⊃ □*β*). Первое очевидным образом следует из Леммы 2; второе доказывается от противного. Пусть в какой-то модели <*W*, ⩾, *R*, *V*> и при какой-то возможности *X*⊭ □(*α* ⊃ *β*) ⊃ (□*α* ⊃ □*β*). По Леммам 1 и 3, для некоторого *X'* ⩾ *X* выполняется *X'* ⊨ □(*α* ⊃ *β*) и одновременно *X'* ⊨ □*α* и *X'* ⊭ □*β*. Тогда, согласно (□), для некоторого *Y* такого, что *RX'Y*, выполняется *Y* ⊭ *β.* Но также, согласно (□), *Y* ⊨ *α* ⊃ *β* и *Y* ⊨ *α*, что невозможно. Также можно в общем виде показать, что оба правила вывода (modus ponens и правило нецесситации) сохраняют общезначимость.

«Если» (Completeness) доказывается с помощью соображения, что любая модель Крипке <*W*, *R*, *V*> может быть переведена в эквивалентную модель Хамберстоуна посредством задания условия *X* ⩾ *Y* е.т.е. *X* = *Y.* Можно убедиться, что в этой вырожденной модели выполняются условия (P1), (P2) и (R).

Здесь доказательство полноты опирается на уже имеющееся доказательство полноты системы *K* относительно класса моделей Крипке, однако указано, что можно также «напрямую» доказать полноту *K* относительно класса моделей Хамберстоуна.

Ссылка на *Röper P.* ‘Intervals and Tenses’ (1989), где используется основной аппарат, необходимый для доказательства.

Модальный оператор ◊ определяется через □:

(Def. ◊) ◊*α* =df ~□~*α*.

Распаковав данное определение, получим следующее условие истинности:

(◊) *X* ⊨ ◊*α* е.т.е. для всякого *X'* ⩾ *X* существует *Y* такой, что *RX'Y* и существует *Y'* ⩾ *Y* такой, что *Y'* ⊨ *α.*

Снова, чтобы увидеть последствия такого задания условий истинности, можно сравнить свойства ◊ и временно введенного оператора *M* со следующими условиями:

(M) *X* ⊨ *Mα* е.т.е. для некоторого *Y* такого, что *RXY*,выполняется *Y* ⊨ *α.*

Оказывается, что ◊*α* ⊩ *Mα*.

Доказательство: Пусть *X* ⊨ ◊*α*; тогда, по (◊), из всякого уточнения *X* достижим *Y* такой, что существует *Y'* ⩾ *Y* такой, что *Y'* ⊨ *α.* Но *X* является своим собственным уточнением, поэтому из него также достижим *Y*, имеющий уточнение *Y'*, которое верифицирует *α.* Отсюда, согласно (P2), *Y'* также достижим из *X*, а значит, *X* ⊨ *Mα.*

Однако обратное неверно; к тому же *M* может приводить к нарушениям Устойчивости.

Чтобы увидеть это, достаточно наблюдения, что формулы вида *Mα* не являются (в общем) устойчивыми, поскольку чтобы заключить от истинности *Mα* при некотором *X* к истинности *Mα* при *X'* ⩾ *X*, мы должны быть уверены, что из *X'* достижим всякий элемент, достижимый из *X.* Однако, рассматривая условие (R\*), мы показали, что это в общем неверно.

Т.е. оператор ◊ лучше.

Указано, что (R\*), тем не менее, будет выполняться тогда, когда на *R* будет наложено дополнительное условие симметричности. Обычно мы получаем симметричное отношение достижимости (и соответствующую ему логику KB), принимая дополнительную аксиомную схему:

(B) *α* ⊃ □◊*α*.

В логике возможностей мы можем получить систему, отношение следования в которой будет эквивалентно отношению следования в KB, если наложим на модель дополнительное условие:

(\*) Если *R+XY* и *Y'* > *Y*, то *R+XY'.*

Таким образом, в семантике возможностей могут интерпретироваться логики KB, B и S5.

В целом, если смириться с теми сложностями, которые создаются необычным подходом к отрицанию в семантике возможностей, эта семантика может быть не менее полезным теоретико-модельным основанием для модальной логики, чем обычная семантика возможных миров.

**Дополнение**

А. ПРОПОЗИЦИИ:

В семантике возможных миров пропозиции моделируются как множества миров. В семантике возможностей можно поступать аналогичным образом, заменяя миры на возможности. Однако этот теоретико-множественный аппарат подводит нас, когда мы рассматриваем пропозиции как объекты пропозициональных установок.

В качестве альтернативы предлагается считать пропозиции не множествами возможностей, а самими возможностями. Продолжая геометрическую аналогию, за пропозицию, выражающую некоторое *α*, принимается максимальная область логического «пространства», на которой *α* истинно (в случае противоречивого *α* эта область будет пустой). На множестве таких областей можно определить мереологические операции пересечения, объединения (в этом контексте оно обычно называется смешением) и дополнения, как в случае отношений типа «часть – целое» обычных пространственных областей или физических объектов. Если принять дополнительное предположение, что точек нет (!), то множество областей с операциями на нем будет определять безатомную булеву алгебру.

Замечание: нужно будет тогда аккуратно сформулировать понятие уточнения, чтобы оно было взаимно-определяемым с соответствующими булевыми операциями. В частности, надо учитывать, что области могут быть пустыми.

Если обозначить пропозицию, выражаемую *α*, как [[*α*]], то, согласно этому подходу, *α* будет истинно при *X* е.т.е. *X* ⩾ [[*α*]]; [[*α* ∧ *β*]] будет равно [[*α*]] ∩ [[*β*]]; [[~*α*]] будет дополнением [[*α*]] и.т.д.

В. УБЕЖДЕНИЯ:

Проблема подхода к моделированию убеждений (и в целом пропозициональных установок) в семантике возможных миров состоит именно в том, что миры полностью определены, и если какой-то мир принимается за доксастически достижимый, и в этом мире истинно некоторое *α*, считается, что агент убежден в *α.* Однако можно быть убежденным, например, в дизъюнкции двух пропозиций, не будучи убежденным ни в одной из них по отдельности. Эту ситуацию семантика возможных миров не способна адекватно описать.

Семантика возможностей избавляет от такой излишней определенности. Весь аппарат семантики возможных миров, который используется для моделирования убеждений, переводится в семантику возможностей, нужно только ввести способ выделения «доксастически возможных» возможностей вместо стандартного отношения достижимости и определить соответствующим образом значение доксастического оператора. Если обозначить область таких возможностей как *B*, должно получиться:

*X* ⊨ *Bα* е.т.е. *B* ⊨ *α*,

где *B* – доксастический оператор со стандартными свойствами.

Ссылка на *Barwise J.* 'Scenes and Other Situations' (еще не опубликована), где используется подобный подход к моделированию перцептивной установки (вúдения).

Также упоминается, что логика для алетических модальностей может быть построена в соответствии с теми же принципами, которые предлагаются для доксастической логики возможностей. Тогда в качестве модели мы будет иметь <*W*, ⩾, *V*>, а условия истинности для оператора □ будут такими:

𝓜 *X* ⊨ □*α* е.т.е. 𝓜 ∪*W* ⊨ *α*,

где ∪*W –* объединение всех возможностей из *W*, а 𝓜 – любая модель такого вида.

Замечание: Если понимать под *W* не множество областей, а саму область, соответствующую полностью неспецифицированной возможности, то ‘∪*W*’ следует заменить на ‘*W*’.

В этом случае оператор возможности ◊ совпадет в своих свойствах с временно введенным выше оператором *M*, и мы получим логику типа S5.