УДК: 164.3
DOI: 10.15372/PS20250505
EDN: RDQKOX

И.И. Борисова

ТАБЛИЧНАЯ ТЕОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ДЛЯ ГИБРИДНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В данной статье излагается язык, семантика и теория доказательств для гибридной модальной логики первого порядка, решающей проблему кросс-мировой квантификации.

Ключевые слова: гибридная логика, кросс-мировая квантификация, модальная логика первого порядка, табличная теория доказательств.

I.I. Borisova

A TABLE PROOF THEORY FOR FIRST-ORDER HYBRID MODAL LOGIC

Thi*s* article de*s*cribe*s* the language, *s*emantic*s*, and proof theory for fir*s*t-order hybrid modal logic, which *s*olve*s* the problem of cro*ss*-world quantification.

Key words: hybrid logic, fir*s*t-order modal logic, table proof theory.

Введение

Одна из задач аналитической философии языка – логическая формализация естественного языка и логическое моделирование рассуждений на естественном языке. Одной из проблем в этой области является формализация предложений, содержащих *кросс-мировую квантификацию* (см. [3]), например, «*Придет день, когда каждый, кто сегодня лыс, будет поэтом*»[1]. Эту мысль нельзя выразить формулой на языке стандартной модальной логики первого порядка (например, в модальной логике первого порядка как в [2]). Чтобы решить эту проблему требуется некоторым образом модифицировать стандартную модальную логику первого порядка.

Коцурек в [3] показывает, как с проблемой кросс-мировой квантификации справляется гибридная логика H[2]. В данной статье представлен упрощенный вариант гибридной логики H Коцурека, гибридная логика HQ, которая также справляется с проблемой кросс-мировой квантификации. В последнем разделе статьи будет представлена табличная теория доказательств для HQ.

Постановка проблемы

Рассмотрим предложение с кросс-мировой квантификацией:

Придет день, когда каждый, кто сегодня лыс, будет поэтом. (*)

Полуформально, истинностные условия, выражаемые в этом предложении, выглядят так: допустим, мы начинаем оценку формулы в мире w, тогда есть мир u, достижимый из мира w, такой что, каждый из мира w, кто в w лыс, в мире u – поэт. Формально[3] это выражается следующим образом:

$$\exists u\,(wRu\ \&\ \forall e\,(e \in d\,(w) \Rightarrow (e \in I\,(B, w) \Rightarrow e \in I\,(P, u)))). \qquad (1)$$

В модальной логике первого порядка (*) не формализуется. Продемонстрируем это на двух примерах попыток такой формализации.

---

[1] Аналогичный пример («*Under certain circumstances, everybody who is rich would have been poor*») можно найти у Вемайера [4].

[2] Общую характеристику гибридных логик можно найти у Браунера [1].

[3] Подробное описание формализма будет представлено ниже. На данный момент ограничусь следующими объяснениями: мы рассматриваем семантику Крипке для модальной логики превого порядка с переменным доменом модели, в которой на отношение достижимости (R) не накладывается ограничений. Используются следующие обозначения: w, u – миры, B, P – предикаты, I – интерпретация и для любого w, $d(w)$ – домен w.

Попытка 1. $\Diamond\forall x\ (Bx \rightarrow Px)$

Полуформальные истинностные условия этой формулы выглядят так: есть возможный мир u, достижимый из мира w, такой что каждый из мира u, кто в u лыс, в u – поэт. Формально они выражаются следующим образом:

$$\exists u\ (wRu \Rightarrow \forall e\ (e \in d\ (u) \Rightarrow (e \in I\ (B, u) \Rightarrow e \in I\ (P, u))) \tag{2}$$

Как видно, недостаточно просто поставить модальный оператор перед квантором, т.к. мы хотим говорить об объектах из мира w, а не из достижимого из него мира, как получается в (2).

