Проблемы логики и методологии науки

МАТЕМАТИКА КАК ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАНИЯ ПРИ РАСШИРИТЕЛЬНОМ ПОНИМАНИИ ПЛАТОНИЗМА*

В.В. Целищев

Статья посвящена анализу номиналистической реконструкции математики оснований математики. Особенностью излагаемого в статье подхода является отказ от противопоставления платонизма и номинализма в определенных версиях. Платонизм рассматривается в версии т.н. полнокровного платонизма, а номинализм – в версии фикционализма. Представленная концепция позволяет рассматривать математику как представление дедуктивного знания.

Ключевые слова: математика, логика, платонизм, номинализм

Фикционализм vs. платонизм

Фикционализм в математике может рассматриваться как прямая антитеза платонизму. В этом отношении можно сразу обнаружить параллели между фикционализмом и номинализмом, и это вполне оправданно, хотя и с определенными оговорками. Некоторые фикционалисты, например С. Ябло, не считают себя номиналистами и даже видят в своем подходе определенные элементы логицизма [1]. Для того чтобы понять эту парадоксальную ситуацию, рассмотрим противопоставление фикционализма платонизму более детально.

Основное возражение платонизму состоит в том, что предлагаемая им онтология неприемлема по эпистемологическим причинам. В самом деле, существование нефизических, нементальных, не подлежащих причинным воздействиям объектов, к которым, следова-

* Исследования, результаты которых нашли отражение в данной статье, поддержаны Междисциплинарным интеграцинным грантом СО РАН № 47.

тельно, нет эпистемического доступа, весьма сомнительно. И хотя с точки зрения математической практики платонизм весьма привлекателен, следует искать альтернативы, которые позволили бы избежать онтологических и эпистемологических трудностей. Таких альтернатив платонизму имеется достаточно много, но среди них выделяется фикционализм. Его характеристики включают, на первый взгляд, парадоксальные вещи. С одной стороны, фикционалисты, как и платонисты, признают, что математические теории имеют целью говорить об абстрактных объектах. С другой стороны, фикционалисты отрицают существование абстрактных объектов. Из этих двух противоречащих друг другу утверждений следует, что математические теории не могут рассматриваться в семантическом плане как буквальные истины и если они являются истинами, то не с точки зрения стандартной семантики Тарского. В этом случае очевидно наличие какой-то другой семантики, и фикционалисты полагают, что математические теории должны интерпретироваться как некоторого рода вымысел, оказывающийся полезным, или же как метафора, которая опять-таки оказывается полезной, и т.д. Несмотря на странность подобных предположений, следует помнить, что номиналистическая интерпретация математики такие предположения содержит. Например, финитизм Гильберта основан на предположении о доступных человеческой интуиции истинах конечной математики, которые Гильберт считает реальными элементами математики, и идеальных элементах математики, которые предполагают бесконечность. Идеальные элементы Гильберта и есть некоторого рода полезный вымысел.

Поскольку фикционализм представляет собой многообразие подходов, противопоставляемых платонизму, следует рассмотреть, какие именно положения платонизма подвергаются критике со стороны фикционализма. М. Балагер предлагает анализ стандартного аргумента в пользу платонизма, позволяющий прояснить фикционалистские альтернативы [2].

(1) предложения математической теории типа «4 есть четное число» представляются истинными;

(2) такие предложения должны восприниматься прямо как предложения, логическая форма которых имеет вид «Фa». Эта логическая форма подразумевает семантику Тарского в том смысле, что термин «a» указывает на определенный объект со свойством «Ф»;.

(3) если признать предложение «4 есть четное число» истинным в рамках стандартной семантики, надо признать и существование указываемых сингулярными терминами объектов. Другими словами, буквальное прочтение этого предложения обязывает нас принять существование числа 4;
(4) такие объекты математики являются абстрактными объектами, со всеми отличиями их от конкретных объектов;
(5) следовательно, существуют абстрактные математические объекты, и наши математические теории дают их истинное описание.

Это несколько педантичное описание платонизма позволяет дать классификацию возражений против платонизма, поскольку каждому из предположений (1)–(5) можно противопоставить антиплатонистский тезис. Фикционалист, например, принимает утверждения (2) – (4), но отвергает (1). Другие альтернативы платонизму заключаются в отвержении (2), (3), (4) – в зависимости от видов антиплатонизма.

Почему эти две группы посылок отличаются друг от друга? По мнению Балагера, посылки (2)–(4) легко мотивируются платонистом на том основании, что наличие семантики Тарского для математических утверждений является фактом эмпирическим. Действительно, математическая практика предполагает, что математические объекты указываются сингулярными терминами точно так же, как это имеет место для обыденных физических объектов. Тут следует возразить Балагеру, что вряд ли использование сингулярных терминов вообще может считаться чисто эмпирическим обстоятельством, поскольку это является частью логики. А вот совпадение грамматической структуры математических утверждений и утверждений об обыденных объектах – обстоятельство скорее эпистемологическое и даже эмпирическое. Но как бы то ни было, можно согласиться с тем, что у платониста действительно есть значимая мотивация в пользу (2)–(4), позволяющая ему отвергнуть фикционалистские альтернативы.

Что касается посылки (1), то тут ситуация, по Балагеру, иная, поскольку платонист должен доказать выполнимость (1), что является уже не семантическим обстоятельством и зависит от того, каков наш мир: платонистский или нет. К тому же фикционалист согласен с посылкой (1) и, стало быть, в этом пункте согласен с платонистом. Таким образом, самым интересным пунктом программы, в рамках которой рассматривается допустимость фикционализма в отношении математических объектов является демонстрация того, что аргументы против него в свете (1) не имеют силы.

