



Проблемы логики и методологии науки

УДК 168

DOI: 10.15372/PS20230206

EDN: YPVDKO

В.Э. Войцехович, Г.Г. Малинецкий

КУДА ДВИЖЕТСЯ МАТЕМАТИКА?

Современная индустриально-технологическая цивилизация, а вместе с нею наука и математика вошли в кризисный период эволюции, который завершится только при вступлении цивилизации в новый, более духовный этап развития. Рационализм, базирующийся на оперировании «неподвижными» понятиями (в духе закона тождества в логике), устарел и не способен выразить специфику развивающихся объектов, изучаемых теорией самоорганизации. В науке формируется более сложное мышление движущимися понятиями-образами. В статье описываются трудности развития математики в XXI в. и пути их преодоления. Вводятся новые идеи: будущее математики – в развитии креативности ученых, в интуитивном прозрении и выдвигании новых, более глубоких понятий и выражающих их свойства теорем-догадок, а не в логической строгости доказательств. Значительная часть доказательств со временем будет передана искусственному интеллекту. Современное математическое знание растет за счет прикладного аспекта – моделирования. Математика уже стала «отраслью промышленности». Наука сближается с искусством. Появится новый критерий научности – «истина-красота».

Ключевые слова: цивилизация; рационализм; наука; математика; синергетика; сложность; движение; логика; ИИ

V.E. Voitsekhovich, G.G. Malinetsky

WHERE MATHEMATICS IS GOING

Modern industrial-technological civilization, along with science and mathematics, has entered a crisis period of evolution, which will end only when civilization enters a new, more spiritual stage of development. Rationalism, based upon operating with “fixed” concepts (in the spirit of the law of identity in logic), is outdated and unable to express the specificity of developing objects studied by the theory of self-organization. More complex

thinking with moving concepts-images is being formed in science. The article describes the difficulties of the development of mathematics in the 21st century and ways to overcome them. New ideas are introduced: the future of mathematics lies in the development of scientists' creativity, intuitive insight and the promotion of new, deeper concepts and theorems-guesses expressing their properties, rather than in the logical rigor of proofs. A large part of evidence will eventually be transferred to artificial intelligence. Modern mathematical knowledge is growing due to the applied aspect – modeling. Mathematics has already become a “branch of industry”. Science comes close to art. A new criterion of scientific character will appear, that is “truth as beauty”.

Keywords: civilization; rationalism; science; mathematics; synergetic; complexity; movement; logic; artificial intelligence

Кризис науки

Человечество с XX столетия переживает крутой перелом в развитии. После двух мировых войн намечается третья. Политические акторы сменились уже за первую четверть XXI столетия. Производство ряда товаров и услуг в технически развитых странах значительно выросло. Наука стала главным фактором развития социума, фактором, трансформирующим экономику, политику, оборону, культуру и даже быт миллиардов людей. Однако несмотря на громкие открытия последних десятилетий, на ежедневный труд миллионов ученых наука находится в глубоком кризисе. Каковы проявления кризиса, порождаемые как вненаучными, так и внутринаучными причинами?

Сверхдифференциация научного знания. В России насчитывается более 20 тыс. научных направлений, на Западе – более 70 тыс., и в каждом из них работают от нескольких специалистов до десятков тысяч. Абсолютное большинство из них совершенно не знают, чем занимаются и какие открытия сделали другие. В то же время с математической точки зрения многие области науки, многие теории – это небольшой набор одних и тех же формальных структур, которые используются в самых разных областях.

Сравним генетику и лингвистику. ДНК (геном) различных биовидов можно рассматривать как языки. Фразы такого языка написаны атомами и молекулами, а не иероглифами или буквами. Каждый биовид стремится сохранить свой язык (геном) как своеобразную «формулу», или идею (по Платону), или форму («душу» вещи по Аристотелю). Поэтому некоторые наиболее фундаментальные открытия в генетике можно использовать в лингвистике, и наоборот. Философам и математикам это ясно. Однако филологические

факультеты университетов не торопятся установить связи с биологами, и наоборот.

Энтропийность и хаотичность научного знания, информационный «шум» в научных изданиях. В мире выходят десятки тысяч журналов, действуют тысячи научных сайтов на десятках языков. Кто их читает? Среди их читателей 90% – любители науки, а также студенты, аспиранты, но не профессионалы. Только дайджесты, собирающие лучшее, еще привлекают ученых. Очевидно, что в разных странах повторяют одни и те же открытия. Следовательно, 80–90% работы ученых планеты Земля – это с планетарной точки зрения «напрасный труд». Если бы благодаря глобализации удалось создать мировую академию наук (например, сетевую), где шел бы прямой обмен знаниями, то остальным 80–90% пришлось бы заняться другой, околонучной, инженерной или даже ненаучной работой. Результат был бы тот же, что и сегодня.

Польза для «избранных». Согласно древним заветам, ученые, открывая истинное знание, работают на всех, однако пользу от научных открытий и технических изобретений получает не все население, а главным образом олигархи. При этом даже в научно-технически развитых странах (США, Англия, Франция, Израиль и др.) значительная часть населения (от 10 до 20%) бедные и нищие. На кого же работают ученые? На все человечество или на лиц с «пониженной моральной ответственностью»?

«Географический» синдром современной науки. Произошедшее в науке проще всего проиллюстрировать на примере географии. Название этой науки дал 2200 лет назад Эратосфен, оно происходит от греческих слов *geo* – «земля» и *grapho* – «пишу». Континенты открыты, и они, и морское дно подробно описаны. Наука выполнила свою функцию, задача решена, других континентов у нас не появится. Нельзя сравнить таких географов, как Колумб, открывший в 1492 г. Америку, или Янзон, обнаруживший Австралию в 1606 г., с географами-классиками настоящего времени. Наука решила свою задачу – получила необходимое знание, и сейчас вопрос скорее инженерный и управленческий, – как его использовать.

Та же ситуация в химии: набор химических элементов, с которыми придется иметь дело, получен (за исключением далекой трансурановой экзотики), и вопрос заключается уже не в открытии нового, а в том, как применить имеющиеся знания в практике.

К подобной ситуации приближается даже физика, много лет стремившаяся узнать, каковы мельчайшие частицы материи. Элементарные частицы разделены на три класса: кварки, лептоны, глюоны. Они образуют своеобразный «алфавит» известной нам материи.

Сходное положение в математике – «царице наук» (К. Гаусс): многие принципиальные вещи установлены и не будут переоткрываться. В историю вошло высказывание Л. Кронекера: «Бог создал целые числа, все остальное – дело рук человека». Число (во всех его разновидностях) стало эталоном математического мышления. Более общий образец – множества, открытые Г. Кантором. Максимально общим на сегодняшний момент стала категория (С. Маклейн, С. Эйленберг). Число, множество, категория, их свойства и отношения образуют «синтаксис» формального языка, описывающего реальность.

Сегодня как бы повторяется ситуация с М. Планком, который в конце XIX в. получил от научного руководителя совет бросить физику. Мол, в ней уже все ясно, за исключением пары не решенных пока задач. Но именно их решения привели к революции: выросли теория относительности и квантовая теория.

В XXI в. ощущение исчерпанности науки вновь присутствует, но в еще больших масштабах.

Интересно, что ощущение близости «финиша» регулярно возникает в конце каждого периода развития не только науки, не только господствующего типа мышления, рационализма, но и цивилизации (причем в каждом из национальных вариантов: египетской, китайской, индийской, западной). Так, в Западной Европе на исходе Средневековья ожидали апокалипсис. В XXI в. – уже целый набор ужасов (как возможных, так и иллюзорных): третью мировую войну как конец цивилизации, искусственный интеллект, грозящий уничтожением человечества, инопланетян, могущих оккупировать планету, нашествие зомби и т.п. В том же ряду прекращение развития науки и неспособность человека к решению сложнейших задач.

«Географический» синдром означает исчерпание традиционных проблем или императивов данной науки. Требуются ее переосмысление и постановка новых задач, зачастую связанных с междисциплинарным взаимодействием.

Есть ли выход? «Молодость науки», «время бури и натиска» прошли, «карты» многих областей науки построены и хорошо ис-

следованы, и с достигнутой вершины открывается несколько перспектив:

- прикладное, «инженерное» исследование понятого. Если XX столетие было веком ученых (например, атомную бомбу в СССР создавали среди других ученых семь нобелевских лауреатов), то XXI столетие – век технонауки [28];

- поиск на «карте» науки экзотических мест, изучение которых может открыть новые перспективы. Если, например, математику XVIII в. сравнить с таинственным садом, наполненным множеством плодов, то в XXI в. многие тайны раскрыты, плоды сорваны. Сад превратился в пустыню, в которой трудно найти цветущий оазис или хотя бы родник;

- *трансдисциплинарное* или *междисциплинарное* взаимодействие с ориентацией на решение проблем, требующих совместных усилий. Важно подчеркнуть, что при этом рождаются новые понятия или серьезным образом переформулируются уже существующие. Например, так произошло с терминами «бифуркация», «аттрактор», «фрактал», «сложность», имеющими конкретный строгий смысл в математике, однако сейчас перешедшими в массовое сознание и понимаемыми в гораздо более общем контексте.

Проблема простоты освоения науки и выхода на уровень современных исследований. Эту проблему в отношении физики сформулировал один из создателей квантовой механики Е. Вигнер в 1950 г. Однако за последние 70 лет она стала весьма острой и для других научных дисциплин, включая математику. Рассуждая о причинах торможения науки, Вигнер среди прочего пишет следующее относительно углубления в «тайны природы» еще на один слой: «Признание неадекватности понятий десятого слоя и замена их более тонкими понятиями одиннадцатого слоя будет гораздо менее важным событием, чем открытие теории относительности, но для того, чтобы найти корень зла, нам придется провести более трудоемкие и продолжительные исследования, чем некогда понадобившиеся для оценки тех противоречий с опытом, которые исключала теория относительности. Нетрудно представить себе, что наступит и такое время, когда изучающий физику утратит интерес или будет попросту не в силах пробиваться сквозь уже накопившиеся слои к переднему фронту науки, к самостоятельному исследованию» [6,

с. 174]. И далее: «Отсутствие интереса в сочетании со слабостью человеческого разума может легко привести к тому, что решение вопроса о полной адекватности понятий n -го слоя будет откладываться на неопределенный срок» [6, с. 175].

Отсюда следует принципиальное значение двух моментов. Первый состоит в том, что необходимы громадные усилия, чтобы сделать путь к переднему краю исследований проще, короче, нагляднее. Это возможно. Великий Эйлер впервые доказал теорему о том, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Сейчас это утверждение должны доказывать восьмиклассники. Ал-Магриби в XIII в. гордился выведенной им формулой $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$. Сейчас она очевидна.

Евклид утверждал: «В геометрии нет царского пути». Если «коротких путей» во многих дисциплинах не найдется, то это замедлит фундаментальные исследования, парализует прикладные и в конце концов приведет к технологическому откату. Огромную роль в поиске таких путей могут сыграть междисциплинарные подходы, позволяющие увидеть «единое во многом». Среди них можно выделить теорию самоорганизации, или синергетику, в основании которой лежит совпадение или сходство математических моделей систем и процессов в открытых системах, далеких от равновесия [17].

Второй момент связан с выбором направления научных исследований, с концентрацией усилий на ключевых направлениях. На это стоит обратить особое внимание.

Выбор ключевых направлений исследований. В истории многих наук, и в частности в истории математики, можно выделить много столетий, на протяжении которых не было получено значимых результатов. В настоящее время ситуация кардинально изменилась. С 1960-х годов науку начали рассматривать как непосредственную производительную силу. СССР и США вели работы по всему фронту научных исследований. Однако по истечении 60 лет ситуация вновь стала иной: этот фронт оказался слишком большим. Уже нельзя «к каждой интересной задаче поставить по исследователю». Научная отрасль стала значимым социальным инструментом, потребовалось определять стратегию ее развития, «редактировать» пространство возможных направлений работы, выбирать главное. Без этого эффективность научной деятельности, как показывает исторический опыт, быстро падает.

Общество рассматривает науку как инструмент для обеспечения более благополучной и безопасной жизни. Имея в виду это измерение, выдающийся математик, механик, организатор науки М.В. Келдыш считал, что в стране должно быть одно-два научных направления, которые позволят обществу выйти на более высокий уровень развития. Именно они во многом продиктуют направление теоретических и фундаментальных исследований и определяют развитие отдельных научных дисциплин. Во времена М.В. Келдыша такими направлениями для нашей страны были космический и атомный проекты. Они дали огромный импульс развитию физики, химии, биологии, многим другим наукам и, конечно, математике.

По-видимому, сейчас такими направлениями могли бы стать биологический и информационный проекты. Их развитие могло бы поставить новые проблемы, преобразить математику. Пока этого, к сожалению, нет, и именно с отсутствием этого во многом связан нынешний кризис науки.