Попытка 2. $\forall x\ (Bx \rightarrow \Diamond Px)$

Полуформально, истинностные условия, выражаемые в этом предложении, выглядят так: допустим, мы начинаем оценку формулы в мире w, тогда для любого e в мире w, если e в w лыс, есть мир u, достижимый из w, такой что e в u – поэт. Формально это выражается так:

$$\forall e\ (e \in d\ (w) \Rightarrow (e \in I\ (B, w) \Rightarrow \exists u\ (wRu \,\&\, e \in I\ (P, u)))) \tag{3}$$

Очевидно, что (3) отличается от (1).

Чтобы получить требуемые истинностные условия, нужно в формуле

$$\Diamond\boldsymbol{\forall x\ (Bx}\rightarrow Px)$$

вывести выделенный полужирным курсивом фрагмент из-под действия $\Diamond$. Это можно сделать с помощью средств гибридной логики первого порядка. Причем, для решения указанной проблемы достаточно гибридной модальной логики первого порядка без равенства, констант, лямбда оператора, термового оператора и с одним видом кванторов. Ниже я опишу такую логику, *HQ*.

Логика *HQ*

HQ – упрощенная версия логики *H* Коцурека.

Язык HQ (L).

Алфавит *L*. Множество примитивных символов *L* включает:

- счетное множество индивидных переменных $x, y, z \ldots$ (*VAR*),

- счетное множество переменных для возможных миров s, t, r, … ($SVAR$),
- для каждого натурального $n > 0$ счетное множество n-местных предикатов P, Q, … ($PRED^n$),
- операторы $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$, $\Box$,
- сентенциональные операторы $\downarrow s.$ и $@_s$ ($s \in SVAR$),
- служебные символы: скобки и запятая.

Гибридной данную логику делают операторы $\downarrow s.$ и $@_s$.

Определение (Атомарная формула) Если $P \in PRED^n$, $x_1, \ldots, x_n \in VAR$, то $P(x_1, \ldots, x_n)$ – атомарная формула.

Определение (Формула). Множество формул, определяется следующим образом:

$$\varphi ::= P(x_1, \ldots, x_n) \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \mid \forall x\, \varphi \mid \Box\varphi \mid \downarrow s.\varphi \mid @_s\, \varphi,$$

где $P \in PRED^n$, $x_1, \ldots, x_n \in VAR$, $x \in VAR$, $s \in SVAR$, φ, φ_1, φ_2 – формулы.

Связанные (свободные) вхождения переменных. Для любой $x \in VAR$, вхождение x называется связанным если оно следует непосредственно за $\forall$, т.е. в выражении $\forall x.$ или находится в области действия $\forall$. Для любой $s \in SVAR$, вхождение переменной s называется связанным, если оно следует непосредственно за $\downarrow$, т.е. в выражении $\downarrow s.$ или находится в области действия $\downarrow s.$. Для любой переменной $y \in VAR \cup SVAR$, вхождение y называется свободным, если оно не является связанным.

Далее используются следующие конвенции:

- Внешние скобки в формулах не пишутся. Например, выражение $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ следует читать как формулу $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$.
- & и $\vee$ имеют приоритет перед $\rightarrow$.[1] Например, выражения вида $\varphi \,\&\, \psi \rightarrow \chi$ читаются как $(\varphi \,\&\, \psi) \rightarrow \chi$.

Семантика *HQ*

Определение (Модель HQ (модель)). Модель *HQ* – это пятерка $M = \langle G, R, D, d, I\rangle$, где:

- $G \neq \emptyset$ (множество возможных миров);
- $R \subseteq G^2$ (отношение достижимости);

[1] &, $\vee$, $\Diamond$, $\exists$ определяются стандартным образом.

- $D \neq \emptyset$ (домен модели);
- d (доменная функция) – функция, такая что для любого $w \in G$, $d(w) \subseteq D$ и $d(w) \neq \emptyset$;
- I (интерпретация) – функция, такая что для любого $P \in PRED^n$ и любого $w \in G$, $I(P, w) \subseteq D^n$.

Замечу, что:

- В модели переменный домен (не монотонный и не анти-монотонный).
- Домен модели может быть собственным надмножеством объединения доменов миров модели.
- Предикаты интерпретируются на домене модели, а не на доменах миров.