Платонизм, помимо инстинктивной приверженности к нему работающих математиков, имеет фундаментальное обоснование в знаменитом тезисе о незаменимости математики в естественных науках, который обычно связывается с именами В. Куайна и Х. Патнэма. Самым известным возражением против этого тезиса является программа номинализации математики Х. Филда [3]. В данной работе мы не останавливаемся на этом возражении Филда. Здесь мы рассмотрим ряд других возражений против фикционализма. Важное место среди них занимает вопрос, в какой степени вообще можно сравнивать математические утверждения с утверждениями о фиктивных объектах. При этом поднимается комплекс вопросов, связанных и с тем, какую роль играет понятие метафоры в качестве средства выражения точных математических истин.

Объективность математического дискурса и фикционализм

Рассмотрим различия между фикционалистским и математическим дискурсами. Платонист претендует на то, что объекты математики существует, и в этом смысле утверждения о них являются либо истинными, либо ложными. С этим не согласен формалист, для которого неразрешимые в некоторой аксиоматической системе утверждения не являются истинными или ложными, как это имеет место в случае континуум-гипотезы (CH) в системе Цермело – Френкеля (ZF). Но вот утверждения с фиктивными или воображаемыми объектами вряд ли можно считать истинными или ложными. Именно здесь, на первый взгляд, мы имеем ясное указание на радикальное отличие фикционалистского дискурса от дискурса математического. Ответ функционалистов на это состоит в том, что математические утверждения следует рассматривать как часть более широкой схемы, а именно, «рассказов о математике». Эти рассказы (stories) являются вымыслом, и в нем установлены определенные правила, которым нужно следовать (скажем, математические операции и т.д.). Смысл такого подхода заключается в том, что понятие истинности заменяется понятием истинности в рассказе. Конечно же, слабостью этого фикционалистского подхода оказывается то, что непонятно, почему в рассказе о математике мы устанавливаем такие, а не иные правила. Если математика – это игра в вымысел, то правила могут быть произвольными, как в игре в крикет в «Алисе в Зазеркалье», где шарами служат ежи, а клюшками – фламинго. У Д. Гильберта математика действительно уподобляется игре, но с абсолютно четкими правилами и мотивацией, оправданной интуицией. Фикционалисты при этом говорят, что игра подобного рода имеет все те правила, которые имеет формальная система математики, но понятие истины, как оно трактуется в обыденных контекстах, заменяется на понятие истины-в-игре. То есть утверждение «4 есть четное число» функционалистски истинно, поскольку оно истинно в игре-в-математику. А вот утверждение «5 есть четное число» не истинно в этом смысле.

Безусловно, главной трудностью фикционалистской программы является обоснование самой игры как некоторого рода вымысла. Очевидно, что правила такой игры заключаются исчерпывающе в аксиомах и правилах вывода формальной системы. И это представляется законным фикционалистским ходом в полемике против платонизма. Но можно ли считать, что аксиомы исчерпывают содержание математической игры?

Интерпретация и понимание аксиом

Здесь вполне уместно обращение к тезису Х. Патнэма о «сколемизации всего» в рамках его исследовательской программы «внутреннего реализма». Тезис мотивирован наличием нестандартных моделей или интерпретаций для логики первого порядка. Патнэм обобщает этот результат для более широкого класса языков, включая естественный язык. Парадокс Сколема, являющийся прямым результатом наличия нестандартных моделей, состоит в том, что одни и те же термины аксиоматической теории множеств указывают в разных интерпретациях на разные объекты – «счетные» и «несчетные» множества. Другими словами, одна и та же аксиоматическая система имеет разные модели. Здесь мы имеем дело с типичной ситуацией при формализации, которая, тем не менее, парадоксальна. Мы начинаем с «наивной», или интуитивной, теории множеств, формализуем ее и затем, рассматривая ее модели, обнаруживаем, что получили кроме намеренного результата еще и ненамеренный. После завершения цикла «интуитивная тория – аксиоматическая теория – модели теории» мы остаемся со значениями терминов теории, которые фиксированы только моделями теории. В этом случае парадокс Сколема состоит в том, что мы никак не можем оправдать предпочтения в пользу намеренной интерпретации. Дело в том, что аксиомы не «схватывают» интуитивный смысл понятия множества. В этом случае теоретико-множественый язык оказывается полностью неопределенным. Патнэм предлагает следующий выход: для подобного схватывания к аксиоматической теории множеств мы должны добавить понимание, рассматриваемое как некоторое рациональное свойство человека, фиксированное в языке. Таким образом, мы в этом случае явно выходим за пределы собственно игры и математика не может быть полностью уподоблена формализованной игре. Даже если игра есть результат вымысла, как утверждают фикционалисты, мы не можем гарантировать, что учтены важные свойства игры, и это может привести к существенному искажению самой игры.

Но понимание, согласно Витгенштейну, есть не что иное, как способ употребления, и поэтому сколемовская парадоксальность может быть перенесена на область употребления языка. Речь идет о том, что употребление терминов формализованного языка, предусматривающее указание на объекты и фиксированное значение терминов, не гарантирует от появления ненамеренной интерпретации. В отношении языка первого порядка Патнэм полагает, что «ни одна точка зрения, которая фиксирует только истинностные значения целостных предложений, не может фиксировать референты, даже если она определяет истинностные значения предложений в любом возможном мире» [4].