Кризис математики

Математика бурно развивается, но в основном благодаря быстрому расширению областей ее применения. В то же время крупных сдвигов в фундаментальных сферах давно уже нет. Многие ученые заняты либо доказательством важных теорем, либо даже решением отдельных «кунштюков» – красивых задач в теории чисел, геометрии, алгебре, которые восхитительны сами по себе, но оторваны от главного – рационального познания и решения прикладных задач. В математике как языке науки, как ядре рационализма проявляются специфические проблемы, трудности и кризисные процессы.

Доказательства. В XXI в. доказательства важных теорем растянулись на сотни страниц сложнейшего текста, понять который способны иногда лишь несколько человек в мире. Казалось бы, помочь могут компьютеры, но их доказательства еще на порядок длиннее, чем человеческие. Трудоемкость понимания машинных доказательств огромна.

Математика для математики. Эта наука все больше развивается для самой себя, но не для использования в других науках. Например, в физике разработаны перспективные теории, сформулированы важные уравнения, но их общих решений (аналитических) математики предложить не могут. Таковы уравнения Навье – Сто-

кса, Янга – Миллса и др. Остаются лишь численные, приближительные методы для решения отдельных задач в данной области. Что делать, неясно. Конечно, выход из этого есть, однако он представляется сегодня достаточно радикальным.

Недостатки «большой тройки XX века» – логицизма, формализма и интуиционизма нынешний век сделал очевидными. Логичизм исходит из того, что математика есть логика. Однако математика богаче логики. В геометрии присутствует актуальная бесконечность, а в логике нет. Кроме того, в XX в. появилось множество логик, и в разных задачах следует применять разные. В одних кроме «да» и «нет» есть «не знаю» – существенный символ [11]. В ряде задач, возникших в промышленности, можно использовать нечеткую логику, в теории рефлексивного управления уместны более сложные логические конструкции. Этот список можно продолжать и продолжать.

Выдающийся математик Д. Гильберт, во многом определивший развитие математики в XX в., завершил свое собрание сочинений фразой: «Мы должны знать – мы будем знать». Та же фраза высечена на его надгробии. Это платоновский взгляд, основанный на том, что мы должны найти решение проблем из «задачника» нашей реальности и доказать определенным способом, что они действительно являются таковыми.

На наш взгляд, метафизика математики кардинально изменилась: «мы должны выбирать – мы будем выбирать». И выбирать мы будем, исходя не только из внутренней логики математики, но и прежде всего представляя область, из которой пришла задача, а также способ, которым будет использоваться ее решение.

Конечно, это делается и сейчас. Например, мы выбираем, где нужно и возможно детерминированное описание, а где уместен и необходим вероятностный подход. При наличии многих «математик» и «логик» нам надо выбирать наиболее подходящие, сообразуясь с целями и задачами, а также с возможностями других наук. Такая «внутринаучная самоорганизация» является насущной необходимостью и самым активным образом используется при планировании и выполнении больших научно-технологических проектов.

Формализм, сводящий сущность математики к манипуляции символами, также ушел в прошлое. Вспомним строки Пушкина: «О, сколько нам открытий чудных / Готовят просвещенья дух / И опыт, сын ошибок трудных, / И гений, парадоксов друг, / И случай, бог

изобретатель». «Теоретическая математика», понимаемая в классическом варианте, не принимает ни опыт, ни случай, ни парадоксы. Работа Б. Рассела и А.Н. Уайта «Основания математики», опубликованная в 1910–1913 гг., показывает тупиковость этого направления. В развитой логической системе естественно возникают суждения о суждениях. Критский философ Эпименид вошел в историю парадоксом «Все критяне лжецы». Истинно или ложно это суждение? Оба ответа нехороши.

Выдающимся достижением К. Гёделя является перевод парадокса Эпименида на математический язык: «Гёдель предположил, что суждение теории чисел могло бы быть о суждении теории чисел (возможно даже о себе самом), если бы сами числа могли обозначать суждения» [33, с. 288]. Иными словами, «в центре его построения находится идея *кода*. В этом коде, обычно именуемом “Гёделевой нумерацией”, символы и последовательности символов обозначаются символами... с помощью этого кодирующего трюка суждения теории чисел приобретают двоякое значение: они могут быть поняты как суждения теории чисел, а также как *суждения о суждениях* теории чисел» [Там же]. То есть возникает еще один уровень рефлексии (а с ним и бесконечно много последующих уровней!). Результат Гёделя состоит в следующем: «Все непротиворечивые аксиоматические формулировки теории чисел содержат неразрешимые суждения». Как бы ни была хороша грамматика языка, без парадоксов не обойтись [Там же].

Конечно, привлекает интуиционизм, позволяющий расширить жесткую логическую схему. В Аристотелевой логике действует *закон исключенного третьего*. Предполагается, что данное утверждение Φ либо истинно, либо ложно – третьего не дано. Основоположник интуиционистского направления Л.Э.Я. Брауэр писал: «Традиционная вера в универсальную справедливость закона исключенного третьего в математике рассматривается интуиционизмом как такой же феномен в истории цивилизации, как долговременная вера в рациональность числа или во вращение небесного свода вокруг оси, проходящей через Землю. ...Надеюсь, я ясно дал понять, что интуиционизм, с одной стороны, уточняет логику, с другой стороны, осуждает логику как источник истины. Далее, что интуиционистская математика – это внутренняя архитектура, и что поиски оснований математической математики – это внутреннее исследование» (цит. по: [33, с. 288]).

Математика является неотъемлемой, очень важной частью культуры, поэтому не трудно провести аналогию между развитием общества и эволюцией математики.

Обычно под идеологией понимают систему идей субъектов политики (классов, наций, партий и т.д.). В общественном сознании западной цивилизации в XX в. боролись три идеологии: либеральная, фашистская, коммунистическая. Именно они рассматривались как рецепты, определяющие будущее всего мира. В общественном сознании все три отвергнуты, идут поиски четвертого пути. Найти его трудно, поскольку развитие научных, промышленных, гуманитарных технологий сделало мир сложнее и разнообразнее. Каждая часть мира начала искать свой путь в будущее, учитывая уровень социального, экономического, этнического развития, не оглядываясь только на общие рецепты, предложенные в прошлом. Усложнение мира привело к другому сценарию – к хаосу и *самоорганизации*.

По-видимому, то же происходит и в математике, которая за столетие существенно выросла, обновилась и стала более разнообразной. По-видимому, и здесь время общих рецептов (идеологий) прошло. Меняются проблемы, понятия, инструменты, цели, новое решительно вытесняет старое, происходят хаотизация и *самоорганизация*.

В значительной степени «теоретическая математика» оказалась подобна башне из слоновой кости. Мечта ее обитателей – взять и решить какую-нибудь задачу, поставленную классиками века назад. Иногда пишут, что решение ряда классических задач еще потребует столетий работы. И позже выясняется, что каким-то образом решение этих классических задач дает новые подходы к решению некоторых прикладных проблем. Подобную ситуацию очень хорошо показал лауреат Нобелевской премии по литературе Г. Гесс в книге «Игра в бисер». Он описал «педагогическую провинцию» Касталию, живущую по монастырскому уставу. Ее обитатели занимаются странной игрой со смыслами и достижениями науки и культуры – игрой в бисер. Они считают, что их деятельность в конечном счете очень полезна для общества. Магистр игры, руководитель Касталии Иозеф Кнехт уходит в мир, считая, что реальность важнее абстракции.

Конечно, нельзя отрицать значения «математических вершин» и стремления рано или поздно найти ответы на возникшие вопросы, поставленные исследователями предыдущих поколений. В конце концов, именно это делает математику математикой.

Если прежнюю математику можно было сравнить с «незримым колледжем», обитатели которого могли общаться друг с другом через века, а их деятельность – с добычей алмазов, то когда появляется «математическая промышленность», развитие этой отрасли становится похоже на добычу нефти. Начинается «математическая лихорадка». Правильно представлять ее в виде треугольника *наука – искусство – технологии* (см. рисунок), в котором каждая из категорий становится своеобразным арбитром во взаимодействии двух других.



Удивительно, что об этом приходится писать сейчас. Бытует выражение: «Мельницы Господни мелют медленно, но верно». Прошло сорок с лишним лет со времени публикации книги выдающегося математика и философа Н.Н. Моисеева «Математика ставит эксперимент» [21], вдохновлявшей студентов и аспирантов, но ситуация кардинально не изменилась к лучшему, скорее наоборот. Никита Николаевич был заместителем директора Вычислительного центра АН СССР – одного из ведущих математических центров страны. В ходе реформ Академии наук эту замечательную организацию упразднили, объединив с другими институтами. Ту тенденцию, о которой мы пишем, Н.Н. Моисеев характеризовал так: «Мне кажется, что пик увлечения “чистыми” проблемами уже пройден где-то в середине прошлого (XIX. – *Авт.*) столетия. Я знаю много первоклассных математиков (как у нас в стране, так и за ее пределами), которые постепенно переезжают на окраины, где больше воздуха и солнца, где начинают строиться новые дороги в соседние города и страны, где больше воодушевляющих перспектив и шире простор для творчества. Все более заселяются кварталы, которые тесно соприкасаются с другими городами: физикой, техникой, экономикой, биологией, медициной – город перестает быть цитаделью, отгороженной от остального мира стеной. И населяет эти кварталы главным образом молодежь» [21, с. 17–18]; «И математик в этих условиях оказывается единственным специалистом, интерпретатором, способным и создать общий язык, и сформулировать требования к информации, и, наконец, быть архитектором тех систем, кото-

рые являются скелетом исследований междисциплинарного характера» [21, с. 40].

Основания математики. За 120 лет со времен Б. Рассела, Л. Брауэра, Д. Гильберта проблема оснований математики так и не решена. Логицизм и формализм провалились, интуиционизм не признан большинством ученых. Лишь платонизм остается реальным основанием этой науки, так как большинство математиков платонисты (явно, или скрытно, или неосознанно). Но платонизм – философское учение. Неужели математика «вырастает» из философии, из неявного знания, из интуиции, а других вариантов нет?

Сложность и строгость, однозначность рассуждений. Все меньше людей могут понять современные математические рассуждения. Удерживать в памяти все более длинные доказательства способны немногие, даже лучшие профессионалы. Математика превратилась в науку для «своих», стала чуть ли не тайным, эзотерическим учением – учением, которое изложено на непонятном языке и потому закрыто для непосвященных.

Математика становится религией? Сегодня технология признания доказательств научным сообществом напоминает общение верующих со святыми, с абсолютными авторитетами. Так, признание доказательства в 2003 г. Григорием Перельманом важной теоремы А. Пуанкаре свелось к авторитету М.Л. Громова. Последнему Филдсовский комитет поручил окончательно проверить огромное и сложное доказательство. Громов два года молчал, а затем написал: «Да» [8]. Результат достигнут. Громов выступил в роли «святого отца», мнение которого непогрешимо для научного сообщества.

Целостность математики под сомнением. Необъятность математического знания привела к странному положению, когда в разных областях математической науки используются разные критерии доказательности, несмотря на общее мнение о «целостности математики, подобной кристаллу» (Н. Бурбаки [4]). Но что еще хуже, математика до сих пор не избавилась от национального оттенка: в разных странах применяются достаточно разные критерии доказательности. Наиболее отчетливо это видно при сравнении западной математики и китайской. Иногда то, что считается доказательством в Китае, не признается таковым на Западе, где используются более строгие критерии. Из-за этого возникают подозрения в ангажированности европейцев и американцев, которые страдают зазнайством и комплексом превосходства Запада над Востоком. Между тем перед истиной все равны.

Строгость подавила прозрение, а логика – творчество. Последние два столетия математика двигалась «между Сциллой и Харибдой», между творчеством и обоснованием, выдвижением теоремы и ее доказательством. При этом большая часть работы свелась к доказательствам, а не к озарениям. Усиление строгости вело к усложнению знания, а из-за усложнения знания доказательства становились все более строгими. В свою очередь, усложнение математики пытались преодолеть с помощью усиления строгости доказательств. Образовалась положительная обратная связь, но она ведет только к разрушению системы. Поэтому усиление логической строгости оказалось обманчивым рецептом.

Растущий хаос в математике. Казалось бы, какой может быть хаос в математике – идеале строгости и точности? Тем не менее это так. В процессе развития математики увеличивалась ее сложность, следовательно, отсутствовали связи между разными разделами, росла множественность понятий и теорем, а значить, усиливался своеобразный хаос. Его пытались преодолеть с помощью строгости доказательств. Но растущая длина доказательств вновь увеличивала и сложность, и хаотичность.