Определение (Оценка переменных в модели) Пусть $M = \langle G, R, D, d, I\rangle$ – модель. Оценка переменных в M – это функция $g : VAR \cup SVAR \rightarrow D \cup G$, такая что:

- для каждого $x \in VAR$, $g(x) \in D$;
- для любого $s \in SVAR$, $g(s) \in G$.

Пусть $e \in D \cup G$, g – оценка переменных в модели. Тогда $g^e{}_x$ – это оценка переменных в M, такая что для любой переменной y, $g^e{}_x\,(y) = g(y)$, если $y \neq x$ и $g^e{}_x = e$, если $y = x$.

Определение (Истина ($\vDash$)) Пусть $M = \langle G, R, D, d, I\rangle$ – модель, $w \in G$, g – оценка переменных в M, φ и ψ – формулы, $P \in PRED^n$, $x, x_1, \ldots, x_n \in VAR$ и $s \in SVAR$. Тогда:

- $M, w, g \vDash P\,(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \langle V(x_1), \ldots, V\,(x_n)\rangle \in I\,(P, w)$;
- $M, w, g \vDash \neg\, \varphi \Leftrightarrow M, w, g \nvDash \varphi$;
- $M, w, g \vDash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (M, w, g \vDash \varphi \Rightarrow M, w, g \vDash \psi)$;
- $M, w, g \vDash \Box\, \varphi \Leftrightarrow \forall u\,(wRu \rightarrow M, u, g \vDash \varphi)$;
- $M, w, g \vDash \forall x\, \varphi \Leftrightarrow \forall e\,(e \in d(w) \rightarrow M, w, g^e{}_x \vDash \varphi)$;
- $M, w, g \vDash \downarrow s.\varphi \Leftrightarrow M, w, g^w{}_s \vDash \varphi$;
- $M, w, g \vDash @_s\, \varphi \Leftrightarrow M, g(s), g \vDash \varphi$;

$\downarrow s.$ связывает вхождения переменной s и делает мир оценки денотатом s. При оценке $@_s\, \varphi$ оператор $@_s$ «переносит» нас из мира оценки в мир, который является денотатом s.

Пример. Распишем истинностные условия формулы $M, w, g \vDash \downarrow s.\Diamond @_s\, \varphi$.

$M, w, g \vDash \downarrow s.\Diamond @_s\, \varphi \Leftrightarrow M, w, g^w{}_s \vDash \Diamond @_s\, \varphi$ (на этом шаге мир w объявляется денотатом переменной s)

$M, w, g^w{}_s \vDash \Diamond @_s\, \varphi \Leftrightarrow \exists u\, (wRu\ \&\ M, u, g^w{}_s \vDash @_s\, \varphi)$ (на этом шаге обрабатывается оператор возможности и далее мы оцениваем формулу $@_s\, \varphi$ в мире, который достижим из w)

$\exists u\, (wRu\ \&\ M, u, g^w{}_s \vDash @_s\, \varphi) \Leftrightarrow \exists u\, (wRu\ \&\ M, g^w{}_s(s), g^w{}_s \vDash \varphi)$ (на этом шаге оператор $@_s$ «переносит» нас в $g^w{}_s(s)$, т.е. в w, и мы оцениваем формулу φ в w)

$\exists u\, (wRu\ \&\ M, g^w{}_s(s), g^w{}_s \vDash \varphi) \Leftrightarrow \exists u\, (wRu\ \&\ M, w, g^w{}_s \vDash \varphi)$.

Определение (Общезначимость). Формула φ называется общезначимой, если для любой модели $M = \langle G, R, D, d, I\rangle$, любой оценки переменных g в M и любого $w \in G$, $M, w, g \vDash \varphi$.