Но что собой представляет понимание или некоторого рода объяснение? Любое объяснение должно состоять из дополнительных слов, но сами эти слова нуждаются в интерпретации. Что, собственно, в этой ситуации предлагает Патнэм? Он хочет рассматривать любое объяснение как неинтерпретированое расширение уже деинтерпретированной теории. Цель подобной стратегии ясна: Патнэм стремится получить новую теорию, для которой будет возможным новое изобилие интерпретаций. Сама идея Патнэма заключается в необходимости какого-то рода объяснений по поводу нашей практики. Но, практика может пониматься различными способами. Что касается математического языка, то можно согласиться с Патнэмом, что детерминанты математического значения содержатся в нашем использовании математического языка. При некоторой изобретательности можно представить такое использование в виде сложной, но все-таки игры. Но как замечает Бенацерраф, не ясно, почему, по Патнэму, это использование будет как-то «схвачено» аксиомами [5]. Далее, Бенацерраф приходит к важному выводу:

«Математическая практика отражает наши интенции и контролирует наше использование математического языка такими способами, которые в любой заданный момент могут нами не осознаваться и которые превосходят все, что мы точно устанавливаем в любом заданном объяснении» [6]. Ясно, что присутствие такой неопределенности не позволяет уподобить математическую деятельность игре с четко определенными правилами и четко определенными намерениями.

В свете всего этого принятые аксиомы не являются исчерпывающим средством определения истинности или ложности некоторых математических утверждений, как в случае CH. Это означает, что понятие игры, или математического рассказа в фикционалистском смысле, требует изменения или расширения. Насколько значительным может быть такое расширение? Оно на самом деле может быть настолько предельным, что включит в себя саму платонистскую концепцию о существовании абстрактных объектов. Другими словами, концепция о существовании абстрактных объектов становится рассказом о математике. Это абсолютно тривиальное обоснование фикционализма вызывает, и вполне справедливо, аллюзию – вспоминается знаменитый афоризм Рассела о том, что постулирование имеет те же преимущества перед доказательством, что и воровство перед честным трудом. Таким образом, вместо доказательства обоснованности фикционалистского рассказа о математике мы просто постулируем, что весь платонизм и есть такой рассказ. Балагер справедливо говорит о таком фикционализме как «воровском», или Т-фикционализме (Theft Fictionalism) [7]. Поскольку платонизм оказывается включенным в Т-фикционализм, последний зависит в своем содержании от вида платонизма.

Полнокровный платонизм и Т-фикционализм

Платонизм есть доктрина о существовании абстрактных математических объектов. Но как определить математический объект и сколько может быть видов таких объектов? Философия математической практики по-разному трактует этот вопрос; например, интуиционисты и близкие к ним школы полагают, что математические объекты существуют только в том случае, если они сконструированы. Вообще, сторонники так называемого антиреализма в философии математики настаивают на резком уменьшении числа объектов, которые могут считаться существующими. Есть и другая крайность, а именно, взгляд, согласно которому существуют все возможные в логическом смысле математические объекты. С этой точки зрения существовать – значит быть свободным от противоречий. Таким образом, математическая реальность представляет собой изобилие сущностей.

При изложении этого, как его называет Балагер, «полнокровного платонизма» часто цитируется Д. Гильберт, который утверждал, что если произвольно данные аксиомы не противоречат друг другу в своих следствиях, тогда они истинны, и вещи, определяемые аксиомами, существуют. Для меня это критерий истины и существования. Логически возможные объекты дают слишком большой простор воображению, и, несмотря на афористические утверждения Гильберта, он не стал «полнокровным платонистом», потому что для него некоторые (даже непротиворечивые) объекты все-таки не существовали. Наиболее уязвимым пунктом в программе полнокровного платонизма является введение в математический дискурс понятия возможного математического объекта. Это означает обращение к модальностям, которые сами по себе представляют значительные трудности для понимания. Пусть Mx – математический объект, x – первопорядковая переменная, Y – второпорядковая переменная. Тогда имеем

$$(\exists x)\, Mx) \;\&\; (Y)\, [\Diamond\, (\exists x)\, (Mx \;\&\; Yx) \rightarrow (\exists x)\, (Mx \;\&\; Yx)].$$

Другими словами, если имеется возможный объект, то он существует.

Концепция полнокровного платонизма несколько необычна и поэтому втречается с рядом возражений. Первое возражение исходит от формализма. Согласно полнокровному платонизму, непротиворечивые теории описывают математическую реальность. Однако часто мы имеем непротиворечивые теории, которые противоречат друг другу. Например, такая ситуация наблюдается в случае системы аксиом Цермело – Френкеля плюс континуум-гипотеза и тех же аксиом плюс отрицание континуум-гипотезы. Ответ на это возражение состоит в том, что каждая непротиворечивая теория описывает часть реальности. Второе возражение касается классической эпистемологической полемики относительно того, означает ли непротиворечивость истинность. С точки зрения полнокровного платонизма, математическое утверждение истинно, если и только если оно истинно во всех стандартных моделях данной ветви математики, и неистинно, если оно ложно во всех таких моделях. Поскольку понятие стандартной модели в значительной степени определяется нашей интуицией относительно того, что истинно, истинность сама по себе как абстрактная категория теории познания не является препятствием для принятия полнокровного платонизма.