Здесь работает диалектический закон взаимного перехода качественных и количественных изменений. Вот пример. П. Гордан в 1868 г. доказал основную теорему теории инвариантов. Сто страниц формул, тождественных преобразований. В 1888 г. Гильберт предложил доказательство на две страницы. Гордан обиделся и назвал это теологией. Хотя новое доказательство было неконструктивным, математическое сообщество пошло по пути Гильберта, признанного гением. Что произошло? Накопление количества (Гордан) привело к скачку качества (Гильберт): сложность сменилась высшей простотой, метафорически: $100 \rightarrow 2$.

Похожий процесс происходит в истории математики: рост сложности (хаоса – X) может привести к качественному скачку (высшей, интуитивной простоте, порядку – П): $X \rightarrow П$. Поэтому увеличение длины и сложности доказательств – тупиковый, технический путь, когда внешнее теснит внутреннее, а строгость – интуицию.

Выходов из хаоса математического знания два: «горизонтальный» и «вертикальный». Горизонтальный, логический, технический – дать задачу компьютеру доказать теорему, т.е. передать доказательства искусственному интеллекту (нейросети), который, возможно, найдет доказательство, не выходя за рамки *старого*

знания. При этом исходный хаос трансформируется в новый, логический хаос, при котором компьютерное доказательство на порядок длиннее человеческого. Здесь проявляется своеобразный закон *сохранения «количества» хаоса, или сохранения сложности*. Хаос трансформируется, но его «количество», в сущности, не меняется.

Второй, вертикальный, интуитивный, путь, доступный лишь человеку, – выдвинуть *новые* понятия, обобщающие старое знание, и на их основе дать краткое «гениальное» доказательство. Тогда хаос трансформируется в *высший* порядок. Этот путь недоступен ИИ.

Обозначенный процесс самоорганизации описывается метафорой: *порядок* → *хаос* → *высший порядок* → *высший хаос* → Или *простота* → *сложность* → *высшая простота* → *высшая сложность* → Отсюда ясно, что известная метафора «математика – наука о доказательствах» устарела, верна лишь наполовину. Работа математика (М) при решении задачи состоит из двух частей: 1) творчество, выдвижение догадки-теоремы (Т); 2) доказательство (или опровержение) теоремы (Д). Математику как процесс можно выразить метафорой: $M = T + D$.

Это ясно показал И. Лакатос на примере истории доказательства формулы Л. Эйлера для выпуклых многогранников [14]. Ф. Клейн условно поделил всех математиков на два класса: «интуитивистов», выдвигающих новые теоремы, и «логиков», которые доказывают, опровергают или уточняют эти теоремы [9]. Даже гениальный К. Гаусс жаловался: «Кто бы дал мне теоремы?» – чтобы их доказать, уточнить или опровергнуть.

Возникает радикальный вопрос: кто важнее – интуитивисты или логики? Интуитивисты. Они всегда первые. Творцы направляют развитие своей науки. Логика же зависимы от интуитивистов. Они всегда вторые, играют служебную роль. Для гениев доказательства не так уж важны. Об этом писал Р. Декарт, который сформулировал теорему, названную позже теоремой Эйлера. Декарта не волновало отсутствие доказательства, для него *интуиция важнее логики*. Теорема совершенно ясна, а «доказательство найдет кто-нибудь» (для гения доказательства не так уж важны). Подобные рассуждения были распространены в XVII–XVIII вв. Для Декарта критерий истины – ясность.

Например, английские ученые в XVIII в. при общении с коллегами из Франции, Голландии хвастливо утверждали: «Открытия

делаем мы, англичане, а доказательства найдут какие-нибудь немцы». В аналогичном положении оказался в начале XX в. знаменитый индийский математик Сриниваса Рамануджан. Он «чисто интуитивно» (иногда на основе сновидений) написал около 120 теорем теории чисел. Они были для него совершенно ясны и правильны. Но приехав в Англию, он узнал, что англичанам нужны еще и доказательства. Рамануджан получил и их для части своих теорем. Сегодня доказана половина из 120 теорем, но общее мнение специалистов – все 120 теорем истинны. Интуитивист Рамануджан (если бы он был склонен к зазнайству) мог бы сказать: «Мы, индийцы, делаем открытия, а их доказательства найдут какие-нибудь англичане». Для Рамануджана, как и для Декарта, ясность – критерий истины.

Неясность ясности. Из изложенного выше следует, что в истории математики сформировалось по крайней мере два понимания ясности: «видение» истины как убежденность в правильности теоремы изначально, до строгого доказательства (Декарт, Рамануджан и другие «интуитивисты» согласно Клейну) и «видение» истины как следствие строгого доказательства («логики» по Клейну). В современной математике господствует «строго доказательное» понимание истины [31; 32].

Логическая строгость стала тормозом для развития математики. Ужесточение строгости доказательств в течение XIX–XXI столетий привело к тому, что математику стали называть наукой о доказательствах, а не об открытиях, т.е. безмерно усилился не главный, самый трудный (интуитивный), а второстепенный, более легкий (формальный, логический) аспект математической деятельности. Отсюда распространенное заблуждение: якобы «математика в сущности есть логика», а также будто специфика математики – непротиворечивость. Это неверно. Непротиворечивость является необходимым логическим требованием ко всему научному мышлению – в физике, лингвистике, истории, юриспруденции и других науках. С этим же заблуждением связаны безуспешные попытки Б. Рассела и других напрямую свести математику к логике (логизм в основаниях этой науки). Еще Д. Гильберт показал, что математика – больше, чем логика. Например, как уже говорилось, в геометрии есть аксиома бесконечности, а в логике ее нет. Чрезмерная логическая строгость завела эту науку в тупик – тупик сложности, поскольку доказательства «раздулись» до *тысячи* страниц труднейшего текста [8]. О тупике пишут и другие математики.

Специфика математики. Отличие математики как науки – в едином комплексе «*формальность – бесконечность – всеобщность*». Рассмотрим эти аспекты.

Формальность. Всем ясно, что формальность отличает математику от всех эмпирических наук. Кроме того, такой авторитет, как С. Маклейн (создатель теории математических категорий – самой общей теории, своеобразного основания математики на настоящий момент), прямо определил математику как «науку о всех возможных формах» [16]. Важно, что Маклейн приехал в Германию из Чикаго, учился в школе Д. Гильберта, был аспирантом Г. Вейля, поэтому усвоил важность философии для математики. Вернувшись в США, он стал членом Американского философского общества и пропагандировал значимость философии для своей науки.

Отсюда два следствия. Первое: согласно Маклейну, *математика – как бы раздел диалектики*. В теории категорий И. Канта и в диалектике Г. Гегеля сущность бытия выражают всеобщие понятия, как правило пары категорий: «сущность – явление», «форма – содержание» и др. При проецировании последней пары на рациональное, научное познание проявляется пара «содержательные, эмпирические науки – формальные, неэмпирические науки». Главными науками второго типа признаны математика и логика.

Второе следствие: логика – одна из форм. *Логичность* рассуждения, в частности непротиворечивость теоремы, – это *следование определенной форме*, или принятой системе аксиом (порядковой, топологической, алгебраической, множественной и т.п.). Поэтому Аристотель, в сущности, прав: логика – часть геометрии. За прошедшие тысячелетия создано огромное количество самых различных математических форм. В принципе, их бесконечное множество, а следовательно, и логик бесконечное разнообразие.

Бесконечность. Еще древние греки приняли бесконечность как «растущее конечное» (потенциальную бесконечность), отвергнув при этом актуальную бесконечность как нечто невозможное. Однако религиозная цивилизация Средних веков провозгласила в качестве всеобщего начала уже не множество богов, а единого Бога. Важнейшими свойствами Творца признаны «абсолютное совершенство», «окончателность», «завершенность», «вневременность». Отсюда бесконечность Высшего существа как «ставшая, актуальная бесконечность». В теологии появилось выражение «бесконечный Христос». Одним из первых ввел в познание понятие актуальной бесконечности священ-

ник, философ и математик Николай Кузанский (XV в.). В последующие века это понятие проникло в различные области математики, особенно в геометрию (Ж. Дезарг). В XIX столетии Г. Кантор создал теорию трансфинитных чисел. Математика стала применяться во многих областях, была признана «языком науки». Вслед за повышением статуса математики представление об актуальной бесконечности проникло в теоретическую физику, космологию. До сих пор физиками обсуждается вопрос: бесконечна ли Вселенная? Сегодня очевидно, что ответ зависит от субъекта, от его мировоззрения. Он может постулировать любой ответ. Если вопрос относится к физической Вселенной, то для физиков она конечна в смысле потенциальной бесконечности (растущее конечное). По оценкам космологов, диаметр Метагалактики составляет 93 млрд св. лет. Причина конечности всех объектов в эмпирических науках – ощущение. Оно конечно. Если же под Вселенной понимать «все существующее» (бытие как физические объекты, мысли, переживания, сны, фантазии, математические понятия, поэтический «бред» и т.п.), то она бесконечна в самом широком, онтологическом смысле, который даже шире, чем смысл актуальной бесконечности в математике [26].

Бесконечность в качестве главного понятия в математике выделял известный ученый, друг Гильберта Г. Вейль [5].

Всеобщность. В XX в. авторитет наук, рационального мышления и математики вырос еще больше. Среди ученых распространилось представление о том, что в принципе математика (современная и будущая) работает везде. Это стало как бы возрождением философии Пифагора на современной почве. Однако появились сомнения во всеобщности математики: во-первых, она не раскрывает сущность объекта (это цель философии); во-вторых, ее применения в гуманитарной области слабы или невозможны; в-третьих, некоторые разделы математики не являются универсально применимыми [24]. Добавим ненаучный аргумент: согласно буддийской теологии, существуют миры вне информации, где «нет различия между светом и тьмой», нет различия вообще, «все – одно». Отсутствует двойственность, поэтому нельзя ввести бит (условно – пару (0,1)), невозможны язык, наука и математика. Сходные представления есть в учении о Едином как сущности бытия у Парменида, Плотина, в исихазме Григория Паламы. Поэтому следовало бы уточнить: *математика информационно всеобща*, т.е. работает во всех двойственных (множественных) мирах.

Проблема целостности математики. Хотя немало математиков интуитивно убеждены в целостности своей науки, в ней существует огромное количество направлений. Как правило, каждый ученый погружается в одно из направлений и занимается задачами только данного типа. В то же время многие ученые убеждены в том, что существует единство всех направлений, как бы единый «метод» решения. Подобную убежденность высказывали наиболее выдающиеся математики, такие как Г. Кантор, А. Пуанкаре, Д. Гильберт, а позже группа математиков, выступавшая под псевдонимом Никола Бурбаки и пытавшаяся найти единое аксиоматическое основание всей математики (по примеру Евклида). Подобный подход успешно применили и создатели теории категорий С. Маклейн и С. Эйленберг.

Если верить в целостность математики, то все разделы математики – лишь частные выражения единой фундаментальной структуры. Именно на этом пути и были получены наиболее глубокие результаты: созданы теория множеств, теория категорий, Гильберт предпринял попытки полной формализации, Гёдель сформулировал теоремы о неполноте. Вследствие убежденности в целостности математики ряд ученых уверены в том, что решение любых проблем сводится к поиску подходящих «ключей» в других областях.

Однако значительная часть математиков отвергают подобную «философизацию» своей науки, начиная еще с критики теории множеств. По нашему мнению, в этом проявляются обычный консерватизм и, к сожалению, личный эгоизм и зависть к интеграторам, которые привлекли внимание своими работами. Здесь присутствует борьба между частным и общим. Из уроков истории познания вывод можно сделать один: в ходе эволюции общее поглощает частное. Об этом как об универсальном подходе к решению задач писал, например, Гильберт.

Авторитетный орган математического сообщества – Институт математики Клэя установил премии за решение важнейших математических проблем. Требования к решению очень строгие: решение должно быть опубликовано в журнале с высокой международной репутацией, оно не должно быть опровергнуто в течение двух лет с момента публикации, проверкой занимаются ученые разных стран и т.д. На конференции «Важнейшие математические проблемы XXI века» (2000 г.) по аналогии с проблемами Гильберта (1900 г.) были сформулированы семь проблем: проблема Кука (сравнение классов

P и NP), гипотеза Римана, гипотеза Бёрча и Свиннертон-Дайера, гипотеза Ходжа, уравнения Навье – Стокса, гипотеза Пуанкаре, уравнения Янга – Миллса [23, с. 47–49]. Две из них уже решены. В свою очередь, в том же 2000 г. С. Смейл представил свой список 18 нерешенных проблем.

