Проблемы логики и методологии науки

УДК 165.0+167.7+168.3
DOI: 10.15372/PS20240104
EDN PZKEDV

Л.Д. Ламберов

ТРИ ВИДА ОБОЗРИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА[*]

В статье рассматриваются три вида обозримости: глобальная, локальная и «мезоскопическая». Обсуждение обозримости связывается с компьютерными доказательствами. Третий вид обозримости, «мезоскопическая» обозримость, предполагает схватывание элементарных шагов доказательства в группе и опирается на геометрическую интуицию. Также геометрическая интуиция играет важную роль в концепции строгости как локальной общезначимости. В статье сравниваются «мезоскопическая» обозримость и концепция строгости как локальной общезначимости.

Ключевые слова: доказательство; обозримость; строгость; формализация; математика; интуиция

L.D. Lamberov

THREE TYPES OF SURVEYABILITY OF MATHEMATICAL PROOF

The article examines three types of surveyability: global, local and “mesoscopic”. The discussion of surveyability relates to computer proofs. The third type of surveyability, viz. “mesoscopic” surveyability, involves grasping the elementary steps of a proof in a group and relies on geometric intuition. Also, geometric intuition plays an important role in the concept of rigor as local validity. The article compares “mesoscopic” surveyability and the concept of rigor as local validity.

Keywords: proof; surveyability; rigor; formalization; mathematics; intuition

---

[*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-01420 (https://rscf.ru/project/22-28-01420/).

I

Обозримость математических доказательств является одной из наиболее обсуждаемых характеристик, внимание к которым было привлечено распространением компьютерных доказательств. В современном контексте вопросы характеристик математического доказательства начинают активно обсуждаться с 1970-х годов, когда было публично представлено и опубликовано в научной литературе компьютерное доказательство теоремы о четырех красках [7; 9]. Особое внимание на характеристики доказательства (и в частности, на обозримость) обратил Т. Тимошко [19]. С точки зрения Т. Тимошко, математическое доказательство в его традиционном понимании обладает следующими характеристиками [19, p. 59]: 1) оно убедительно (т.е. служит средством формирования убеждения у когнитивного агента); 2) оно обозримо (т.е. когнитивный агент может проверить доказательство, как бы построив его заново); 3) оно формализуемо (т.е. может быть представлено в строгом виде на формальном языке) [6].

Между указанными характеристиками доказательства имеется определенная зависимость [5]. Убедительность доказательства зависит от его обозримости и формализуемости, правда, в разной степени. Другими словами, если доказательство необозримо, то оно вряд ли может быть убедительным. Если доказательство необозримо, то когнитивный агент не имеет возможности его проверить, а значит, может лишь принять на веру (например, если доказательство принимается авторитетным сообществом). В меньшей степени убедительность доказательства зависит от его формализуемости, так как, во-первых, для формализации могут потребоваться специфические формальные средства, недоступные когнитивному агенту в некоторый текущий момент времени, а во-вторых, формализованное доказательство [4] может оказаться слишком длинным в силу своей подробности и недостаточной выразительности средств формализации.

Теорема о четырех красках (в ее упрощенной формулировке) утверждает, что для раскрашивания любой (нормальной) карты так, чтобы любые две соседние страны, имеющие общую границу, были раскрашены разными цветами, достаточно четырех разных цветов. Доказательство теоремы К. Аппеля и В. Хакена, полученное при содействии Дж. Коха [7; 9], не является обозримым. В доказательстве определяются понятие нормальной карты (может быть преобразована в граф) и неизбежный набор ее конфигураций. Далее дается доказательство сводимости карты с произвольным числом стран к такому набору с меньшим числом стран, для которого необходимо то же количество разных цветов. В своем доказательстве К. Аппель и В. Хакен выделили и проанализировали около 2000 конфигураций (в дальнейшем их число было снижено до 1482). Доказательство дается индукцией по числу вершин графа («столиц» политической карты; ребра графа проводятся между «столицами» соседних «стран»), показывается, что некоторая конфигурация является неизбежной (любая карта содержит хотя бы одну неизбежную конфигурацию). Для машинной части доказательства потребовалось более 1200 часов машинного времени (на трех разных машинах), ручная ее проверка, согласно авторам, невозможна [8, p. 121].