С первого взгляда, полнокровный платонизм противоречит математической практике. Если отвлечься от крайнего формализма, тогда вопрос о том, какая из двух теорий: аксиомы Цермело – Френкеля плюс континуум-гипотеза или те же аксиомы плюс отрицание континуум-гипотезы – истинная, является вполне осмысленным. Признание же истинными обеих теорий ставит под сомнение объективность математики и, тем самым, традиционный платонизм. А вот полнокровный платонизм разрешает дилемму. Наша интуиция множества «схвачена» в различных формальных системах, и вполне возможно, что постановка вопросов, скажем, о континуум-гипотезе требует существенно нового понятия множества, точнее, новых теоретико-множественных аксиом, которые позволили бы устранить кажущуюся парадоксальность существования некатегоричных интерпретаций понятия множества. Об этом говорил К. Гедель при обсуждении континуум-гипотезы [9]. При такой постанвке вопроса континуум-гипотеза является истинной в одних моделях и ложной – в других.

Полнокровный платонизм больше согласуется с математической практикой, потому что он не запрещает рассматривать такие ситуации, которые запрещены с точки зрения традиционного платонизма. В частности, речь идет о неразрешимых утверждениях, вполне допустимых в полнокровном платонизме и недопустимых в традиционном.

Получается, что фикционализм будет приемлемым всякий раз, когда приемлем платонизм. При этом практически исчезает противопоставление платонизма и фикционализма. Это обстоятельство имеет оборотную сторону, а именно, проблемы для платонизма становятся проблемами для фикционализма. Для более полного понимания ситуации следует рассмотреть, приводит ли «воровство» к положительным результатам для фикционализма при определенном решении ряда проблем, которые стоят перед платонизмом.

Вернемся к примеру с CH. Важность утверждения о существовании или несуществовании некоторого бесконечного множества позволяет считать, что платонист, понимая эту важность, вынужден допустить существование различного рода математических структур в зависимости от того, принимаем ли мы утверждение или отрицание CH. Действительно, если мы принимаем ZFC (систему

Цермело – Френкеля с аксиомой выбора), тогда можно говорить о структуре ZFC + CH и о структуре ZFC + $\neg$ CH. Если мы остаемся на позиции формализма, вопрос об истинности самой CH остается неразрешимым. Но полнокровный платонизм не позволяет оставить такой вопрос без ответа, и довольно распространенным ответом является утверждение, что мы имеем одну математику с утверждением CH, а другую математику – с отрицанием CH. Пока CH неразрешима, трудно сказать, какая из этих математических структур будет отвечать «истинному платонизму», потому что все-таки платонизм есть представление о некоторой единой математической реальности. Это предположение реализуемо в понятии намеренной интерпретации формализма, и в этом смысле мы должны признавать существование именно той математической структуры, ради которой был развит предыдущий математический аппарат. Другими словами, «рассказ о математике» должен развиваться последовательно и непротиворечиво, что является, быть может, непосильным бременем для фикционализма.

Скажем, некоторое теоретико-множественное утверждение истинно, если оно истинно в универсуме множеств, что, в свою очередь, во избежание парадоксов, предполагает справедливость итеративной концепции множества. Однако и нестандартные, или ненамеренные, интерпретации могут быть достаточно важными в том смысле, что само понятие намеренной интерпретации дает достаточную свободу для появления ненамеренной интерпретации. Другими словами, понятие намеренной интерпретации может быть недостаточно строгим или определенным, и описание области математических объектов оказывается неполным. Действительно, пусть имеется две математические структуры Γ_1 и Γ_2, различающиеся в отношении CH, а именно, ZFC + CH истинно в Γ_1, ZFC + $\neg$ CH истинно в Γ_2, а Γ_1 и Γ_2 обе являются намеренными структурами в теории множеств. Такая ситуация не позволяет считать понятие намеренной интерпретации спасением от предположения множественности платонистских реальностей.

В свете всего этого приходится признать, что несколько намеренных интерпретаций могут быть неизоморфными друг другу и не одна из них не является худшей или лучшей с точки зрения принятых для намеренной интерпретации критериев. Здесь есть полная аналогия с экспликацией концепции натурального числа в теоретико-множественых терминах, на что указал П. Бенацерраф [10]. При этом та же CH может быть истинной в одной интерпретации и ложной – в другой. Ясно, что здесь мы имеем несколько другую форму платонизма, нежели традиционная. Балагер называет такой платонизм IBP-платонизмом (Improved Better Platonism), который формулируется следующим образом: «Математическое утверждение *S* истинно, если и только если оно истинно во всех частях математической реальности, которые считаются намеренными в данной области математики, и если *S* истинно в одной части и ложно в другой, тогда не имеет значения, истинно ли это предложение или ложно [11]. Такой платонизм не приводит к серьезным проблемам, утверждает Балагер. Если это действительно так, тогда применяемая фикционалистами стратегия «воровства» платонистской концепции математики должна следовать линии определения IBP-платонизма. Только теперь речь идет уже не о математической реальности, а о «рассказе (story) об этой математической реальности». Все разговоры фикционалистского толка должны идти в следующем русле: «имеется связная история о существовании математической реальности или реальностях, и в рамках этой истории…».

Таким образом, мы получаем абсолютно тривиальный фикционализм, и единственное его преимущество заключается в том, что он имеет дело с полнокровным платонизмом, согласно которому имеется столько абстрактных математических объектов, сколько их может быть как логических возможностей.

В чем состоит преимущество такой версии фикционализма? Дело в том, что в отличие от трудных для реализации номиналистических программ он опирается на гораздо более приемлемый, с точки зрения работающего математика, платонизм. А если полагать, как это делает Балагер, что полнокровный платонизм является лучшей «опцией» в этом отношении, тогда становится ясно, что фикционализм, основанный на полнокровном платонизме, имеет лучшие перспективы по сравнению с другими видами фикционализма. При этом не надо упускать из виду исходную цель нашего исследования: платонизм демонстрирует, что математика и есть представление априорного знания, и, стало быть, обе альтернативы в понимании природы математики говорят в пользу видения математики как репрезентации знания.