Решение проблемы

Нам нужно было в формуле

$$\Diamond\, \boldsymbol{\forall x(Bx \rightarrow} Px)$$

вывести выделенный полужирным курсивом фрагмент из-под действия $\Diamond$, т.е. выразить следующие истинностные условия:

$\exists u\, (wRu\ \&\ \forall e(e \in d(w) \rightarrow (e \in I(B, w) \rightarrow e \in I(P, u))))$ (1)

Искомая формализация (средствами логики HQ):

$\downarrow s.\Diamond\downarrow t.@_s\forall x\, (B(x) \rightarrow @_t\, P(x))$ (4)

Ограничусь неформальным обоснованием того, что (4) действительно выражает истинностные условия (1). Мы начинаем оценку в мире w, и оператор $\downarrow s.$ связывает переменную для возможных миров s с миром w. После этого оператор возможности переносит нас в мир u, а оператор $\downarrow t.$ связывает переменную для возможных миров t с миром u. После этого $@_s$ возвращает нас в мир w и про все объекты из домена мира w, мы говорим, что, если они лысы в w, то они являются поэтами в мире u (в мир u нас переносит $@_t$).

Теория доказательств

В этом разделе будет изложена табличная теория доказательств *HQ*.

В деревьях *HQ* формулы снабжены префиксами – конечными последовательностями целых положительных чисел (например, 1, 2.3, 14.48.1). Префикс $\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle$ будем записывать как $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Например, ⟨14, 48, 1⟩ будем записывать как 14.48.1.

Язык *L*', на котором будут строиться деревья, расширен относительно языка *L* за счет того, что к переменным ($VAR \cup SVAR$) можно добавлять префиксы в квадратных скобках справа, например, $x[1]$, $s[2.13]$($x \in VAR$, $s \in SVAR$). Переменные с префиксами в квадратных скобках являются переменными языка *L*' наряду с элементами *VAR* и *SVAR*.

В деревьях *HQ* используются отмеченные формулы с префиксами, т.е. формулы с префиксом и с меткой + или − (например, $\sigma\, P(x) \vee\neg\, Q(x)$ + – это $\sigma\, P(x) \vee\neg\, Q(x)$ с меткой +).

Определение (Замкнутая ветка). Ветка дерева называется замкнутой, если она содержит $\sigma\ \psi$ + и $\sigma\ \psi$ −, где σ – префикс, ψ – некоторая формула. Незамкнутая ветка называется открытой.

Определение (Замкнутая дерево). Замкнутое дерево – дерево, каждая ветка которого замкнута.

Определение (Доказательство формулы φ (доказательство)). Доказательство формулы φ – это замкнутое дерево, которое начинается с 1 φ −; последующие формулы добавляются по правилам, которые будут приведены ниже.

Нотационная конвенция. Для любой формулы φ, любого $x \in VAR \cup SVAR$ и любой переменной y языка *L*', $\varphi^y{}_x$ – результат замены всех свободных вхождений переменной x вхождениями y (с переименованием связанных переменных, если x – переменная, и некоторые свободные вхождения x в φ лежат в области действия $\forall y$ или $\downarrow y.$).

Правила табличного доказательства

В правила табличного доказательства входят правила для пропозициональной логики, правила для модальных операторов, кванторов и гибридных операторов. Если не указано иное, правило может быть применено к формуле только один раз на ветке.

Правила для →

$$\frac{\sigma\,\psi \to \chi\, +}{\sigma\,\psi - \mid \sigma\,\chi\, +} \qquad \frac{\sigma\,\psi \to \chi\, -}{\sigma\,\psi +, \sigma\,\chi\, -}$$

Знак «|» между формулами означает разветвление.

Правила для $\neg$

$$\frac{\sigma \neg \psi +}{\sigma \psi -} \qquad \frac{\sigma \neg \psi -}{\sigma \psi +}$$

Правила для $\Box$

1) Если префикс $\sigma .n$ уже встречался на ветви, то

$$\frac{\sigma \Box \psi +}{\sigma.n\ \psi +}$$

Префикс $\sigma.n$ должен встречаться на ветке выше. Правило может быть применено к $\sigma \Box \psi +$ и к $\sigma \Diamond \varphi -$ многократно – один раз для каждого префикса $\sigma.n$, встречающегося на ветке.

2)

$$\frac{\sigma \Box \psi -}{\sigma.n\ \psi -}$$

где $\sigma.n$ – новый для ветки префикс.