На наш взгляд, к упомянутым проблемам можно было бы добавить следующие проблемы математики и связанных с ней областей науки, которые могут быть решены в XXI в.: *проблема Гильберта о возможности вывода фундаментальных физических постоянных из фундаментальных математических констант, теория времени, машина времени, теория гармонии, хаосология, проблема прямого извлечения энергии из вакуума, новые уровни и типы энергии, проблема связи энергии, информации, сознания, разумного ИИ.*

Таким образом, к сожалению, по-прежнему в математике господствует множественность. Все более туманной становится мечта о единстве. Целостность математики под вопросом.

Фундаментальная или прикладная математика – что важнее? Среди ученых распространены две точки зрения на источник математики: платонизм (идеализм) и материализм.

Последователи Пифагора, Платона, Евклида признают источником математики мир идей, куда человек заглядывает с помощью чистого разума. Отсюда платонизм большинства математиков, в том числе Р. Декарта, Г. Лейбница, Л. Эйлера, Б. Римана, Г. Кантора, А. Пуанкаре, Д. Гильберта, С. Маклейна и др. Платонисты склонны к преувеличению значения внутренних источников математических идей, которые появляются в моменты интуитивного прозрения при решении задачи. Для них «настоящая» математика – фундаментальная.

Материалистов, эмпириков и прагматиков гораздо меньше. К этой позиции были склонны в древности Архимед, в последние столетия И. Ньютон, К. Гаусс, а в XX в. Дж. фон Нейман, В.И. Арнольд и ряд других (особенно английских) ученых. Они считают математику множеством идей, абстрагированных из внешнего мира, как бы «абстрактной физикой», а главным источником математических идей полагают внешние задачи, поставленные в эмпирических науках. Тогда прикладная математика – «настоящая».

На наш взгляд, истина не в крайностях и не между противоположностями, а выше них. Только *синтез* противоположностей дает глубокий ответ [13]. Внешний мир, ощущения влияют на идеи, возникающие у человека. Внутренний мир, данный человеку изначально

но, с момента зачатия, – это априорные формы познания, которые трансформируют хаос ощущений и преобразуют его в порядок образов, уложенных в доопытные формы. Все это ясно объяснил еще И. Кант в XVIII в. В XX в. подобные идеи изложил К. Гедель, показавший своими теоремами о неполноте, что математика для собственного обоснования нуждается в обращении к внешнему миру.

История математики показывает, что ее самые абстрактные, отвлеченные от реальности разделы когда-нибудь находят применение в эмпирических науках и практике. Так произошло с неевклидовыми геометриями, теорией групп, нестандартным анализом, теорией категорий. Поэтому как прикладная математика нуждается в фундаментальной, так и последняя не способна успешно развиваться без внешних задач. Оптимальное развитие математики состоит в *равномерном* сочетании теории с практикой.

Однако в разные периоды развития цивилизации на первый план выходит то фундаментальный, то прикладной аспект. В XXI в. вследствие завершения буржуазного, индустриально-технологического этапа эволюции и формирования более духовного этапа на первый план выйдет прикладной аспект, так же как это было при переходе от античной цивилизации к религиозной, средневековой.

Трудно быть математиком. Высокая сложность работы привела к тому, что выработался определенный психотип математика. Психологические портреты ряда выдающихся математиков XX–XXI вв. (А. Пуанкаре, Д. Гильберта, Л. Брауэра, Э. Нетер, К. Геделя, А. Гротендика и др.) представляют их как глубоких интровертов, погруженных в свой внутренний мир, общающихся в основном с единомышленниками и с трудом понимающих обычных людей.

Так, Э. Уайлс, работавший в Кембриджском университете в 80-е годы XX в., внезапно исчез на семь лет, перестал общаться с коллегами. Появился лишь в 1993 г., чтобы сделать доклад о доказательстве Великой теоремы Ферма. Сходным поведением отличился и Г. Перельман, работавший в Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН и доказавший в 2000 г. теорему Пуанкаре – одну из проблем тысячелетия. Перельман отказался получать премию «Медаль Филдса» и вознаграждение в 1 млн долл., перестал общаться с коллегами и журналистами.

Специфический психотип, вероятно, определяется особенностями работы математика, необходимостью «самозамыкания», что подтверждается метафорами, которые сформулированы рядом со-

временных ученых. Например: «Работа математика похожа на подбор ключей к замку» (Н.А. Широков).

Математика. Теорема существования. Будущее науки зависит от того, есть ли люди, которые ею собираются заниматься. Нынешняя ситуация вызывает в этом отношении большую тревогу. На Западе выделяют «компьютерных инженеров» и «компьютерных ученых». Последних, судя по учебным планам, готовят в 10 раз меньше, чем первых. Очевидно, и учиться они должны по разным программам: тех, кто будет использовать существующее, и тех, кто будет создавать новое, надо учить по-разному. Здесь можно вспомнить Генри Форда: «Если ты думаешь, что сможешь – ты прав, если думаешь, что не сможешь – ты тоже прав»; «Все что угодно может быть сделано лучше, чем делается сейчас»; «Думать – самая трудная из работ. Вот почему так мало людей ею занимаются»; «Если все настроено против тебя, помни: самолет взлетает против ветра».

На механико-математическом факультете МГУ многие преподаватели объясняют студентам: стать математиком из вашего потока суждено единицам, остальные после окончания учебы будут программировать». Все попытки объяснить руководителям образования, что компьютерных ученых и инженеров надо готовить отдельно, разбиваются о довод, что на соответствующих факультетах и так прекрасный конкурс.

В школе математика обычно считается самой сложной и самой важной дисциплиной. Физику и химию обычно считают вдвое более простыми дисциплинами, а биологию – вдвое более простой, чем физику.

Если же оценивать науки не по сложности, а по востребованности (по числу публикаций), то картина иная. На дисциплины биологического цикла приходится 50%, на химию – 10, на физику – восемь, на математику и информатику – по 1,5 [14]. На наш взгляд, в ситуации становления математической отрасли промышленности и преобразования этой древнейшей науки такие показатели совершенно недостаточны.

Следует обратить внимание еще на один аргумент, указывающий на необходимость срочных усилий в данной области в нашем Отечестве. Несколько поколений людей, занимающихся математикой, выросли на журнале «Квант», рассчитанном на старшеклассников и студентов младших курсов. Этот журнал создавался академиками А.Н. Колмогоровым и И.К. Кикоиным в 1970 г. Более полувека

он издается на очень высоком научном и педагогическом уровне. Однако в советские времена этот журнал издавался тиражом 315 тыс., а в настоящее время – тиражом... 900 экземпляров.

Каким же будет следующее поколение российских математиков?! И здесь мы видим кризис, который необходимо преодолеть.

Математика перед стеной сложности. Отсюда пессимистический взгляд на будущее математики у некоторых современных ученых. Математика почти остановилась в развитии. Она как бы «уперлась» в стену сложности [15].

Выход из кризиса мышления

По какой причине возникла эта стена? На наш взгляд, причина в *исчерпанности старых методов мышления*, которые уже не соответствуют современным вызовам. Рационализм Декарта, Лейбница, Ньютона основан на оперировании *неизменными* понятиями по неизменным законам логики. Главный из них – закон тождества. Но ни в природе, ни в мышлении нет абсолютного покоя. Его выдумали люди, пользуются этим представлением во внутреннем духовно-интеллектуальном мире, так как жить в «покое» *приятно*: «неподвижное единое» в философии Парменида, «вечный, неизменный Творец» в мировых религиях, якобы постоянные законы природы и т.п. Люди необоснованно распространили внутренний образ и на внешний мир, и на науку. Правильно ли это? На наш взгляд, нет.

Еще в VI в. до н.э. в Древней Греции было выдвинуто два противоположных учения: Парменида и Гераклита. У Парменида: «Все есть в сущности Единое, одно и то же. Единое неподвижно и шарообразно» [16]. У Гераклита: «Все есть в сущности движение» [19]. Отсюда диалектика – учение о всеобщем движении и развитии, которое в наиболее совершенной и богатой форме изложил Г. Гегель в XIX в.

В науке закрепилась парадигма Парменида: «ищи неподвижное». В философии (несмотря на ее многообразие) – диалектика: «ищи движение». Спор мыслителей остался неразрешенным.

За тысячи лет закон тождества сыграл огромную роль в развитии науки и цивилизации. Но в XX столетии парадигма Парменида исчерпала себя. Один из создателей теории самоорганизации, И. Пригожин, интегрировал современную ситуацию метафорой: «Наука движется от Парменида к Гераклиту» [17]. Если принять эту

мысль как обозначение генеральной линии развития не только естественных наук, но и математики, логики, рационального мышления и даже цивилизации, то для разрешения фундаментальных противоречий в познании и обществе необходимо перейти к парадигме движения – обобщить закон тождества в логике, математике, науке в целом, в мышлении, во всех областях человеческой деятельности.

Будущее за Гераклитом. Чаша весов в споре между Парменидом и Гераклитом постепенно склоняется в пользу парадигмы движения. Возможны следующие аргументы в пользу Гераклита.

Аргумент от Аристотеля. Аристотель, создавший логику, ядро которой – закон тождества, со временем перешел к парадигме Гераклита, так как из всех категорий выделил в качестве системообразующей лишь одну – *движение*. Из движения он выводил покой (неизменность) как крайнее состояние движения, как параметр вещи, который кажется неизменным, но на самом деле медленно, незаметно для наблюдателя изменяется.

Аргумент от Кантора. К XX столетию в науке накопилось немало противоречий, парадоксов, странностей, порожденных представлением о неизменных пространстве и времени, установкой на поиск неизменных законов природы (особенно законов сохранения), стремлением к линейному и механистическому представлению о процессах в природе, обществе, мышлении. Например, в XIX в. сформировалось понимание натуральных чисел $1, 2, 3 \dots n, n+1 \dots$ как объектов всегда одних и тех же, связанных постоянными правилами сложения, умножения и т.д., как данных нам Богом и находящихся в особом мире математических идей. В конце концов догма неизменности привела к торможению в развитии математики в целом. Так, Л. Кронекер в спорах об основаниях своей науки утверждал: «Числа даны нам Богом. Остальное – дело рук человеческих» (цит. по: [18]). Вероятно, Кронекер подразумевал, что Бог неизменен и введенные им числа неизменны. С ним спорил Г. Кантор, который в качестве основания математики ввел множества. В отличие от натуральных чисел они могут варьироваться, введение их в той или иной задаче зависит от мнения ученого. Поэтому *Кантор сдвинул математику к Гераклиту*. В споре с Кронекером математическое сообщество согласилось с Кантором [12], развитие математики пошло по пути теории множеств. «Никто не может изгнать нас из Рая, созданного Кантором», – писал величайший математик XX в. Д. Гильберт (цит. по: [20]).

Аргумент от синергетики. Возникновение постнеклассической науки (и ее части – теории самоорганизации) поставило вопрос о познании реальности по-новому, как «текучей» реальности [2]. До XX в. любые объекты рассматривались как вещи в своей сущности постоянные. Движение допускалось лишь для отдельных свойств вещи. Вещь же в сущности неизменна. Сущность недоступна для наблюдения, а свойства доступны для эмпирического исследования и их выражения через ощущения и математику (главным образом через дифференциальное и интегральное исчисления). Начиная с XX в. синергетика поставила вопрос об исследовании объектов как процессов, как движения самого по себе, движения вообще. Трудность состояла в том, что движение вообще – это категория, а категории как всеобщие понятия недоступны для научного исследования, так как философия – всеобщее знание, а наука – частное. Но при переходе от философского знания к научному единое общее «дробится» на множество частных.

Выход из затруднения состоит в том, что можно исследовать несколько частных научных моделей, а затем синтезировать их во что-то более общее, что и станет философской «моделью». Одной из удобных моделей является живое существо – организм. Он, в своей сущности, есть единство: а) субстанции (материи, вещества, неорганизованного хаоса: б) формы, организующей субстанцию во что-то устойчивое, в вещь (хаос материи образует порядок): в) алгоритма, скрытого в форме и разворачивающего шаг за шагом первичную форму в последующие состояния-процессы. Движение-организм как система имеет начало и конец (как во внутреннем времени-алгоритме, так и во внешнем времени сверхсистемы, в которую погружен организм). Движение создает локальное время системы-организма.

Аргумент от эволюции. «На свете счастья нет, а есть покой и воля», – писал А.С. Пушкин. Какова причина предпочтительности, «избранности» покоя для большинства людей, в том числе и для ученых? Почему неподвижность «лучше» подвижности, изменений? И это при том, что преимущество покоя перед движением иллюзорно? Это показали диалектики Гераклит и Гегель, Аристотель, создатели синергетики Г. Хакен и И. Пригожин. «Абсолютная неподвижность» иллюзорна не только в природе, но и в мышлении.

