Проблемы логики и методологии науки

ОБ ОСНОВНЫХ КРИТЕРИЯХ УБЕДИТЕЛЬНОСТИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Н.В. Белякин, Е.М. Черепанов

Убедительность доказательства связывается в большинстве своем с основными критериями, ее характеризующими. Некоторые аспекты этого рассмотрения, по нашему мнению, требуют дальнейшего изучения и уточнения. Это касается как уточнения различных смыслов основных критериев убедительности, так и изучения отношений между критериями. Такого рода попыткой и является предлагаемая статья.

Ключевые слова: доказательство, убедительность, смысл

Побудительным мотивом к написанию данной статьи послужила книга В.В. Целищева «Эпистемология математического доказательства», в которой наряду с основной темой исследования эпистемологических аспектов «ручного» и машинного доказательств рассматриваются различного рода концепции убедительности доказательства.

Научная практика связана с выдвижением гипотез. В рамках принятой гипотезы исследователь получает новое знание в изучаемой области. Мы исходим из принятых в рамках гипотезы аксиом, которые полагаем истинными, и с помощью определенных правил вывода через определенное количество шагов получаем заключение, которое считается также истинным и которое является для нас новым знанием. Стандартное определение знания в современной эпистемологии таково: знание есть обоснованная истинная вера. В рамках предлагаемой статьи удобно рассматривать этот тезис в следующей интерпретации: субъект α знает φ, если и только если справедливы следующие условия:

1) имеет место утверждение φ;
2) субъект α верит в истинность φ;
3) вера субъекта α в истинность φ имеет обоснование p,
4) обоснование p убедительно.

В данном случае в роли p выступает доказательство.

Математическое доказательство занимает важное место в философских аргументах относительно природы человеческого знания. Во-первых, доказательство есть аргумент веры в истинность, а различные теории правильности аргумента долгое время рассматривались как часть философии; до сих пор логика многими исследователями считается не частью математики под названием «математическая логика», а вполне актуальной философской проблематикой. Во-вторых, математическое доказательство инспирировало влиятельнейшие теории о природе идей и человеческого ума.

Главной характеристикой в традиционной концепции доказательства является *убедительность доказательства*. Доказательство представляет собой аргумент нашей веры в истинность утверждения, и этот аргумент должен быть убедительным.

Математическое доказательство есть доказательство в системе, которая считается обоснованной. Главными критериями, которые так или иначе связываются с убедительностью доказательства в современной литературе, являются формализуемость, обозримость, понимаемость и простота доказательства. Это неявные и неформальные критерии убедительности, поскольку доказательство является аргументом истинности. К этим критериям зачастую относят также чисто эстетические критерии типа красоты, изящества, элегантности и проч., но они не поддаются на данный момент разумному обоснованию.

Прежде всего следует разделить критерии относительно их применимости, т.е. рассмотреть, какой из критериев к чему относится. К основным характеристикам доказательства чаще всего относят следующие. В первую очередь, доказательство может быть убедительным или неубедительным, т.е. сначала важно убедиться, что доказательство является «доказательством». Доказательство может быть обозримым или необозримым, понятным или непонятным. Доказательство может быть простым или сложным. Доказательство может быть «изящным» (красивым, элегантным и т.д.). Таким образом, следует сразу отметить, что некоторые из критериев не относятся напрямую к убедительности доказательства. Можно лишь говорить, например, что более простое доказательство легче проверить на предмет его убедительности. Элегантное доказательство может оказаться неубедительным. Обозримое доказательство, если понятию обозримости придать смысл, может также оказаться неубедительным. Убедительность доказательства тесно связана с его проверяемостью, как «ручной», так и компьютерной. Проверка валидности доказательства состоит в проверке правильности его формализации. Поэтому к основным критериям убедительности доказательства следует прежде всего отнести критерий формализуемости, так как именно на этапе проверки мы можем убедиться, что представленное доказательство таковым и является. В свою очередь, правильность формализуемости доказательства зависит от его понимаемости и обозримости. Понятия понимаемости и обозримости связаны между собой в определенном контексте, о чем речь пойдет ниже.

После этих замечаний рассмотрим более подробно основные понятия, которые чаще всего связываются с критериями убедительности доказательства, а также рассмотрим отношения между этими критериями.