Рассмотрим более тщательно на уже приведенном ранее примере, каким образом Т-фикционализм превосходит фикционализм, скажем, версии Филда. Как известно, эта версия встречается с серьезными возражениями, которые должен преодолеть Т-фикционализм. Итак, пусть математик M доказал CH из ZF + A, где A есть новая аксиома, которая полагается математиками более или менее интуитивно истинной относительно природы множеств. Можно высказать и более радикальное предположение об A, заявляя, что она не вызывает никаких возражений, – именно о возможности таких аксиом говорил Гедель, считая, что более полное понимание природы множества может быть найдено на пути поиска новых аксиом. Естественно, что при наличии упомянутого доказательства математики примут утверждение о том, что CH доказана, поскольку имеют полное доверие к аксиоме A. Однако именно здесь и кроется тонкость, с которой связана правдоподобность фикционализма. Все резоны в пользу аксиомы A являются частью того, что фикционалисты называют истиной в «рассказе о математике». Точнее, T-фикционалист может утверждать, что эти резоны принадлежат к сложной истории математических рассуждений, которые в значительной степени принадлежат к социологии математики и психологии математиков. Именно в этом пункте можно проследить различие между платонистами и номиналистами фикционалистского толка в отношении проблемы представления знания. Платонист полагает, что математика есть описание реальности, которая не может быть описана какими-то другими средствами, и сам лозунг «математика есть язык науки» переводится в лозунг «математика есть представление знания внешнего мира». Именно в этом смысле справедлив тезис Куайна – Патнэма о незаменимости математики.

Незаменимость математики

Язык математики столь важен, что трудно представить себе, как естественно-научные теории могли бы быть сформулированы без него. Больше того, математика позволяет делать прозрения относительно эмпирических закономерностей, которые часто оказываются подлинным прорывом в науке. Хрестоматийный случай – открытие П. Дираком антиматерии через уравнение релятивистской квантовой механики. Замечательно то обстоятельство, что математика приложима к большому спектру явлений. Знаменитая фраза Ю. Вигнера о «непостижимой эффективности математики в естественных науках» давно стала клише. Правда, сам Вигнер назвал это «чудом», и как раз задача философов науки состоит в том, чтобы объяснить это чудо. В философском мире такого рода объяснением является аргумент о незаменимости (indispensability) математики в науке.

Дискуссии вокруг этого тезиса показывают расхождение взглядов философов науки роль математики. Незаменимость как таковая есть аргумент, который говорит о преследовании определенной цели: мы полагаем некоторое средство незаменимым, если выполняем некоторую задачу. В случае тезиса о незаменимости математики мы имеем в виду, конечно же, успех научных теорий, причем теорий, которые лежат в основе научной картины мира.

Собственно, прагматический успех математики никогда не ставился под сомнение. Тезис о незаменимости в данном случае есть скорее философское утверждение о существовании абстрактных объектов математики. Связь между этими вещами довольно проста: коль скоро математика включает в себя утверждения о существовании математических объектов, или, более общо, абстрактных объектов, тезис о незаменимости есть тезис о необходимости признать существование таких объектов исходя из полезности математики в применении к эмпирическим явлениям.

М. Коливан выделяет несколько вариантов тезиса о незаменимости математики [12]. Прежде всего, этот тезис является справедливым для общей научной практики. Тезис о незаменимости имеет более широкий контекст, нежели математика. Процедура постулирования гипотетических сущностей широко распространена в научной практике. Например, постулирование так называемых теоретических конструктов является непременным атрибутом многих научных теорий. Такие конструкты вводятся для объяснения эмпирических данных, как это имело место, скажем, для кварков или генов (список можно продолжать сколь угодно долго). В этом случае тезис о незаменимости формулируется следующим образом:

> Если предполагаемое указание на некоторую сущность *А* незаменимо для научной теории, тогда следует верить в существование этой сущности.

Насколько значим приведенный аргумент о незаменимости? Дело в том, что такое постулирование может оказаться просто ошибочным и тогда изначальная вера в подобные сущности окажется неоправданной. Для большей надежности следует предполагать, что такие сущности являются не просто гипотетическими, а существующими реально. Другими словами, сторонники тезиса о незаменимости суть реалисты в философском отношении, уверенные в объективном существовании подобных сущностей. Их гипотетическое указание в терминах научных теорий является по своей сути открытием, а не изобретением. С другой стороны, антиреалисты в отношении теоретических конструктов полагают, что наилучшее объяснение не есть аргумент в пользу принятия утверждений о существовании соответствующих объектов [13]. Ясно, что антиреалисты отвергают аргумент о незаменимости как философский аргумент в пользу существования каких-то сущностей.

Другая форма тезиса о независимости, гораздо более известная, принадлежит В. Куайну и Х. Патнэму. Она в существенной степени опирается на аргумент о незаменимости теоретических сущностей и критерий существования Куайна: «Обычно интерпретируемый научный дискурс неизбежно обязывает нас к принятию абстрактных объектов – наций, видов, чисел, функций и множеств, так же как яблок и других тел. Все эти вещи фигурируют в качестве значений связанных переменных в общем описании мира. Числа и функции являются таким же истинным вкладом в физическую теорию, как и гипотетические частицы» [14].