Главной причиной предпочтительности покоя, на наш взгляд, является биологическая природа человека. Дело в том, что каждый

биовид стремится решить двоякую задачу: сохранить геном (форму своего биовида) и изменить геном так, чтобы адаптироваться, приспособить свой биовид к изменяющимся внешним условиям. Выражаясь в духе китайской философии, это задача взаимодействия Инь и Ян, начала сохраняющего и начала изменяющего. Биовиды решают эту противоречивую задачу самыми различными способами. В процессе адаптации со временем геном изменяется, так как количественные изменения неизбежно порождают качественные скачки. Появляются новые геномы, т.е. другие биовиды. Например, изменение вирусов в процессе адаптации происходит чрезвычайно быстро.

В случае человека как биовида предпочтительность покоя перед движением в мышлении говорит о том, что наш биовид все еще негармоничен – не оторвался от главной установки животного мира на *сохранение* (покой, неизменность, Инь). Однако развитие человека, прогресс познания (как открытия нового) неизбежно усиливают установку на Ян, на движение, изменение. Отсюда вывод: подлинная жизнь, естественная эволюция любой вещи следует *мере* (в идеале – *гармонии* между покоем и движением, между Инь и Ян). Современная наука (следуя Пригожину) усиливает Ян, ищет формы мышления, более глубоко и адекватно отражающие движение. Старого математического аппарата (дифференциального и интегрального исчисления) уже недостаточно. Чтобы открыть новые методы отображения движения, необходимо предельно широко использовать интуицию, воображение, фантазию. Все они скрыты в необъятном океане потенциальности, в мире хаоса.

Если распространить образ «живой организм» как образец «движения вообще» на весь известный мир, то необходимо мыслить так:

- 1) любую вещь-процесс понимать как единство Инь-Ян;
- 2) покой понимать как крайний, наиболее медленный тип движения (как во внутреннем, так и во внешнем времени);
- 3) мыслить в логике непрерывного перехода от истины ко лжи (отсюда континуальность логики, сближение науки и искусства, науки и диалектики), отказаться от двузначной логики как господствующего образца дискретного мышления, перейти к «прерывно-непрерывной», «дискретно-континуальной» логике как учению о правильном мышлении;

4) научное познание слить с художественным мышлением, истину – с красотой. Высшим критерием истинного знания считать красоту и гармонию формы, а не просто соответствие мысли объекту (как это сформулировал еще Аристотель).

Об этом писал А. Эйнштейн: «Теория ценна сама по себе, независимо от фактов». Сходный тезис доказал также Ф.П. Рамсей: «Теория не сводится к фактам, ее системообразующее ядро образует постулат “Объект существует”», т.е. «ядро любой теории, описывающей объект А, составляет постулат типа “Существует А”». «А» – конструкт, идеализированный объект, возможно, ненаблюдаемый, недоступный эмпирическим методам познания. Например, в середине XIX в. Дж. Максвелл, стремившийся объяснить все известные электрические и магнитные явления, ввел постулат «существует электромагнитное поле». Термин «поле» (field) поначалу шокировал физиков из-за того, что, во-первых, данный объект является ненаблюдаемым (чистой фантазией автора) и, во-вторых, этот термин как можно догадываться, смешивает высокое с низким, науку с фермерством, с сельскохозяйственной деятельностью.

Превращение математики в отрасль промышленности. Математика со времени своего рождения была инструментом решения важных жизненных проблем. Сбор налогов, измерение площади полей, необходимое для справедливого раздела наследства, оценка длины пути и промежутков времени – жизненные задачи, возникавшие за тысячи лет до нашей эры. Именно это – та самая классика, которой мы до сих пор учим наших школьников. Инструменты для решения этих задач совершенствовались и продолжают развиваться.

В 650 г. число «ноль» вошло в индийскую математику, в 665 г. цивилизацией майя в Центральной Америке также была изобретена эта цифра. Математик Хоссейн Ашран пишет: «Введение нуля в десятичную систему счисления в тринадцатом веке было важнейшим достижением в развитии современной числовой системы и сделало легким и возможным оперирование большими числами. Без введения обозначения для нуля моделирование экономических, астрономических, физических, химических и промышленных процессов было бы немыслимым» (цит. по: [21, с. 76]).

Счеты с передвигаемыми костяшками появились в Китае примерно с 1200 г. В 2005 г. на сайте Forbes составляли рейтинг всех

изобретений по их влиянию на человеческую цивилизацию. Первое место занял нож, второе – счеты, третье – компас.

В 1614 г. шотландский математик Дж. Непер описал логарифмы, а в 1621 г. У. Отред предложил логарифмическую линейку. С помощью такого инструмента рассчитывалась первая советская атомная бомба.

В XX в. пришло время компьютеров. Обычно сначала ставится задача, а затем создается инструмент для ее решения. Здесь мы имеем обратную ситуацию: развитие технологий многократно превысило потребности в решении математических задач. Нынешние суперкомпьютеры работают в 10^{18} раз быстрее, чем первые образцы вычислительных машин.

Бифуркация, произошедшая в XIX в., разделила математику на теоретическую («которая делает то, что можно, так, как нужно») и прикладную («делающую то, что нужно, так, как можно»). Первая могла заниматься глубокими вопросами, решение которых могло потребовать нескольких столетий, имела несомненный приоритет перед прикладной, занимавшейся доступными текущими задачами.

Ныне ситуация изменилась. Компьютер и связанные с ним устройства заменили телефон, клубы и казино, стали основой для вооруженной борьбы и индустриализации. Наука переходит в промышленность! Математическая отрасль становится стратегическим ресурсом ведущих государств. Так же как создание атомной отрасли, это позволяет изменить мир. Появляется возможность сделать его «прозрачным», наблюдая и контролируя жизнь каждого человека. Открывается возможность социального рейтингования, при котором системы искусственного интеллекта, находясь над законом, в соответствии с заданными критериями будут разбираться в ситуациях, казнить, миловать или награждать людей и их семьи. Происходящее можно рассматривать как воплощение мечты Г. Лейбница, полагавшего что со временем «считающие машины» станут настолько информированными, объективными и беспристрастными, что начнут судить людей. Правда, современные судьи высказывают опасение, что будущее машинное правосудие станет еще более бесчеловечным. Тем не менее, по признанию Э. Сноудена, уже сегодня спецслужбы, используя компьютерные инструменты, держат «под колпаком» более миллиарда человек.

Отсюда видно, что на передний край вышла прикладная, компьютерная отрасль. Она определяет направление прогресса матема-

тики в XXI в., преобразует эту «вечную науку», ставит задачи и заставляет менять понятия, определяет новые приоритеты и приводит к открытиям. В самом деле, в течение трех веков во главе угла находилась «непрерывная» математика – математический анализ с его представлениями о бесконечно малых величинах и о бесконечности. Прикладная отрасль выводит на передний план дискретную математику, для которой эти понятия чужды. Компьютер не умеет работать с бесконечностями или устремлять какие-либо величины к нулю.

В качестве примера открытия можно привести криптографию с открытым ключом, основы которой заложили У. Диффи, М. Хеллман и Р. Меркле. Оказалось, что для передачи секретных сообщений достаточно, чтобы *только один* из адресатов владел закрытым ключом. При этом открытый ключ и расшифрованные сообщения могут быть переданы всем желающим. Идею этого подхода можно пояснить сравнением со щелью почтового ящика на входной двери дома. Каждый может бросить в эту щель свое сообщение, открытый ключ при этом соответствует адресу дома. Однако только тот, кто владеет секретным ключом, отпирающим дверь этого дома, может получить почту и прочесть сообщение.

Одновременно возник огромный спрос на сложные задачи, которые надо решать, если мы хотим прочесть сообщения, не зная секретного ключа. Так, в алгоритме Р. Ривеста, А. Шамира и Л. Адлемана для расшифровки надо разложить огромное число на простые множители.

Другой пример: в 2008 г. разработчик под псевдонимом Сатоси Накамото (возможно, под этим именем работала целая группа исследователей) предложил общий алгоритм системы *биткойн*. Ключевой элемент этой системы – непрерывная последовательность блоков информации, названная «блокчейн» (англ. *blockchain* – «цепь из блоков»). Это позволило впервые создать криптовалюты, не нуждающиеся в верификации администратором. Данное изобретение позволяет разрушить старую и создать новую финансовую отрасль, но также дает удивительно эффективные инструменты в руки криминала. Центральным банкам многих стран пришлось запрещать или жестко регулировать подобные новшества.

Будущее всей математики, по-видимому, во все большей мере станет определять компьютерная отрасль. Можно привести следующий пример. В конце XIX в. во многих городах России начали

активно строиться железные дороги. Купцы и влиятельные люди из ряда городов затратили большие усилия (и деньги!), чтобы в их городах таких дорог не было, чтобы по-прежнему люди ходили пешком или ездили на лошадях, чтобы удалось сохранить прежний уклад. Одним из таких городов был, например, Суздаль. История показала, что с точки зрения благополучия жителей и развития промышленности купцы-консерваторы были неправы. Хотя, конечно, в городах-заповедниках есть своя прелесть.

Формирование связей между различными областями математических исследований. В юбилейном сборнике, подводящем итоги развития математики к 2000 г., есть статья В.И. Арнольда с характерным названием «Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремесел?». Конечно, реальность такова, что мы имеем дело со все более узкой специализацией ученых, развивающих свое ремесло и часто не обращающих внимания на то, что делают коллеги. Однако надежда на самоорганизацию в научном пространстве остается.

Очень интересна оценка В.И. Арнольдом связей между различными направлениями математического творчества: «Существование таинственных связей между всеми этим различными областями – самая поразительная и прекрасная сторона математики (не имеющая никакого разумного объяснения). Опыт прошедших столетий показывает, что развитие математики было обусловлено не столько техническим прогрессом (больше всего поглощающим усилия математиков во все времена), сколько неожиданными открытиями взаимосвязей между ее различными областями (которые сделались возможны благодаря этим усилиям). Поток драгоценных докладов о текущем положении дел в различных математических областях напоминает сообщения с театра военных действий. Описание линии фронта с ее изгибами и повседневными колебаниями играет, конечно, весьма важную роль для участников сражения. Но пагубность раздробленности (к которой приводит увеличивающаяся специализация математиков и дробление математики на небольшие области) становится очевидной, когда пытаешься осмыслить развитие математики в прошлом со всеми ее ответвлениями» [1, с. 2].

Огромную роль в развитии междисциплинарных связей играет популяризация науки. В СССР выходили журналы со статьями ведущих отечественных ученых, написанными ясно и просто. Здесь можно вспомнить афоризм выдающегося физика Р. Фейнмана: «Ес-

ли вы ученый, квантовый физик и не можете в двух словах объяснить пятилетнему ребенку, чем занимаетесь, то вы шарлатан». Журналы «Знание – сила», «Техника молодежи», «Квант» пользовались популярностью, у школьных учителей появилась реальная возможность объяснить, чем же занимается сейчас наука, да и школьники, пролистав журнал в библиотеке, могли разобраться, что им ближе. Сегодня такие журналы потеснены Интернетом, однако потребность в общей картине мира у молодежи остается огромной, особенно из-за навязываемого потребительской культурой «кусочно-клипового» мышления.

Одному из авторов этих строк довелось в течение многих лет доказывать, что наши университеты являются таковыми по названиям, а не по существу. (Это произошло до «обуниверситечивания» обычных вузов, когда чиновники пустили слух, что университеты сохраняют, а обычные вузы закроют.) В самом деле, универсум (от лат. *universum*) понимается как мир в целом, как все сущее, взятое в единстве. И университетское образование должно давать картину мира, а не осуществлять узкую профильную подготовку. Эти рассуждения возымели действие, и в МГУ им. М.В. Ломоносова были организованы межкафедрские курсы. Студенты с одного факультета должны были выбрать курс с другого, прослушать и сдать его, разобраться в другом стиле мышления. Конечно, это только первый шаг к развитию междисциплинарности в учебе, но и он оказался очень полезным.

Стоит обратить внимание и на аспирантуру в США, в которой готовят будущих математиков. Например, в Беркли аспирант должен выбрать три больших математических курса на данный год. По ним читаются лекции, проводятся семинары, даются и проверяются домашние задания, организуются контрольные работы. При этом даются задания, требующие знаний и навыков одновременно в нескольких выбранных аспирантами курсах. В конце года проводится экзамен. Пересдач нет, в случае неудовлетворительного результата курс надо вновь осваивать в следующем году – с семинарами, домашними заданиями и контрольными. Результат тоже очевиден: подготовленный таким образом аспирант владеет несколькими областями математики.

Можно обратиться и к отечественному опыту научной самоорганизации. В течение ряда лет проводились конференции, посвященные математической биологии, на которые приглашались и ма-

тематики, и биологи. В результате удалось выйти на более высокий уровень понимания поставленных проблем, сформировать группы ученых, активно работающие в междисциплинарном поле.