Ситуацию с теоремой о четырех красках Т. Тимошко [19] сравнивает с предлагаемым им мысленным экспериментом с марсианской математикой и гениальным марсианином Саймоном. Саймон заработал себе достаточно высокий авторитет в марсианском математическом сообществе и теперь может просто пророчествовать по поводу математических истин. Все, что бы он ни говорил о математике, воспринимается марсианами как абсолютная истина. Если Саймон сказал, что гипотеза Гольдбаха верна, то она принимается в качестве верной без какого-либо доказательства. Сам Саймон обладает, может быть, особым чувством, позволяющим распознавать математические истины, и в доказательствах не нуждается. Выполняя роль оракула, в контексте убедительности математических результатов Саймон мало чем отличается от вычислительной машины. Машине, получающей доказательство некоторого математического утверждения, превосходящее границы обозримости человеческих математиков, можно только слепо доверять. Это доказательство нелья обозреть, проверить на правильность, поэтому такая машина играет роль математического оракула. Тем не менее компьютеры созданы людьми, и их работа вполне объяснима, а поскольку компьютерные доказательства структурно от математических доказательств не отличаются, постольку они не являются пророчествами. Проверка компьютерных доказательств возможна, но требует слишком больших ресурсов, способностей и времени, а потому людям недоступна. Кроме того, доказательства даже в неформализованном виде могут быть слишком длинными: например, доказательство теоремы Робертсона – Сеймура [15; 16] из теории графов опубликовано в виде серии из 20 статей общим объемом почти в 600 страниц.

В случае компьютерных доказательств можно либо принять необозримые доказательства как вполне математические, утверждая, что обозримость не является необходимой характеристикой доказательства, либо сохранить обозримость как необходимую характеристику доказательства и отказать компьютерным (необозримым) доказательствам в статусе математических доказательств. С одной стороны, кажется, что доказательства должны обладать обозримостью, так как она обеспечивает возможность проверки, что, собственно, и делает доказательства убедительными в тех случаях, когда используемые в них рассуждения понятны и не вызывают сомнений, а проверка не выявляет ошибок. С другой стороны, математики, как и вообще любые люди, обладают ограниченными когнитивными способностями, ограничения которых просто не позволяют выполнить проверку слишком обширных или сложных (например, в смысле количества несводимых друг к другу правил вывода) доказательств. Безусловно, можно вслед за П. Теллером [18] утверждать, что обозримость свойственна человеческой математике, но не математике вообще. В таком случае компьютерные доказательства следовало бы принять в качестве вполне математических, однако насколько адекватно можем мы, будучи людьми, оценить, какова математика вообще, безотносительно к людям с их огранченными когнитивными способностями?

II

Рассматривая понятие промежуточного шага доказательства и идею непрерывности мышления у новоевропейских философов (Ф. Бэкона, Р. Декарта и Дж. Локка), Б. Бэсслер [10] предлагает выделять два вида обозримости математического доказательства: глобальную обозримость и локальную обозримость. Первый вид соответствует пониманию доказательства в целом, его структуры и общей идеи, а второй – пониманию переходов между отдельными шагами, интуитивному постижению и распознаванию случаев применения правил вывода. Что касается уже упомянутой теоремы о четырех красках, необходимо отметить, что ее доказательство обладает глобальной обозримостью. Общая идея доказательства понятна, в нем можно выделить (довольно обширные) составные части, связи между этими частями тоже вполне ясны. Однако это доказательство не обладает локальной обозримостью, так как проследить (и, соответственно, понять) каждый переход от одного элементарного шага к другому для человека не представляется возможным. Количество шагов слишком велико, а количество применяемых правил вывода (около 500 разных правил) кажется чрезмерным, для того чтобы какой-то отдельно взятый человек мог ими эффективно оперировать.