На это могут возразить, что математические теории и эмпирические теории имеют разный статус и по этой причине можно быть научным реалистом в эмпирических науках, признавая объективное существование теоретических конструктов, и в то же самое время быть антиреалистом в математике, не признавая существования абстрактных математических объектов. Точка зрении Куайна требует поддержки в виде тезиса, согласно которому между математикой (и логикой) и естественными науками нет пропасти и одно переходит в другое. Интуитивно можно понять идею Куайна, выстраивая науки в таком порядке: логика, математика, физика, химия, биология, социология, психология и т.д. Естественно, что порядок приблизителен, но основная идея такого порядка состоит в том, что чем дальше от начала ряда, тем более уязвимо теоретическое утверждение соответствующей науки перед фальсифицирующим опытом. Для понимания этого обстоятельства нужно привлечь тезис Дюгема – Куайна, согласно которому эксперимент, противоречащий теории, не ведет к немедленному отказу от этой теории, поскольку теория может быть перестроена таким образом, чтобы устранить противоречие между нею и экспериментом. Подобного рода «сопротивляемость» теории противоречащим ей экспериментам различна для разных наук, что определяется степенью математизации концептуальной схемы науки. Скажем, социология весьма подвержена изменениям, в то время как физика, вопреки хрестоматийному мнению, редко «поддается» так называемому «решающему эксперименту». Это обстоятельство может быть объяснено степенью недоопределенности теории экспериментом, которая также входит в качестве посылки в концепцию Куайна. Тем не менее ревизии подлежат любые концептуальные схемы и любые теории, и коль скоро существует непрерывность в ряду наук, такой ревизии должна подлежать даже логика, хотя и не в столь значительной степени, как, скажем в физике. В общем, точка зрения Куайна, так же как и Дюгема, является холизмом в применении к науке.

Указанная выше непрерывность для Куайна есть основание для того, чтобы упрекать тех, кто является реалистом в науке и антиреалистом в математике, в двойных стандартах. Чтобы избежать неоднозначности, Куйан (а также и Патнэм) говорит о такой стадии развития наук, при которой возможна их формализация на базе языка первого порядка. Это позволяет применить критерий существования Куайна «быть – значит быть значением переменной». И как утверждает Патнэм, «квантификация над математическими сущностями незаменима для науки, как формальной, так и физической, и, следовательно, мы должны принять такую квантификацию. Но это обязывает нас к принятию существования математических сущностей» [15].

Аргумент о незаменимости математики в версии Куайна – Патнэма является точной переформулировкой ранее приведенного аргумента о незаменимости теоретических конструктов, если «теоретические конструкты» заменить «математическими сущностями». Как мы видели, этот аргумент нужно дополнить концепцией Куайна о непрерывности наук.

Однако главным затруднением в принятии аргумента о незаменимости является вопрос о том, служит ли принятие сущностей, необходимых для объяснения теорией явлений, гарантией того, что эти сущности существуют «реально». Ведь эти сущности остаются гипотетическими, поскольку сама научная теория может быть отвергнута в силу появления новых данных. Нужно ли полагать, что постулируемые в качестве существующих сущности должны иметь «вечное» существование и быть по своей сути платонистскими сущностями? А какой еще другой вариант существования помимо платонистского можно предложить? Если речь идет о том, что постулирование существования гипотетической сущности является просто полезным в том смысле, что дает возможность унифицировать эмпирические данные, то для подлинного существования требуются какие-то дополнительные критерии, которые позволили бы считать соответствующую теорию истинной. Но очевидно, что не все гипотетические сущности обладают обеими характеристиками. Некоторые гипотетические сущности имеют такую степень «реальности», что мы можем законно считать их реально существующими независимо от будущих изменений теории. Но чем это отличается от платонистского существования? Некоторые гипотетические сущности просто полезны и играют скорее эвристическую роль, будучи впоследствии отброшены. Некоторые гипотетические сущности находятся в промежуточном положении, поскольку не все критерии по-настоящему реально существующих сущностей для них справедливы. Так, кварки являются наиболее успешной и полезной конструкцией для объяснения строения элементарных частиц, но они не были получены экспериментально. Такое отсутствие экспериментального подтверждения уже объяснено теоретически, но сама по себе схема «гипотетическая сущность – экспериментальные поиски – неудача – теоретическое объяснение неудачи» является запутанной и не позволяет с полной уверенностью говорить о существовании кварков, как мы говорим о существовании электрона, экспериментальные свидетельства о существовании которого имеются в изобилии.

Таким образом, при обсуждении тезиса о незаменимости математики следует отличать полезность от истинности. Если некоторая математическая сущность просто полезна, не нужно считать, что она существует реально. Но если все-таки сущность незаменима, тогда нам придется признать ее платонистское существование.

К тому же есть и историко-социологическое препятствие к тому, чтобы объявлять многие теоретические сущности реально существующими только потому, что они однажды были признаны таковыми, а потом им было отказано в этом статусе. Примером такого рода является, конечно же, теплород. Опять-таки, аргументы о несуществовании теоретических сущностей, выдвинутые при некоторых социологических условиях, требуют объяснения, как, например, это имело место в отрицании атомов Пуанкаре и Оствальдом. Ясно, что нет жесткого критерия существования теоретических или абстрактных сущностей, если исходить из их полезности в некоторых аспектах научного объяснения явлений природы.