Очевидно, стоит проводить совместные школы, встречи рабочих групп, конференции, приглашая туда математиков, работающих в разных областях. Это станет полезным шагом по превращению современной математики из набора ремесел в единую науку.

Математика как метафора. Изменение приоритетов, понятий, категорий. Очень интересной является мысль Ю.И. Манина, трактующего математику как *метафору*: «Рассматривая математику как метафору, я хочу подчеркнуть, что интерпретация математического знания является актом в высшей степени творческим. В некотором смысле математика – это роман о природе и человечестве. Точно сказать, чему именно нас учит математика, невозможно так же, как невозможно сказать, чему нас учит “Война и мир”. Само это обучение погружено в процесс рефлексии по его поводу. Может показаться, что это мнение идет вразрез с освященной временем традицией применения математики к научным и техническим вычислениям; на самом деле я всего лишь хочу восстановить некоторый баланс между технологической и человеческой сторонами математики» [20].

Есть много сложных задач, и человечество в ходе развития создало множество инструментов, позволяющих их решить. Но математика, как и искусство, имеет дело с простыми, парадоксальными, необычными сущностями, с которыми следует оперировать принятыми в этих областях подходами. Эта мысль возникает вновь и вновь при сравнении алгебраической и геометрической сторон математики. «Обе они обладают сильной эстетической компонентой. При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру – с музыкой» [34, с. 9].

В 1902 г. вышла в свет книга А. Пуанкаре «Наука и гипотеза». В этой книге выдающийся математик утверждал, что математика обязана своей творческой силой произвольности выбранных первоначальных предположений и определений, которые затем корректируются с помощью сравнения выводов из них со строением наблюдаемого мира. Иными словами, существенен не только «мгновенный снимок» с его странными доказательствами и жесткими рамками (парадигма Парменида), но и сам «фильм» с логикой изменения математических построений, а иногда и их целей (парадигма Геракла).

лита). Эта логика и позволяет выйти из «башни из слоновой кости» «теоретической математики» и обратиться лицом к реальности [12].

Заметим, что такой взгляд был близок и другим классикам. Так, «согласно Сильвестру, *математическая идея не должна застывать в аксиоматической форме, а должна течь подобно реке. Надо всегда быть готовым изменить аксиомы, сохраняя идею*» [1].

Очень важно понять направление изменений. Студенту досадно, когда он выучил предмет, но совсем не тот, который надо сдавать. Что и в каком объеме менять, на какие области ориентироваться? Суждения В.И. Арнольда о творчестве А. Пуанкаре позволяют четче отделить ситуацию XX в. от той, которая складывается в начале XXI в.: «Для Пуанкаре, который создал современную математику, топологию и теорию динамических систем, будущее математики лежало в развитии математической физики, ориентированной на описание релятивистских и квантовых явлений. Между прочим, Пуанкаре объяснял, что *только неинтересные задачи могут быть сформулированы четко и решены полностью*. Согласно Пуанкаре, надо постараться понять, что может быть *изменено* в формулировке проблемы. Прежде всего он имел в виду вариацию коэффициентов уравнений в бифуркационных задачах и все аргументы типа общего положения – предметы, которые теперь называются теорией особенностей, глобальным и функциональным анализом» [1].

Сейчас представляется, что необходимые изменения должны быть более радикальными. Учитывая ключевое значение развития науки и технологии как источника прогресса общества мировую историю можно рассматривать именно с этих позиций. Такой подход был разработан более полувека назад Д. Беллом в теории постиндустриального развития [3].

При этом подходе мировая история делится на три периода: традиционный, индустриальный и постиндустриальный.

В *традиционный период* (до XX в.) усилия направлены на исследование и покорение природы. Это время взлета математики, физики, химии. Основные достижения на данном этапе с XVII в. связаны с развитием ньютоновской парадигмы. Основным инструментом математического моделирования становятся дифференциальные уравнения.

Индустриальный период (XX в.) – время машин, и главная среда них – компьютер. В центре внимания находятся задачи управле-

ния, большие системы, планирование, экономика, логистика, прогнозирование, работа с большими данными, крупные научно-технические проекты. Все они, в свою очередь, требуют масштабных компьютерных проектов. Рождаются междисциплинарные подходы, позволяющие разобраться в этом многообразии, увидеть единое во многом.

В *постиндустриальный период* (в который мир входит сейчас) в фокусе оказываются компьютерные сети, задачи мониторинга, искусственный интеллект, воспроизводящий различные элементы сознания, рефлексивные системы. В отличие от предыдущих этапов возникают совсем иные проблемы и связанные с ними математические инструменты. Речь идет о социологии, управлении массовым сознанием, нейронауке, создании материалов и систем с желаемыми свойствами, коллективных действиях роботов и других компьютерных систем, замене людей роботами в ряде профессий. Математика новой эпохи только начинает складываться, а прежние понятия и инструменты существенно меняются.

Первая эпоха, с которой связана основная часть «математической классики», имеет дело с *объектом* труда, вторая сосредоточена на совершенствовании *инструмента* деятельности. Нынешняя, *постиндустриальная*, эпоха меняет *субъект* труда. Персональные компьютеры, планшеты, мобильные телефоны уже радикально изменены. И теперь представим, что благодаря усилиям математической и компьютерной промышленности у каждого из нас появится интеллектуальный помощник с коэффициентом интеллектуальности на уровне IQ лауреатов Нобелевской премии (155–165). Очевидно, математические метафоры для этого мира должны быть другими. Их предстоит создать, а также потребуется существенно изменить инструменты, которыми мы пользуемся. «Нельзя дважды войти в одну реку», – объяснил Гераклит.

Изменение социальной функции математики. Подводя итог развитию математики, В.И. Арнольд связывает ее основные достижения с ключевыми сферами применения: «Вся математика делится на три части: криптография (оплачиваемая ЦРУ, КГБ и им подобными), гидродинамика (поддерживаемая производителями подводных лодок) и небесная механика (финансируемая военными и другими организациями типа НАСА, имеющими отношение к ракетам)» [1, с. 1]. Отсюда и неутешительный прогноз: «Можно также надеяться, что грядущие ядерные гражданские войны и военные

конфронтации приведут к большему признанию роли науки обществом и к парадоксальному расцвету мировой математики (подобному расцвету, который был в России после ужасной революции большевиков» [1, с. 7].

Другими словами, математики сделают то, что им прикажут лица, принимающие решения. Однако, на наш взгляд, ситуация существенно изменилась и может быть совсем другой.

Со времен выдающегося математика и организатора науки, академика М.С. Келдыша стало ясно, что организация математиков может быть системным интегратором крупных научно-технических проектов. Математическая модель определяет, может ли осуществиться задуманное и каких знаний для этого не хватает. Совершается переход от обслуживания того, что велено, к проектированию будущего и стратегическому прогнозу.

В самом деле, мировая динамика, основы которой были заложены в трудах Д. Медоуза и Дж. Форрестера, во многом изменила общественное сознание. Стало ясно, что без технологий переработки отходов и рекультивации земель, без поиска новых источников развития, без использования возобновляемых природных ресурсов мир ждет коллапс. Это привело к стремительному развитию экологии, к развертыванию движения «зеленых», к признанию ведущими политиками ключевого значения сохранения окружающей среды, а затем и к соответствующим технологиям и социальным сдвигам.

Исследования группы Н.Н. Моисеева (и последующие исследования К. Сагана) по изменению климата после масштабного применения ядерного оружия сыграли важную роль в заключении договоров между СССР и США об ограничении стратегических наступательных вооружений. В результате приложенных усилий ядерный потенциал сверхдержав был существенно уменьшен.

Прикладная математика вновь и вновь показывает, что целью расчетов оказываются не числа, а понимание. Появляется возможность отделить главное от второстепенного, и математика играет в этом принципиальную роль. Поэтому стоит упомянуть глобальную демографию и соответствующие модели, предложенные выдающимся отечественным просветителем С.П. Капицей. Они показали, что наша эпоха будет трактоваться историками будущего не как век атома или космоса, а как *время глобального демографического перехода*. Отсюда следует необходимость кардинального изменения жизнеобеспечивающих технологий.

Директор Института прикладной математики РАН С.П. Курдюмов говорил: «Ученые должны быть спасителями человечества. Их задача – указывать пути в будущее, а общество будет выбирать, какой из них станет реальностью». Математика будет играть в этом ключевую роль.

Большие данные и искусственный интеллект в развитии математики. При переходе к прикладной парадигме развития математики очень важно избежать тупиковых направлений. Такие направления появились в связи с совершенствованием инструментов работы с большими данными и революцией в области искусственного интеллекта, сопряженной с развитием нейронных сетей следующего поколения. Возникло ощущение, что компьютерные инструменты работы с большими данными и нейронные сети позволяют обойтись без математических моделей. В ряде организаций уже ставится вопрос о ликвидации отделов, занимающихся математическим моделированием. Такой подход представляется ошибочным. Дело в том, что применение математики, как правило, направлено не на получение какого-то числа, а на понимание явлений, процессов, взаимосвязей между разными факторами.

Представим для определенности, что мы загрузили данные о положении звезд и планет на небосводе. На этой основе компьютер начнет, проанализировав статистику, давать интересующую нас информацию. Не понадобится ни «Альмагест» Птолемея, ни теория Коперника о вращении Земли вокруг Солнца, ни тем более законы Ньютона, и особенно закон всемирного тяготения, – важнейшие достижения нашей культуры. Подобные инструменты, на первый взгляд, создают ощущение ненужности науки. Конечно, это не так. Математика учит, что путь во многих случаях не менее важен, чем результат, кроме того, он открывает новые перспективы, сначала бывшие неочевидными. Достаточно вспомнить Евклида, который, разбираясь с задачей правильных многогранников, создал огромную теорию и определил стиль многих последующих размышлений.

Одним из принципиальных результатов математики и теории самоорганизации стало установление во множестве систем (в том числе достаточно простых, например $x_{n+1}=1-2|x_n|$) *горизонта прогноза* – характерного времени, на которое мы можем предсказать состояние системы [25]. С одной стороны, это показывает ограниченность возможностей науки, с другой стороны, убеждает, что желая заглянуть в будущее, мы должны выполнять прогноз вновь

и вновь, с третьей же стороны, делает очевидным, что никакие компьютерные «игрушки» тут не помогут. Проблема здесь принципиальная, а не техническая.

Кроме того, в настоящее время растет популярность искусственного интеллекта. Например, чат-ботом Chat-GPT спустя два месяца после его представления начали пользоваться около 100 млн активных ежемесячных пользователей, поэтому его часто называют «самым быстрорастущим приложением в истории». В январе 2023 г число уникальных пользователей чат-бота достигло 13 млн, что в два раза больше, чем в декабре 2022 г. Это приложение беседует, отвечает на вопросы, пишет школьные сочинения, а иногда и курсовые работы. Вместе с тем со временем происходят галлюцинации ИИ: программа выдает результаты, которые не являются реальными, не соответствуют данным, на которых был обучен алгоритм, или не следует никакому известному шаблону. Например, некоторое время назад компания Google представила своего чат-бота Bard, который отвечал на вопросы относительно космического телескопа с огромным зеркалом «Джеймс Уэбб». Программа прекрасно отвечала на вопросы, но при этом утверждала, что этот телескоп сделал самый первый снимок планеты за пределами Солнечной системы. Эта история получила огласку и обошлась компании-разработчику Alphabet примерно в 100 млрд долл. капитализации.

С точки зрения математики это понятно: со времен Ж. Адамара задачи делятся на корректные и некорректные. В последнем случае небольшие вариации в исходных данных могут приводить к неприемлемому решению. Задача интерполяции является корректной, задача экстраполяции – нет, в то время как программа дает ответы на все задаваемые ей вопросы. Исходными данными для программы Bard является содержание Интернета и других сетей, где наряду с верной информацией есть и грубые ошибки. Нейронные сети, с которыми связан бум в исследовании искусственного интеллекта, работают «снизу вверх», т.е., по сути, решают задачу распознавания образов, набор которых возникает на основе полученной информации.

Естественно, ни анализ больших данных, ни использование «нейронок» не заменит математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов – важнейших достижений всей нашей культуры, но дополняет их. Более того, взлет «нейронок» обусловил применение алгоритма обратного распространения ошибки. Последний, в свою очередь, воплощает метод Ньютона, сводящий ре-

шение уравнения $f(x)=0$ к оценке предела последовательности $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n)$. Остается неясным, почему этот метод эффективно работает в пространстве огромного числа измерений. Новые объекты, поле приложения которых стремительно растет, открывают огромный простор для развития математических теорий. «Возможно, требуется “новая математика” для того, чтобы решить открытые проблемы ИИ или список знаменитых “проблем Гильберта” начала XX в., чтобы перейти от большого количества эмпирических результатов к стройной и понятной теории», – пишет один из ведущих специалистов в области ИИ [22, с. 108].