Помимо указанных двух видов обозримости, глобальной и локальной, можно выделить еще «мезоскопическую» обозримость [3; 17]. Этот вид обозримости предполагает понимание элементарных шагов в группе. Такое понимание является чем-то сродни геометрической интуиции [2] и обеспечивается в случае гомотопической теории типов и ее реализации в виде интерактивного средства для доказательства теорем. Запись доказательства и его проверка с помощью такого компьютерного средства приводят к тому, что код доказательства тесно ассоциируется с соответствующими ему пространственными интуициями. При условии использования таких формализмов (в частности, гомотопической теории типов) у записывающего и читающего доказательство появляется возможность рассмотреть «скрытые» при других подходах части доказательства. К примеру, доказательство теоремы о четырех красках, полученное Ж. Гонтье даже без обращения к гомотопической теории типов, но в рамках системы Coq, реализующей исчисление коиндуктивных построений, позволяет перевести часть вычислений (деревья комбинаторного поиска) в явные фрагменты доказательства [14]. Соответственно, эти части перестают быть «черным ящиком» и оказываются обозримыми. Однако обращение к гомотопической теории типов (например, к еще только развивающейся системе hCoq) позволит сделать вычисления не только явными, но и интуитивно понятными в смысле геометризма (т.е. с опорой на пространственную интуицию).

III.

Косвенным образом наблюдение относительно «мезоскопической» обозримости можно подтвердить путем обращения к концепции строгости как локальной общезначимости [1]. Традиционно строгость понимается как абсолютная строгость в смысле логического следования, когда мы говорим, что доказательство необходимо по той причине, что оно сформулировано на формальном языке и представляет собой доказательство в логическом смысле, т.е. оно общезначимо. В случае же строгости как локальной общезначимости предполагается, что доказательство не является полностью формализованным, а пробелы в нем заполняются благодаря интуитивным манипуляциям с математическими объектами. Это в первую очередь характерно для топологии и проясняется авторами концепции строгости как локальной общезначимости на примере теории узлов [12].

Благодаря способности к «манипулятивному воображению» строящий или читающий доказательство может представлять себе различные манипуляции. Например, манипуляции над объектами из теории узлов могут быть представлены как действия по оборачиванию веревок вокруг своего тела. Доказательство при таком подходе являет собой упорядоченный набор «рисунков», переход между которыми осуществляется в соответствии со строго определенным набором разрешенных эпистемических действий. Рассматривая в качестве примера доказательство теоремы Александера (всякий узел или любое зацепление могут быть представлены как замкнутая коса), С. Де Тоффоли и В. Джардино обосновывают вывод, что «суть доказательства состоит в определении правильных трансформаций, позволяющих нам найти ось, вокруг которой узел вращается только в одном направлении… лишь с помощью визуализации нам известно, что эта трансформация дает нам изотопический узел, а нашей интуиции остается доказать, что эта трансформация всегда возможна и что это не бесконечный процесс» [12, p. 44].

При этом проводимые над представляемыми образами математических объектов операции подчиняются правилам, которые предварительно должны быть усвоены путем работы с формальным аппаратом. Другими словами, формальные преобразования, выполняемые в рамках построения формализованного доказательства, соответствуют правилам «манипулятивного воображения», вырабатываемым путем особого рода математической тренировки и замещающим в воображении манипуляции над формализованными конструкциями. Действия, составляющие такое топологическое доказательство, «основываются на некоторой форме воображения, использующей уже имеющиеся когнитивные способности, связанные с манипуляцией над конкретными пространственно-временными объектами и усиленные специальными математическими знаниями» [12, p. 44]. Таким образом, доказательства оказываются контекстно зависимыми, так как они связываются со стандартами текущей математической практики.

Иногда доказательства принимаются сообществом даже в том случае, когда они содержат ошибки или пробелы. К примеру, доказательство основной теоремы алгебры [13] К.Ф. Гауссом было дано несколько раз (другие математики тоже давали свои варианты доказательства этой теоремы), причем первое принятое математическим сообществом доказательство было опубликовано им в 1799 г. и содержало пробелы и ошибки. В качестве другого примера можно указать лемму Дена из трехмерной топологии, доказательство которой, опубликованное в 1910 г., было принято сообществом, но в итоге оказалось, что оно содержит пробел (этот пробел был восполнен только в 1957 г.). Также Б. Дэйвис [11] описывает ситуацию, когда во время лекции у одного из присутствующих студентов возникли сомнения в обобщенной теореме Мерсера, для которой действительно не было опубликованного доказательства, но математики, являющиеся специалистами в этой области, понимали, *как* это доказательство может быть тривиальным образом получено.

Другими словами, концепция строгости как локальной общезначимости позволяет объяснить, каким образом контекстно (исторически) зависимые стандарты и практики построения доказательств могут определять интуиции исследователей.