Вообще, тезис о непрерывности математики и естественных наук, который чрезвычайно важен для Куайна, приводит его к значительным затруднениям. Дело в том, что в ходе предыдущего изложения мы все время обсуждали математические сущности в месте с теоретическими конструктами. Между тем использование математики в эмпирических науках не включает в себя значительное число математических концепций. Речь идет о разного рода математических концепциях, которые не используются для буквального описания природы. Здесь мы имеем два рода концепций. Во-первых, это могут быть множества высших порядков, например недостижимые кардинальные числа, которые никогда не применяются в физических теориях. Во-вторых, даже привычные действительные числа на самом деле представляют собой сложные бесконечные конструкции, и хотя они используются в физике, мы не можем считать их частью окончательного анализа материи. Дело в том, что материя конечна, в то время как действительные числа представляют собой удобство, или идеальные элементы в терминологии Гильберта. Но как тогда отличить «реальные» математические сущности от «искусственных», или идеальных? На этот вопрос Куайн не сумел ответить, заметив, что не видит «ничего, что могло бы примирить нас с этой ситуацией» [16].

Очевидным выходом из положения является признание того, что единственным критерием существования математических сущностей будет такой критерий, который обосновывается только математическими методами, и в число этих методов должно входить все то, что позволяет применять математику. Но в этом случае нам придется признать платонистское существование как основной критерий существования математических сущностей.

Номиналист же полагает, что математика есть репрезентационное вспомогательное средство для описания внешнего мира и от этого средства можно избавиться. А платонистским претензиям математики на объективность фикционалисты противопоставляют «истинность в рассказе». В случае T-фикционализма не нужно и такого противопоставления, поскольку в обоих случаях мы имеем версии платонизма. Безусловно, «полнокровная» версия платонизма радикально отличается от «стандартного» платонизма, под которым подпишется большинство работающих математиков, и тем не менее уже сама попытка устранить указанное выше противопоставление заслуживает внимания.

Возвращаясь к примеру, приведенному выше, отметим, что главным вопросом является то, почему мы считаем аксиому A интуитивно приемлемой. Другими словами, почему мы полагаем, что A адекватно описывает математическую реальность. Ясно, что правдоподобным ответом на этот вопрос может быть только убеждение, что аксиома A истинна во всех частях математической реальности, которые считаются намеренными для теории множеств. Такой подход рассматривается как самый адекватный с точки зрения платонизма. Но точно такая же аргументация может быть приведена в рамках Т-фикционализма. Действительно, если интуитивная истинность А встроена в нашу концепцию множества, тогда аксиома А неизбежно является частью соответствующего «рассказа».

Платонист считает, что математика открывает объективные истины о мире. Т-фикционалист может сказать практически то же самое, а именно, что в «рассказе» о математике многие истины уже содержатся неявно и анализ этого «рассказа» позволяет извлечь новые истины.

Неправдоподобность фикционализма

Фикционализм сам по себе имеет два варианта иного толкования математических утверждений, чем это принято у работающих математиков. Оба этих толкования имеют оттенок неправдоподобности и даже искусственности, присущей чисто философским построениям. Такова ситуация, например, в эпистемологии при обсуждении в высшей степени неправдоподобного тезиса солипсизма. Тем не менее солипсизм как крайность позволяет выявить некоторые важные вещи в природе познавательного процесса. Точно так же номиналистические конструкции фикционалистского толка, будучи неправдоподобными с точки зрения математики, позволяют сделать некоторые интересные выводы о природе математического мышления.

Итак, фикционализм делится на герменевтический и революционный. Суть первого заключается в том, что математический дискурс рассматривается как форма вымысла, или фикция, и, как следствие, математические термины на самом деле не указывают на математические объекты, а математические утверждения не могут рассматриваться как буквальные истины. Поражает искусственность подобного рода номиналистической стратегии, потому что ничто не указывает на то, что математики полагают свои построения вымыслом. Если, с другой стороны, интуиционизм как доктрина о том, что математические конструкции суть продукт человеческого ума, тогда можно признать, что умственные конструкции и являются определенного рода вымыслом. Правда, к математическим конструкциям применимы жесткие критерии, которые отнюдь не предъявляются к фикционалистским конструкциям. В любом случае для продвижения герменевтического фикционализма требуется поиск аналогий между вымыслом и математическим дискурсом, и таких аналогий на самом деле весьма много.

Другая разновидность фикционализма – революционный фикционализм – исходит из жесткой номиналистической посылки, что математических объектов не существует. Отсюда, математические утверждения – это утверждения о несуществующих объектах. Давняя традиция в логике касается того, какова природа утверждений о несуществующих объектах, и большая часть подходов состоит в том, что такие утверждения являются просто ложными. Стало быть, все математические утверждения являются ложными. Такой шокирующий вывод настолько же неправдоподобен, насколько бывают неправдоподобными крайние философские взгляды. Таким образом, ни герменевтический, ни революционный фикционализм неприемлем исходя из математической практики, которая никак не может быть «подправлена» философскими предпочтениями. А если такие «поправки» и случаются, как, например, в случае интуиционизма, то это имеет значительные эпистемологические предпосылки. Но таких предпосылок фикционализм не имеет.