Формализуемость

В общем случае доказательство есть последовательность утверждений, и в этой последовательности переход от одного утверждения к следующему базируется на «если, то…» и считается правильным и обоснованным. В математической практике эти переходы носят нормативный характер, т.е. базируются на фиксированных правилах вывода. Тем не менее во многих случаях математический текст доказательства носит «интуитивный характер», обусловленный математическим фольклором, когда опускаются «тривиальные» рассуждения и эти «опускания» заменяются утверждениями типа «отсюда ясно, что…», «нетрудно убедиться, что…», «очевидно, что…» и т.п. В некоторых случаях подобного рода рассуждения оказываются несостоятельными либо потому, что они не могут быть формализованы, либо потому, что формализация показывает неверность этих рассуждений. Таким образом, можно утверждать, что *неформализуемая последовательность утверждений доказательством в математике не является*.

Формализуемость является необходимым и достаточным условием доказательства в математике, и лишь после выполнения этого условия имеет смысл рассмотрение остальных критериев убедительности доказательства. В этом плане представляются некритичными и несогласованными основные характеристики доказательства, выдвигаемые Д. Тимошко [1]. Характеристики эти по степени важности выстраиваются следующим образом. Первой из них Тимошко считает убедительность. Убедительность, по его мнению, является настолько фундаментальной характеристикой, что не подлежит объяснению. Доказательство либо убеждает, либо нет. Второй по важности характеристикой доказательства является обозримость. Обозримость доказательства говорит нечто существенное о его убедительности, поскольку доказательство убедительно, если оно обозримо. И последнее требование – это требование формализуемости.

На наш взгляд, в контексте обсуждения формализуемости непонятно, каким образом можно считать убедительным доказательство, которое доказательством не является, поскольку его формализация или невозможна или неверна. Ровно то же относится и к критерию обозримости. До тех пор пока мы не уточним смысл термина «обозримость», трудно говорить о роли обозримости относительно убедительности доказательства. Обозримость доказательства не гарантирует его убедительности и не «говорит нечто существенное об убедительности доказательства», так как и в этом случае обозримость становится фактором убедительности лишь для формализованного доказательства. Скорее всего, дело обстоит подобным же образом и в прочих естественных науках, в которых существуют свои критерии правильности доказательства. Убедительность доказательства не является самодостаточным фактором, ибо она, в свою очередь, зависит от нескольких факторов.

Понимаемость

Относительно представленного доказательства термин «понимаемость» может быть употреблен в трех различных смыслах. Во-первых, мы можем иметь в виду понимание значимости доказательства, т.е. понимание эпистемической значимости представленного результата доказательства. Во-вторых, понимание доказательства может трактоваться как понимание базовой идеи, лежащей в основе доказательства. Понимание базовой идеи доказательства выражается в осознании значимости последовательности ключевых утверждений представленного доказательства. По сути, это есть понимание того, каким образом математик получил представленное доказательство. Это есть понимание творческого акта. И наконец, в-третьих, понимание доказательства – это то, что имеет непосредственное отношение к его убедительности, а именно, понимание текста доказательства. В математической практике представленное доказательство организовано таким образом, чтобы оно могло быть понято человеком, обладающим вполне определенным уровнем компетенции не только в математике, но и в рациональном мышлении. В свою очередь, рациональное мышление кодифицируется логикой (в случае математического доказательства – математической логикой), и поэтому проверка математического доказательства есть логический анализ представленного текста доказательства. Именно в этом контексте понимание имеет непосредственное отношение к формализуемости. Здесь возможны два случая. Первый – это когда происходит формализация упомянутого выше «интуитивного» доказательства, второй – когда происходит проверка уже представленного формализованного доказательства. В обоих случаях математическое доказательство как результат рациональной деятельности апеллирует к пониманию сути производимых при этом операций, а этот аспект относится уже к профессиональной компетентности математика.

В литературе наряду с пониманием доказательства фигурирует еще и понятие осмысленности доказательства, причем аргументацией важности этого критерия служит соображение следующего рода: понимание возможно тогда, когда дискурс осмыслен [2]. Здесь сразу же возникает вопрос: что значит «дискурс осмыслен»? По-видимому, это означает, что мы способны придать тексту доказательства какой-то смысл. Единствен ли этот смысл? И какой из возможных смыслов правильный? Носит ли этот смысл метафорический характер? По нашему мнению, такая интерпретация осмысленности доказательства относится ко второму случаю интерпретации понимания доказательства, т.е. к пониманию идеи доказательства, которая прямого отношения к убедительности доказательства не имеет, так как во многом математическое доказательство – это чисто механическая процедура и понятия осмысленности не требует. Наверное, во многих случаях понимание в первом и особенно во втором смысле способствует пониманию в важном для нас смысле как критерия убедительности доказательства.