Правила для $\forall$

1) Для любой переменной $y[\sigma]$,

$$\frac{\sigma\ \forall x\ \psi(x) +}{\sigma\ \psi(y[\sigma]) +}$$

Правило может быть применено к $\sigma\ \forall x\ \psi(x) +$ и к $\sigma\ \exists x\ \psi(x) -$ более одного раза – один раз с каждой переменной $y[\sigma]$, вне зависимости от того встречалась она на ветке или нет.

2)

$$\frac{\sigma\ \forall x\ \psi(x) -}{\sigma\ \psi(y[\sigma]) -}$$

где $y[\sigma]$ – новая для ветки переменная.

Правила для $\downarrow$

$$\frac{\sigma \downarrow s.\ \psi +}{\sigma\ \psi^{s[\sigma]}{}_{s} +} \qquad \frac{\sigma \downarrow s.\ \psi -}{\sigma\ \psi^{s[\sigma]}{}_{s} -}$$

Правила для @

$$\frac{\sigma\ @_{s[\tau]}\ \psi\ +}{\tau\ \psi +} \qquad \frac{\sigma\ @_{s[\tau]}\ \psi\ -}{\tau\ \psi -} \qquad \frac{\sigma\ @_{s}\ \psi\ +}{\delta\ \psi +} \qquad \frac{\sigma\ @_{s}\ \psi\ -}{\delta\ \psi -}$$

где δ – новый для ветки префикс формы $\langle n\rangle$, где n – натуральное число.

Пример. Построим доказательство формулы $@_t\ (P(x) \to {\downarrow} s.\Box @_s\ P(x))$

1	$@_t(P(x) \to {\downarrow} s.\Box @_s\ P(x))\ -$	1
2	$P(x) \to {\downarrow} s.\Box @_s\ P(x)\ -$	2(1)
2	$P(x)\ +$	3(2)
2	${\downarrow} s.\Box @_s\ P(x)\ -$	4(2)
2	$\Box @_{s2}\ P(x)\ -$	5(4)
2.1	$@_{s2}\ P(x)\ -$	6(5)
2	$P(x)\ -$	7(6)

Это замкнутое дерево, т.к. единственная его ветка замкнута.

Примечание. Числа в правом столбце означают номер формулы и (номер формулы, из которой она получена). Например, «4(2)» значит, что четвертая формула получена из второй.

Заключение

В статье показано, как логика *HQ* решает проблему формализации предложений с кросс-мировой квантификацией. Для данной логики справедлива следующая теорема:

Теорема. Для любой формулы φ, φ доказуема тогда и только тогда, когда φ общезначима.

Доказательство данной теоремы выходит за рамки статьи.

Литература

1. *Braüner, T.* Hybrid Logic and its Proof-Theory. Dordrecht and New York: Springer, 2010.

2. *Fitting M.* First-order modal logic. Second edition / M. Fitting, R.L. Mendelsohn. – Springer Cham, 2023.

3. *Kocurek, A. W.* The problem of cro*ss*-world predication. // Journal of Philo*s*ophical Logic. 2016. № 45 (6). P. 697–742.

4. *Wehmeier, K. F.* Subjunctivity and cross-world predication. // Philosophical Studies. 2012, Vol. 159.P. 107–122.

Reference*s*

1. *Braüner, T.* (, 2010) Hybrid Logic and its Proof-Theory. Dordrecht and New York: Springer.

2. *Fitting M.* (2023) Fir*s*t-order modal logic. Second edition / M. Fitting, R.L. Mendel*s*ohn. – Springer Cham.

3. *Kocurek, A. W.* (2016) The problem of cro*ss*-world predication. // Journal of Philo*s*ophical Logic. № 45 (6). P. 697–742.

4. *Wehmeier, K. F.* (2012) Subjunctivity and cross-world predication. // Philosophical Studies. Vol. 159.P. 107–122.

Информация об авторе

Борисова Индира Искандаровна – Национальный исследовательский Томский государственный университет (634050, г. Томск, проспект Ленина, 36).

i.borisova2@g.nsu.ru

Information about the author

Borisova Indira Iskandarovna – Tomsk State University (36, prospect Lenina, Tomsk, 634050, Russia).

i.borisova2@g.nsu.ru

Дата поступления 22.05.2025
Принята к печати 11.12.2025