При этом возникает вопрос, в какой степени для философии актуальна позиция, которая столь сильно противоречит математической практике. Здесь мы имеем расхождение интересов философов и математиков куда более радикальное, чем это принято в традиционной философии математики. Действительно, логицизм, интуиционизм и формализм, три основных направления в философии математики, имеют дело с изменением понимания оснований математики, а интуиционизм напрямую требует изменения самой математической практики. Фикционализм же остается настолько философской теорией, что не претендует на то, чтобы диктовать математикам, что им нужно делать. Фикционалисты предлагают чисто философскую теорию, которая не имеет прямого отношения к математике. Суть этой теории состоит в том, как понимать математические утверждения. В то время как работающие математики полагают эти утверждения буквально истинными, фикционалисты полагают их небуквальными, метафорическими. Круг математических истин для математиков и фикционалистов остается одним и тем же, только для фикционалистов эти истины являются истинами в рамках «рассказов» о математике. Здесь поднимаются две проблемы. Первая из них состоит в том, чтобы понять, почему эти «рассказы» подчиняются строгим нормам. Вторая проблема состоит в том, чтобы дать правдоподобную мотивацию, почему эти истины являются небуквальными.

Далее, если есть два прочтения математических утверждений – «математическое» и «фикционалистское», тогда в строгом смысле нельзя говорить о том, что круг истинных утверждений для обоих подходов один и тот же. Фикционалисты, полагая буквальное прочтение математических истин ложным, считают их приемлемыми при метафорическом прочтении. Следовательно, в терминологии фикционалистов совпадают «приемлемые» или «хорошие» утверждения для математиков и самих фикционалистов. Но для математической практики это не имеет никаких следствий. Еще раз следует подчеркнуть, что фикционализм представляется здесь настолько философской теорией, что исчезает всякая связь между математической практикой и философией математики.

В определенном отношении такой разрыв между философией математики и самой математикой мотивируется тем обстоятельством, что для математической практики нет никакой разницы в том, понимаются ли математические истины буквально или метафорически. Фактически расхождение между математической практикой и фикционализмом касается вопроса о существовании абстрактных объектов. Дело чисто философского вкуса – заходить в отрицании существования абстрактных математических объектов столь далеко, чтобы изобретать неправдоподобную теорию происхождения математики как игры в метафоры. М. Балагер полагает, что такого рода стратегия фикционалистов вполне невинна, потому что для самой математики вопрос о существовании математических объектов вообще не является важным [17]. Так что, согласно знаменитому лозунгу П. Фейерабенда, в области философии науки, а теперь и в области философии математики «все пойдет».

Таким образом, расширительное понимание платонизма, которое предлагает Балагер, фактически лишает фикционализм какой-либо отчетливой позиции. При таком понимании платонизма и фикционализма сама постановка вопроса о математике как представлении знания становится расплывчатой. Дело в том, что полнокровный платонизм вообще не заостряет вопрос об априорных истинах и по этой причине нейтрален в отношении представления знания. Что касается Т-фикционализма, то его поглощение полнокровным платонизмом ликвидирует различие между номинализмом и платонизмом вообще. Наконец, если Т-фикционализм, как показано выше, совсем не затрагивает математическую практику, он не может пролить свет на представление знания. Исходя из этого следует заключить, что Т-фикционализм не может считаться значимой программой понимания математики в качестве репрезентационных вспомогательных средств. Это говорит о том, что слишком расширительное понимание позиций в философии математики ведет к тривиализации проблем вплоть до их исчезновения. Но вряд ли такая «терапия», ведущая к «рассасыванию» философских проблем математики, может считаться успешной исследовательской программой.

Примечания

1. См.: *Yablo S.* The myth of the seven // Fictionalism in Metaphysics / Ed. M. Kalderson. – Oxford Univ. Press, 2005. – P. 88–115.
2. См.: *Balaguer M.* Fictionalism, theft, and the story of mathematics // Philosophia Mathematica. – 2009. – V. III, No. 17. – P. 131–162.
3. См.: *Field H.* Science without Numbers: A Defence of Nominalism. – Oxford: Blackwell, 1980.
4. См.: *Puntam H.* Reason, Truth, and History. – Cambridge, 1982. – P. 33.
5. См.: *Benacerraf P.* Skolem and Sceptic // Proceedings of Aristotelian Society. – 1985. – Supp. v. 59. – P. 85–113.
6. Ibid. – P. 111.
7. См.: *Balaguer M.* Fictionalism, theft, and the story of mathematics.
8. См.: *Godel K.* What is Cantor's continuum problem // Philosophy of Mathematics / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. – Cambridge Univ. Press, 1983.
9. См.: *Benacerraf P.* What Numbers Could not Be // Philosophy of Mathematics / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam.
10. *Balaguer M.* Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics // Philosophia Mathematica. – P. 145–146.
11. См.: *Colyvan M.* The Indispensability of Mathematics. – Oxford Univ. Press, 2001.
12. См., например: *Fraasen B., van.* The Scientific Image. – Oxford: Clarendon Press, 1988.
13. *Quine W.V.* Success and limits of mathematization // Theories and Things. – Harvard Univ. Press, 1981. – P. 149–150.
14. *Putnam H.* Philosophy of logic // Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers. – Cambridge Univ. Press, 1979. – V. 1. – P. 347.
15. *Quine W.V.* From Stimulus to Science. – Harvard Univ. Press, 1995. – P. 57.
16. См.: *Balaguer M.* Fictionalism…

Дата поступления 09.06.2011

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
director@philosophy.nsc.ru

Tselishchev, V.V. **Mathematics as a presentation of knowledge when Platonism is broadly interpreted**

The paper deals with the analysis of nominalist reconstruction of the fundamentals of mathematics. The specific of the stated approach lies in giving up a contrast of Platonism and nominalism in certain versions. Platonism is considered in the version of so called full-blooded Platonism and nominalism is considered in the version of fixionalism. The conception set forth in the paper makes possible to consider mathematics as a presentation of deductive knowledge.

Keywords: mathematics, logic, Platonism, nominalism