Таким образом, формализуемость доказательства зависит от его понимаемости, т.е. формализовано может быть только то, что понимаемо.

Обозримость

Следующим фактором, влияющим на убедительность доказательства, является его обозримость. Обозримость доказательства обычно связывается с возможностью его мысленного представления, когда это доказательство схватывается целиком. Здесь возможны два истолкования понятия обозримости [3].

С одной стороны, естественно полагать, что доказательство является обозримым, если на каждом шаге доказательства мы способны держать в уме все предыдущие шаги. Такое понимание обозримости доказательства означает, что мы имеем возможность мысленного представления пошагового доказательства целиком.

С другой стороны, понятие обозримости возможно трактовать как видение в целом ключевых моментов доказательства и понимание необходимости переходов от одного ключевого утверждения к другому. То есть если доказательство достаточно длинное и нет возможности удерживать в памяти всю последовательность его шагов, то выделяются ключевые моменты этой последовательности, которые образуют, в свою очередь, последовательность утверждений, и эта последовательность обозрима в первом смысле.

Обозримость в первом смысле в литературе называется *локальной обозримостью*. Обозримость доказательства во втором смысле называют *глобальной обозримостью*. Локально обозримое доказательство предстает в третьем смысле как понимание текста доказательства, имеющее непосредственное отношение к формализуемости. Глобально обозримое доказательство связано с пониманием доказательства во втором смысле, когда понимается базовая идея, лежащая в основе доказательства, понимается то, каким образом математик получил представленное доказательство. Необходимо тут же отметить, что всякое локально обозримое доказательство также и глобально обозримо, но не всякое глобально обозримое доказательство локально обозримо. В этом и состоит суть различия данных понятий. Имея локально обозримое доказательство, мы можем видеть и глобальную идею как последовательность ключевых утверждений, лежащих в основе этого доказательства. С другой стороны, глобально обозримое доказательство не гарантирует локальной обозримости ни доказательства в целом, ни каждого из его ключевых фрагментов. Результатом приведения интуитивного доказательства к необходимой степени строгости является его неизбежное усложнение в том смысле, что локально обозримое интуитивное доказательство может перестать быть таковым. Поэтому понятие локальной обозримости доказательства (или его ключевого фрагмента) следует относить к формализованному доказательству. В этом отношении нам представляется справедливой точка зрения, согласно которой локальная обозримость доказательства является следствием его формализуемости.

Обозримость доказательства непосредственно связана с его проверяемостью в том смысле, что если обозримость доказательства есть некоторый критерий, говорящий нам об убедительности, тогда следует его отнести не к собственно доказательству, а к нашей способности его проверить. Возникает естественный вопрос: в каких случаях локально необозримое доказательство может считаться убедительным? В математической практике в сложных доказательствах используют «укрупнение» фрагментов доказательства, вводя в доказательства вспомогательные утверждения (леммы, отсылки к уже доказанным результатам и т.д.). Таким образом, локально необозримое доказательство представляется цепочкой логически законченных фрагментов, каждый из которых является локально обозримым, и вся цепочка фрагментов также локально обозрима. То есть формируется глобально обозримое доказательство, каждый фрагмент которого локально обозрим. Есть все основания такого рода доказательство считать убедительным.

Простота

Роль критерия простоты в доказательстве утверждений в рамках теории многозначна. Если доказательство есть последовательность утверждений, в которой переход от одного утверждения к другому представляется необходимым, то возникает вопрос о том, почему математическая практика в значительной степени состоит из «передоказывания» теорем, поиска новых, все более простых доказательств. В этом смысле данную практику можно рассматривать как движение от формализованного доказательства к интуитивному – доказательству, понимаемому на интуитивном уровне. Таким образом, мы имеем две тенденции в доказывании теорем. С одной стороны, теоремы, в доказательстве которых используются интуитивные соображения, передоказываются в соответствии с пересмотром критериев строгости математического доказательства. С другой стороны, строго доказанные теоремы передоказываются для того, чтобы достичь понимания доказательства (здесь понимание доказательства является критерием его убедительности). Этот процесс понимания и проявляется в серии все более новых доказательств, все более простых.