Проблема больших данных требует переосмысления роли ученого в создании нового интерфейса «человек – ИИ», так как все более активную функцию в сборе, обработке и анализе данных выполняет цифровой помощник. Отсюда гипотеза о новой научной парадигме, создающей социально-цифровой мир и тем самым расширяющей человекообразный мир с помощью ИИ [27].

Новая бифуркация. В конце XIX в. «теоретическая» математика и «прикладная» математика разделились и начали развиваться, исходя из разных критериев. В этом было много положительного: математика смогла переосмыслить свои основания и сосредоточиться на внутренних проблемах. А в 1970 г. был организован факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. В его организации огромную роль сыграли академики А.Н. Тихонов и М.В. Келдыш, осознавшие важность компьютерной реальности для страны, считавшие необходимым подготовить кадры для этой стремительно развивающейся сферы. Этот факультет удачно дополнял механико-математический факультет МГУ.

Наступило время синтеза и быстрых перемен. Огромная отрасль математических и компьютерных технологий оказалась «разбрана» между различными компаниями, ведомствами, программами. Это не дает быстрого необходимого эффекта. Неудачи государственной программы по развитию цифровой экономики в РФ, а затем и федерального проекта по искусственному интеллекту это наглядно показали. Очевидно, пришло время объединить усилия. Компьютерная реальность поставила перед математикой множество сложных и интересных задач, привела к появлению новых образов и представлений. Здесь можно вспомнить фракталы, клеточные автоматы, режимы с обострением и другие типы неустойчивости, компьютерные доказательства многих теорем, точные решения ряда

игр. С другой стороны, математические результаты остро нужны компьютерщикам. Достаточно вспомнить генерацию случайных и простых чисел, одностороннее шифрование, методы распознавания образов, генерации и алгоритмов решения сложных задач, ставших вместе с коллективами, владеющими этими технологиями, стратегическими ресурсами страны.

Пришло время собирать то, что было бессмысленно растрчено за последние десятилетия или важность чего не была понята. В самом деле, более 40 лет назад академик А.А. Самарский предлагал создать госпрограмму по математическому моделированию, разобравшись с инструментами в этой области, имеющимися в стране и мире, с тем, что реально используется, и тем, что следовало бы создать. К сожалению, эта инициатива не получила поддержки. Однако сейчас нужно объединение усилий в гораздо более крупном масштабе.

Можно вспомнить реформы Петра I, который считал, что Россия должна овладеть технологиями строительства кораблей, литья пушек, возведения крепостей, навигацкими и бухгалтерскими делами. Попытки Петра I действовать традиционными методами, заказывая нечто тем или иным подрядчикам, используя торговые инструменты, вновь и вновь приводили к воровству и растрате денег. Оказалось, что нужны совсем другие инструменты для организации технологического рывка.

Было бы важным создание Госкомитета по математическим и компьютерным исследованиям и технологиям. В эпоху санкций это жизненно необходимо.

Приведем несколько примеров, которые показывают остроту нынешней ситуации, требующей координации усилий в развитии обсуждаемой отрасли.

По оценке Правительства РФ, в машиностроении страны только около четверти информационных технологий являются российскими, все остальное – иностранный софт, к тому же из недружественных стран.

По оценке Сбербанка России, количество кибератак в нашей стране увеличилось в 2022 г. почти в 15 раз по сравнению с 2021 г. Лидером стал финансовый сектор (45%), на втором месте – ритейл (21%), на телеком-сферу пришлось 18%, на сферу развлечений – 9%, на образование – 4%.

Ущерб мировому бизнесу от киберпреступников в 2002 г. достиг 6 трлн долл. Например, в 2022 г. была взломана сеть Росавиации, и ведомство утратило 65 терабайт своей информации. Хакеры удалили всю почту

и документооборот, а резервных копий у ведомства не было. Это вынудило его вернуться к бумажному документообороту и все письма отправлять по почте.

Рынок страхования кибербезопасности в 2021 г. оценивался в 9,29 млрд долл., эксперты прогнозируют, что к 2027 г. он вырастет до 28,25 млрд долл. и будет расти со скоростью 20% в год [10].

Необходимость масштабных решений очевидна! «Математической промышленности» остро нужны наука, технологии и другой уровень организации.

Выводы

Эпистемологические

1. Современная цивилизация, а с нею рационализм, наука и математика проходят период кризиса – кризиса сложности. Он порожден исчерпанностью старых методов, которые не способны решать новые проблемы.

2. Кризис сложности в математике может быть разрешен в ходе дальнейшей эволюции математики в следующих направлениях: а) признание математики как науки о творчестве и доказательстве, причем признание интуитивного прозрения более важным, чем логическое обоснование, доказательство; б) перенос фокуса деятельности ученых с доказательств на интуитивное творчество: фантазии, воображение, выдвижение принципиально новых понятий, образов, методов; будущий ученый – прежде всего интуитивист,двигающий новые теоремы-догадки; в) автоматизация процесса доказательства, передача искусственному интеллекту логической функции обоснования (опровержения, уточнения) теорем, сформулированных человеком.

3. Кризис сложности в математике является частным выражением кризиса науки в целом и рационализма вообще. Рационализма как оперирования неподвижными понятиями и образами – в соответствии с законом тождества в логике Аристотеля и многих последующих вариациях классической логики [7].

4. Принципиальное преодоление современного кризиса сложности возможно лишь при переходе ученых к мышлению движущимися понятиями, в частности к обобщенному закону тождества.

Социально-культурные

1. Для преодоления кризиса сложности в коммуникативном отношении, для уменьшения информационной энтропии в массиве научных (в том числе математических) публикаций необходимы следующие меры: а) выделение *20–30 крупных проблем* (подобно проблемам Гильберта), которые необходимо решить, чтобы обеспечить существенный прогресс в математике; б) обращение ко всем математикам с призывом к объединению всех групп исследователей в *единое мировое сообщество* (независимо от языка, национальности, политических и личных предпочтений); в) публикация единого для всех *мирового дайджеста* новостей и открытий с акцентом на результаты по критериям фундаментальности и новизны.

2. Для реализации указанных мер необходима перестройка системы образования на математических факультетах в направлениях: а) *фундаментализации* образования с целью освоения студентами наиболее интегративных концепций математики (теории множеств, теории категорий и т.п.) и подготовки аспирантов к решению наиболее трудных проблем; б) *прагматизации* образования с целью приближения его к практическим проблемам общества (проблемам численных методов, информатизации, разработки ИИ и т.п.).

3. Математика должна развиваться как ядро рационализма нового типа, который соединяет научное и художественное мышление в единую концепцию «истины-красоты». В ней рационально-логическое мышление и эмоционально-художественное переживание через интуитивное прозрение, фантазию, воображение соединяются в единый процесс творчества. Попытки приблизиться к этому многократно предпринимали (или говорили об этом) различные ученые, художники, архитекторы, музыканты, поэты. Леонардо Да Винчи, В. Хлебников, А.Л. Чижевский, П. Дирак и др. Среди современных – математик А.Т. Фоменко [29], художница Я. Кусамэ [13], философ В.О. Лобовиков [15], ученый И.Н. Вольнов [7].

Образовательно-педагогические

Средний уровень математического образования в России стремительно падает, и это немедленно сказывается на подготовке инженеров, военных, компьютерщиков, врачей, экономистов и пред-

ставителей многих других профессий. Чтобы выйти из кризиса математического образования необходимо следующее:

1) возвращение к единому образовательному пространству, введение одного учебника для обычных школ и одного для всех спецшкол страны. Это позволит восстановить методическую работу – опытом лучших учителей смогут воспользоваться все;

выбор и тиражирование лучшего учебника. Академик А.Н. Тихонов говорил о книгах по математике: «Учебник должен быть написан так, чтобы ученик мог и хотел освоить его сам, даже без помощи учителя». Возможно, в курсе геометрии следует вновь учиться по учебнику А.П. Киселева, что отмечал академик В.И. Арнольд;

2) отказ от личностно-ориентированной «компетентностной» модели и возвращение к предметноцентричному образованию, высокую эффективность которого показала советская средняя школа. Уровень школьника должен определяться знаниями, умениями, навыками, освоенными при обучении, а уровень учителя тем, насколько успешно он может обучать предмету и насколько может заинтересовать им. Бюрократическое сопровождение учебной деятельности должно при этом иметь десятистепенное значение;

3) отмена единого государственного экзамена (ЕГЭ) и разделение выпускного экзамена в школе и вступительного экзамена в вузе. Первый выявляет тех, кто может получить аттестат о среднем образовании, второй должен выявить лучших, готовых к обучению в вузе. Совмещение этих экзаменов было нелепостью, во многом вызвало кризис российского математического образования;

4) отказ от ранней специализации в средней школе, лишаящей детей мировоззрения и сужающей перспективы их дальнейшего развития;

5) быстрый отказ от «болонизации», от «магистров» и «бакалавров», возвращение к специалитету. Необходимо определить, что на самом деле должен знать выпускник мехмата, и с этих позиций формировать институтские программы;

6) повышение уровня подготовки выпускников, предполагающих преподавать школьную математику. Учителя должны уметь решать школьные задачи! Достойная зарплата и высокий статус должны изменить положение учителя математики в средней школе;

7) подготовка на современном уровне «компьютерных ученых» и «компьютерных инженеров» в тесной связи с использовани-

ем математических основ информатики; создание российских компьютерных инструментов, имеющих стратегическое значение;

8) введение курсов математического моделирования в большинстве вузов России не только для естественно-научных и инженерных, но и для гуманитарных специальностей.

Организационно-административные

Необходимо создание госкомитета по математическим и компьютерным исследованиям и технологиям для курирования и системной интеграции этой сферы деятельности, представляющей в настоящее время стратегический ресурс России. Так же как в других отраслях инновационной экономики, нужно обеспечить цикл воспроизводства инноваций: *мониторинг и определение тенденций развития отрасли → целеполагание → фундаментальные исследования* (характерное время – 40–50 лет, условная стоимость – 1 руб.) → *прикладные работы* (характерное время – 10–12 лет, условная стоимость – 10 руб.) → *практическая реализация созданного* (характерное время – один-два года, условная стоимость – 100 руб.) → *использование результатов, алгоритмов, стратегий, программ, платформ, систем* → *мониторинг и определение тенденций развития*. Это сложный инструмент, использование которого в стране требует постоянных системных усилий. Однако без него Россия будет откатываться назад по сравнению со странами – лидерами технологического развития.

Литература

1. Арнольд В.И. Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремесел? // Математика: границы и перспективы / Пер. с англ. под ред. Д.В. Аносова и А.Н. Паршина. М.: ФАЗИС, 2005. С. 1–18.
2. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г., Посашков С.А. Культурный контекст математики / Горизонты синергетики. Структуры, хаос, режимы с обострением / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: ЛЕНАНД, 2019. С. 409–425. (Синергетика: от прошлого к будущему; № 85).
3. Белл Д. Грядущее постиндустриальное общество: опыт социального прогнозирования / Пер. с англ. под ред. В.Л. Иноземцева. 2-е изд. М.: Academia, 2004. 788 с.
4. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. М.: Иностр. лит., 1963. С. 245–259.
5. Вейль Г. Философия математики // Вейль Г. О философии математики. Москва; Ленинград: Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. С. 34–91.