IV

В концепции строгости как локальной общезначимости речь идет об обычных неформальных доказательствах. В них, безусловно, большую роль играет интуиция. В обычной практике доказательства в большинстве случаев не строятся в формализованном виде, такие доказательства содержат пробелы, заполнение которых является задачей интуиции. Как указано выше, в случае топологии (и конкретно – теории узлов) интуиция опирается на специально вырабатываемые компетенции и является пространственной интуицией, основывающейся на способности к пространственному мышлению и визуализации. Наличие соответствующих компетенций обеспечивает возможность конструировать и проверять неформальные доказательства, а так как выработка релевантных компетенций предполагает строгий процесс обучения и коммуникации внутри сообщества и соответствует целым группам формальных манипуляций, опора на такого рода интуицию вполне может быть формализована. Однако формализованное доказательство будет полным, оно не будет содержать пробелов, и нечего будет заполнять с помощью интуиции.

Тем не менее формализованные доказательства, построенные с помощью интерактивных средств для доказательства теорем в рамках гомотопической теории типов, в силу используемых в формализме геометрических интуиций вполне сохраняют «место» для интуиции. В этом смысле интуиция является не столько средством для заполнения пробелов (так как пробелы в формализованном доказательстве уже заполнены соответствующими группами элементарных шагов в соответствии с правилами вывода), сколько средством, обеспечивающим «мезоскопическую» обозримость и (опосредованно) убедительность. Однако связи между рассмотренными понятиями: строгостью как локальной общезначимостью, «мезоскопической» обозримостью, геометрической интуицией – требуют дальнейшего рассмотрения и, вероятно, эмпирического исследования.

Литература

1. *Ламберов Л.Д.* Строгость доказательства: «серая зона» между формализацией и практикой // Философия науки. 2023. № 1 (96). С. 121–133.

2. *Родин А.В.* Аксиоматическая архитектура научных теорий: Дисс. … д-ра филос. наук. Спб., 2020. URL: https://disser.spbu.ru/files/2020/disser_rodin.pdf

3. *Родин А.В.* Делать и показывать // Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике / Под ред. В.А. Бажанова, А.Н. Кричевца, В.А. Шапошникова. М.: Либроком, 2014. С. 219–255.

4. *Хлебалин А.В.* Интерактивное доказательство: верификация и генерирование нового математического знания // Философия науки. 2020. № 1 (84). С. 87–95.

5. *Целищев В.В.* Эпистемология математического доказательства. Новосибирск: Параллель, 2006. 212 с.

6. *Целищев В.В., Хлебалин А.В.* Формальные средства в математике и концепция понимания // Философия науки. 2020. № 2 (85). С. 45–58.

7. *Appel, K. & W. Haken.* (1977). Every planar map is four colorable. I. Discharging. Illinois Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 3, 429–490.

8. *Appel, K. & W. Haken.* (1977). The solution of the four-color-map problem. Scientific American, 237, 108–121.

9. *Appel, K., W. Haken & J. Koch.* (1977). Every planar map is four colorable. II. Reducibility. Illinois Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 3, 491–567.

10. *Bassler, O.B.* (2006). The surveyability of mathematical proof: A historical perspective. Synthese, Vol. 148, No. 1, 99–133.

11. *Davies, B.* (2005). Whither mathematics? Notices of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 11, 1350–1356.

12. *De Toffoli, S. & V. Giardino.* (2016). Envisioning transformations – The practice of topology. In: B. Larvor (Ed.). Mathematical Cultures. The London Meetings 2012–2014. Cham, Birkhäuser, 25–50.

13. *Fine, B. & G. Rosenberger.* (2012). The Fundamental Theorem of Algebra. New York, Springer, 210.

14. *Gonthier, G.* (2005). Formal proof – The four-color theorem. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 11, 1382–1393.

15. *Robertson, N. & P. Seymour.* (1983). Graph minors. I. Excluding a forest. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 35, No. 1, 39–61.

16. *Robertson, N. & P. Seymour.* (2004). Graph minors. XX. Wagner's conjecture. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 92, No. 2, 39–61.

17. *Rodin, A.* (2019). Formal proof-verification and mathematical intuition: the case of univalent foundations. In: 16th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology (Prague, August 5–10, 2019), Book of Abstracts. Institute of Philosophy of Czech Academy of Sciences, 418.

18. *Teller, P.* (1980). Computer proof. The Journal of Philosophy, Vol. 77, No. 12, 797–803.

19. *Tymoczko, T.* (1979). The four-color theorem and its philosophical significance. The Journal of Philosophy, Vol. 76, No. 2, 57–83.

References

1. *Lamberov, L.D.* (2023). Strogost dokazatelstva: "seraya zona" mezhdu formalizatsiey i praktikoy [The rigor of proof: the "grey zone" between formalization and practice]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 1 (96), 121–133.

2. *Rodin, A.V.* (2020). Aksiomaticheskaya arkhitektura nauchnykh teoriy [Axiomatic Architecture of Scientific Theories]. Doctor of Philosophy Thesis. St. Petersburg. Available at: https://disser.spbu.ru/files/2020/disser_rodin.pdf .

3. *Rodin, A.V.* (2014). Delat i pokazyvat [To do and to show]. In: V.A Bazhanov, A.N. Krichevets and V.A. Shaposhnikov (Eds.). Dokazatelstvo: ochevidnost, dostovernost i ubeditelnost v matematike [Proof: Evidence, Certainty, and Persuasiveness in Mathematics]. Moscow, Librokom Publ., 219–255.

4. *Khlebalin, A.V.* (2020). Interaktivnoe dokazatelstvo: verifikatsiya i generirovanie novogo matematicheskogo znaniya [Interactive proof: verification and gerenation of new mathematical knowledge]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 1 (84), 87–95.

5. *Tselishchev, V.V.* (2006). Epistemologiya matematicheskogo dokazatelstva [Epistemology of Mathematical Proof]. Novosibirsk, Parallel Publ., 212.

6. *Tselishchev, V.V. & A.V. Khlebalin.* (2020). Formalnye sredstva v matematike I kontseptsiya ponimaniya [Formalism in mathematics and conception of understanding]. Filosofiya nauki [Philosophy of Science], 2 (85), 45–58.

7. *Appel, K. & W. Haken.* (1977). Every planar map is four colorable. I. Discharging. Illinois Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 3, 429–490.

8. *Appel, K. & W. Haken.* (1977). The solution of the four-color-map problem. Scientific American, 237, 108–121.

9. *Appel, K., W. Haken & J. Koch.* (1977). Every planar map is four colorable. II. Reducibility. Illinois Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 3, 491–567.

10. *Bassler, O.B.* (2006). The surveyability of mathematical proof: A historical perspective. Synthese, Vol. 148, No. 1, 99–133.

11. *Davies, B.* (2005). Whither mathematics? Notices of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 11, 1350–1356.

12. *De Toffoli, S. & V. Giardino.* (2016). Envisioning transformations – The practice of topology. In: B. Larvor (Ed.). Mathematical Cultures. The London Meetings 2012–2014. Cham, Birkhäuser, 25–50.

13. *Fine, B. & G. Rosenberger.* (2012). The Fundamental Theorem of Algebra. New York, Springer, 210.

14. *Gonthier, G.* (2005). Formal proof – The four-color theorem. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 52, No. 11, 1382–1393.

15. *Robertson, N. & P. Seymour.* (1983). Graph minors. I. Excluding a forest. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 35, No. 1, 39–61.

16. *Robertson, N. & P. Seymour.* (2004). Graph minors. XX. Wagner's conjecture. Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol. 92, No. 2, 39–61.

17. *Rodin, A.* (2019). Formal proof-verification and mathematical intuition: the case of univalent foundations. In: 16th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology (Prague, August 5–10, 2019), Book of Abstracts. Institute of Philosophy of Czech Academy of Sciences, 418.

18. *Teller, P.* (1980). Computer proof. The Journal of Philosophy, Vol. 77, No. 12, 797–803.

19. *Tymoczko, T.* (1979). The four-color theorem and its philosophical significance. The Journal of Philosophy, Vol. 76, No. 2, 57–83.

Информация об авторе

Ламберов. Лев Дмитриевич – Межрегиональная общественная организация «Русское общество истории и философии науки» (105062, Москва, Лялин пер., 1/36, стр. 2).

lev.lamberov@urfu.ru

Information about the autor

Lamberov, *Lev Dmitrievich* – Interregional Non-Governmental Organization "Russian Society for the History and Philosophy of Science" (1/36, bd. 2, Lyalin ln., Moscow, 105062, Russia).

Дата поступления 09.12.2023