6. Вигнер Е. Пределы науки / Вигнер Е. Этюды о симметрии / Пер. с англ. Ю.А. Данилова под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1971. 319 с.
7. Войцехович В.Э., Малинецкий Г.Г. Логика. Математика. Рационализм: От Парменида к Гераклиту. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2023. 44 с. (Препринт № 15).
8. Громов М.Л. Кольцо тайн: вселенная, математика, мысль. М / Пер. с англ. МЦНМО, 2017. 335 с.
9. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Москва; Ленинград: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937. 432 с.
10. Королева Л. Как сохранить выгоды от цифровизации // Эксперт. 2023. № 17–18.
11. Котов Ю.Б. Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики. 2-е изд. М.: URSS, 2011. 328 с.
12. Красота и гармония в цифровую эпоху / Малинецкий Г.Г., Войцехович В.Э., Вольнов И.Н., Колесников А.В., Скиба И.Р., Сороко Э.М.. – М.: ЛЕНАНД, 2021. 240 с.
13. Кусам Я. Бесконечные миры. URL: <https://www.ivu.ru/watch/224500>.
14. Лакатос И. Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967. 152 с.
15. Лобовиков В.О. Формальный и дедуктивный вывод эквивалентности истины и красоты в аксиоматической системе эпистемологии априорности знания (от Пифагора и Платона к Дж. Китецу, А. Пуанкаре, Г. Вейлю, В. Гейзенбергу и П. Дираку) // Философия науки. 2019. № 1 (80). С. 70–84.
16. Маклейн С. Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004. 352 с.
17. Малинецкий Г.Г. Синергетика – новый стиль мышления: Предметное знание, математическое моделирование и философская рефлексия в новой реальности. М.: URSS, 2022. 288 с. (Синергетика: от прошлого к будущему; № 105; Будущая Россия; № 35).
18. Малинецкий Г.Г. Философия и синергетика // Наука. Общество. Будущее: Тез. докл. I Междунар. конф. Тверь: ТвГУ, 2023. С. 11–13.
19. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: URSS, 2016. 280 с. (Синергетика: от прошлого к будущему; № 28).
20. Манин Ю.И. Математика как метафора. 2-е изд. М.: МЦНМО, 2010. 424 с.
21. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М.: Наука. 1979. 224 с.
22. Оселедец И.В. Успехи и проблемы машинного обучения // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности: Тр. 5-й Междунар. конф. (3–4 февраля 2022 г., г. Москва). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. С. 102–108.
23. Панов В.Ф. Современная математика и ее творцы. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 647 с.
24. Резников В.М. Об универсальной применимости и эффективности математики // Философия науки. 2019. № 4 (83). С. 80–87.
25. Рохмистров В.Г. Парменид «О природе»: Философское прочтение. СПб.: РХГА, 2021. 205 с.
26. Свидерский В.И., Кармин А.С. Конечное и бесконечное: Философский аспект проблемы. М.: Наука, 1966. 320 с.
27. Смирнов С.А. Наука как институт развития: вызовы и новые модели (Проектная идея) // Философия науки. 2021. № 1 (88). С. 45–64.
28. Смирнов С.А. К вопросу о четвертой парадигме в науке // Философия науки. 2022. № 4 (95). С. 3–20.

29. Фоменко А.Т. Математика, миф, «Мастер и Маргарита» в 199 картинах: Смыкая вершины рационального мышления с глубинами архаического и бессознательного. М.: ЛЕНАНД, 2023. 424 с.
30. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 555 с.
31. Хлебалин А.В., Целищев В.В. Понимание математического доказательства: логика vs математика // Философия науки. 2022. № 2 (93). С. 64–70.
32. Целищев В.В., Хлебалин А.В. Концептуальная и формальная строгость математического доказательства // Философия науки. 2022. № 1 (92). С. 64–70.
33. Шапиро С. Философия математики / Пер. с англ. В.В. Целищева. – М.: Канон+, 2022. С. 288.
34. Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. 348 с.

References

1. Arnold, V.I. (2005). Polimatematika: yavlyaetsya li matematika edinoi naukoj ili naborom remesel? [Polymathematics: Is mathematics a single science or a set of arts?]. In: Matematika: granitsy i perspektivy [Mathematics: Frontiers and Perspectives]. Transl. from English, ed. by D.V. Anosov and A.N. Parshin. Moscow, Fazis Publ., 1–18. (In Russ.).
2. Akhromeeva, T.S., G.G. Malinetsky & S.A. Posashkov. (2019). Kulturnyy kontekst matematiki [Cultural context of mathematics]. In: Malinetsky, G.G. (Ed.). Gorizonty sinergetiki: Struktury, kaos, rezhimy s obostreniem [Horizons of Synergetics: Structures, Chaos, Regimes with Exacerbation]. Sinergetika: ot proshlogo k budushchemu [Synergetics: from Past to Future], No. 85. Moscow, LENAND Publ., 409–425.
3. Bell, D. (2004). Gryadushchee postindustrialnoe obshchestvo: opyt sotsialnogo prognozirovaniya [The Coming of Post-industrial Society: A Venture of Social Forecasting]. Transl. from English, ed. by V.L. Inozemtsev. 2nd ed. Moscow, Academia Publ., 788. (In Russ.).
4. Bourbaki, N. (1963). Arkhitektura matematiki [The Architecture of Mathematics]. In: Ocherki po istorii matematiki [Essays on the History of Mathematics]. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 245–259. (In Russ.).
5. Weyl, H. (1934). Filosofiya matematiki [The philosophy of mathematics]. In: Weyl, H. O filosofii matematiki [On the Philosophy of Mathematics]. Moscow & Leningrad, GTTI Publ. [State Technical-Theoretical Publ.], 34–91. (In Russ.).
6. Wigner, E. (1971). Predely nauki [The limits of science]. In: Wigner, E. Etyudy o simmetrii [Essays on Symmetry]. Transl. from English by Yu.A. Danilov, ed. by Ya.A. Smorodinsky. Moscow, Mir Publ., 319. (In Russ.).
7. Voitsekhovich, V.E. & G.G. Malinetsky. (2023). Logika. Matematika. Ratsionalizm: ot Parmenida k Geraklitu [Logic. Mathematics. Rationalism: from Parmenides to Heraclitus]. Preprint No. 15. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics Publ., 44.
8. Gromov, M. (2017). Koltso tayn: Vselennaya, matematika, mysl [Great Circle of Mysteries: Mathematics, the World, the Mind]. Transl. from English. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ., 335. (In Russ.).
9. Klein, F. (1937). Lektsii o razvitiit matematiki v XIX stoletii [Lectures on the Development of Mathematics in the 19th Century]. Moscow & Leningrad, GONTI Publ. [State Joint Scientific and Technical Publ.], 432. (In Russ.).
10. Koroleva, L. (2023). Kak sokhranit vygodu ot tsifrovizatsii [How to Preserve Benefits of Digitalization]. Ekspert [Expert], 17–18.

11. *Kotov, Yu.B.* (2011). *Novye matematicheskie podkhody k zadacham meditsinskoy diagnostiki* [New Mathematical Approaches to Problems of Medical Diagnostics]. Moscow, URSS Publ., 328.
12. *Malinetsky, G.G., V.E. Voitsekhovich, I.N. Volnov, A.V. Kolesnikov, I.R. Skiba & E.M. Soroka.* (2021). *Krasota i garmoniya v tsifrovuyu epokhu* [Beauty and Harmony in the Digital Age]. Moscow, LENAND Publ., 240.
13. *Kusama:* *Beskonechnye miry* [Kusama: Infinity]. Available at: <https://www.iv.ru/watch/224500>.
14. *Lakatos, I.* (1967). *Dokazatelstva i oproverzheniya: Kak dokazyvayutsya teoremy* [Proofs and Refutations: How Theorems Are Proven]. Moscow, Nauka Publ., 152. (In Russ.).
15. *Lobovikov, V.O.* (2019). Formalnyy i deduktivnyy vyvod ekvivalentnosti istiny i krasoty v aksiomaticheskoy sisteme epistemologii apriornosti znaniya (ot Pifagora i Platona k Dzh. Kitsu, A. Puankare, V. Geyzenbergu i P. Diraku) [Formal and deductive inference of the equivalence of truth and beauty in the axiomatic system of epistemology of a priori knowledge (from Pythagoras and Plato to J. Keats, A. Poincaré, G. Weil, W. Heisenberg and P. Dirac)]. *Filosofiya nauki* [Philosophy of Science], 1 (80), 70–84.
16. *MacLane, S.* (2004). *Kategorii dlya rabotayushchego matematika* [Categories for the Working Mathematician]. Moscow, Fizmatlit Publ., 352. (In Russ.).
17. *Malinetsky, G.G.* (2022). *Sinergetika – novyy stil myshleniya: Predmetnoe znanie, matematicheskoe modelirovanie i filosofskaya refleksiya v novoy realnosti* [Synergetics – a New Style of Thinking: Subject Knowledge, Mathematical Modeling and Philosophical Reflection in a New Reality]. *Sinergetika: ot proshlogo k budushchemu* [Synergetics: from Past to Future], No. 105. *Budushchaya Rossiya* [Future Russia], No. 35. Moscow, URSS Publ., 288.
18. *Malinetsky, G.G.* (2023). *Filosofiya i sinergetika* [Philosophy and synergetics]. In: *Nauka, obshchestvo, budushchee: Tez. dokl. I Mezhdunar. konf.* [Science, Society, Future: Theses of the Reports of the 1st International Conference]. Tver, Tver State University Publ., 11–13.
19. *Malinetsky, G.G., A.B. Potapov & A.V. Podlazov.* (2016). *Nelineynaya dinamika: podkhody, rezultaty, nadezhdy* [Nonlinear Dynamics: Approaches, Results, Hopes]. *Sinergetika: ot proshlogo k budushchemu* [Synergetics: from Past to Future], No. 28. Moscow, URSS Publ., 280.
20. *Manin, Yu.I.* (2010). *Matematika kak metafora* [Mathematics as a Metaphor]. 2nd ed. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ., 424.
21. *Moiseev, N.N.* (1979). *Matematika stavit eksperiment* [Mathematics Performs an Experiment]. Moscow, Nauka Publ., 224.
22. *Oseledets, I.V.* (2022). *Uspekhi i problemy mashinnogo obucheniya* [Successes and problems of machine learning]. In: *Proektirovanie budushchego. Problemy tsifrovoy realnosti: Tr. 5-y Mezhdunar. konf. (3–4 fevralya 2022 g., g. Moskva)* [Futurity Designing. Digital Reality Problems: Proceedings of the 5th International Conference (February 3–4, 2022, Moscow)]. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics Publ., 102–108.
23. *Panov, V.F.* (2011). *Sovremennaya matematika i ee tvorstsy* [Modern Mathematics and Its Creators]. Moscow, Bauman Moscow State Technical Univrsity Publ., 647.
24. *Reznikov, V.M.* (2019). *Ob universalnoy primenimosti i effektivnosti matematiki* [On universal applicability and efficiency of mathematics]. *Filosofiya nauki* [Philosophy of Science], 4 (83), 80–87.
25. *Rokhmistrov, V.G.* (2021). *Parmenid “O prirode”: Filosofskoe prochenie* [Parmenides, “On Nature”: A Philosophical Reading]. St. Petersburg, Russian Christian Humanitarian Academy Publ., 205.

26. *Svidersky, V.I. & A.S. Karmin.* (1966). Konechnoe i beskonechnoe: Filosofskiy aspect problemy [Finite and Infinite: Philosophical Aspect of the Problem]. Moscow, Nauka Publ., 320.
27. *Smirnov, S.A.* (2022). K voprosu o chetvertoy paradigme v nauke [On the fourth paradigm in science]. *Filosofiya nauki [Philosophy of Science]*, 4 (95), 3–20.
28. *Smirnov, S.A.* (2021). Nauka kak institut razvitiya: vyzovy i novye modeli (Proektnaya ideya) [Science as an institute of development: challenges and new models (A project idea)]. *Filosofiya nauki [Philosophy of Science]*, 1 (88), 45–64.
29. *Fomenko, A.T.* (2023). Matematika, mif, “Master i Margarita” v 199 kartinakh: Smykaya vershiny ratsionalnogo myshleniya s glubinami arkhaiskogo i bessoznatelnogo [Mathematics, Myth, “The Master and Margarita” in 199 Paintings: Joining the Heights of Rational Thinking and the Depths of the Archaic and Unconscious]. Moscow, LENAND Publ., 424.
30. *Fraenkel, A.A. & Y. Bar-Hillel.* (1966). Osnovaniya teorii mnozhestv [Foundations of Set Theory]. Moscow, Mir Publ., 555. (In Russ.).
31. *Khlebalin, A.V. & V.V. Tselishchev.* (2022). Ponimanie matematicheskogo dokazatelstva: logika vs. matematika [Understanding of the mathematical proof: logic vs. mathematics]. *Filosofiya nauki [Philosophy of Science]*, 2 (93), 63–74.
32. *Tselishchev, V.V. & A.V. Khlebalin.* (2022). Kontseptualnaya i formalnaya strogot matematicheskogo dokazatelstva [Conceptual and formal rigor of mathematical proof]. *Filosofiya nauki [Philosophy of Science]*, 1 (92), 64–70.
33. *Shapiro, S.* (2022). *Filosofiya matematiki [Thinking about Mathematics]*. Transl. from English by V.V. Tselishchev. Moscow, Kanon+ Publ., 511. (In Russ.).
34. *Shafarevich, I.R.* (1999). *Osnovnye ponyatiya algebrы [Basic Notions of Algebra]*. Izhevsk, Izhevsk Republican Printing House, 348.

Информация об авторах

Войцехович Вячеслав Эмерикович. – Тверской государственный университет (170100, Тверь, ул. Желябова, 33).
synerman@gmail.com

Малинецкий Георгий Геннадьевич. – Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Миусская площадь, д. 4).
GMalin@keldysh.ru

Information about the author

Voitsekhovich, Vyacheslav Emerikovich. – Tver State University (33, Zhelyabova st., Tver, 170100, Russia).

Malinetsky, Georgy Gennadievich. – Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (4. Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia)/

Дата поступления 18.07.2023