Простота доказательства является не просто психологическим критерием, а выступает одним из основных требований к доказательству. Например, доказательство теоремы о классификации теории групп является очень длинным и занимает более 15 тыс. страниц. Естественным образом возникает вопрос о строгости подобного рода доказательств, так как проверить их «вручную» не под силу ни отдельному человеку, ни даже целому коллективу. Возникает также вопрос о статусе теоремы, т.е. о том, можно ли считать данное утверждение теоремой, так как сложно говорить об убедительности этого доказательства. Во всех случаях, когда это возможно, ищут более простое доказательство, позволяющее убедиться в истинности утверждения теоремы. Более простое доказательство является потенциально более обозримым, более понимаемым и более поддающимся строгой формализации.

Понятие простоты/сложности относительно текста представленного доказательства, может истолковываться в двух смыслах. Во-первых, понятие сложности доказательства можно соотносить с длиной доказательства и сложностью слов, используемых в нем [4]. Практика передоказывания теорем в поисках более простого, а следовательно, и более убедительного доказательства основывается в основном на таком понимании простоты доказательства. Причем если удается с помощью передоказывания достичь локальной обозримости текста доказательства, то это становится важным фактором в признании доказательства убедительным.

Во-вторых, доказательство можно считать простым, если проста сама идея (схема) доказательства. В этом случае, по-видимому, играют роль следующие соображения: схема доказательства как последовательность ключевых утверждений обозрима и понятна, и даже если некоторые или все фрагменты не являются обозримыми, то они понятны. Простое доказательство в этом смысле облегчает восприятие его текста, но ничего не говорит относительно его убедительности. Является ли простота в первом смысле (простота текста доказательства) существенным критерием убедительности доказательства? Мы считаем, что нет, и вот почему. Простота в данном случае есть отношение на классе доказательств. Можно сказать, что одно из двух доказательств является более простым, но из этого не следует, что более простое доказательство в общем случае более убедительно. Простота в этом случае тесным образом связана с проверяемостью. Более простое доказательство легче проверить, так как оно является «более» обозримым, поскольку обозримость связана с длиной доказательства.

Компьютерное доказательство

Наряду с использованием «ручного» доказательства в последнее время успешно развиваются методы компьютерного доказательства теорем. Компьютерные методы применяются как для доказательства новых результатов, так и для проверки уже сделанных доказательств. Вопрос об убедительности компьютерных доказательств стоит в той же мере, как и вопрос об убедительности доказательств, сделанных математиком. Но прежде чем начать обсуждение вопроса об убедительности компьютерного доказательства, необходимо уточнить, о чем будет идти речь, т.е. что мы будем иметь в виду, говоря о компьютерном доказательстве. Здесь необходимо разделить инструмент, позволяющий осуществить доказательство, и полученный с помощью этого инструмента результат доказательства. К инструменту доказательства естественно отнести программу, осуществляющую доказательство, и собственно компьютер, реализующий инструкции программы. К результату работы компьютера, осуществляющего доказательство, будем относить текст доказательства. Допустим для удобства, что этот текст может быть представлен нашему вниманию в том же виде, что и текст «ручного» доказательства. Таким образом, говоря о компьютерном доказательстве, мы будем иметь в виду триаду: *программа → компьютер → результат*.

Основными причинами, не позволяющими считать любое компьютерное доказательство убедительным, являются следующие. Во-первых, вера в убедительность компьютерного доказательства может основываться на надежности работы компьютера. Однако каждый современный компьютер имеет скрытые ошибки и в программах, и в «железе». Кроме того, в работе каждого компьютера случаются сбои, и хотя они достаточно редки, невозможно гарантировать, что этого не произойдет в ходе компьютерного доказательства [5]. Во-вторых, компьютерная программа конструируется согласно законам формальной системы и, казалось бы, является идеалом формального доказательства, но при написании в нее также могут попасть ошибки.

Применимы ли к компьютерному доказательству критерии убедительности, которые мы соотносим с обычным доказательством? Наибольшее доверие в качестве критерия убедительности компьютерного доказательства вызывает критерий формализации. Принципы формализации доказательства осуществлены в *программе*, а результат этого осуществления представлен текстом *результата*. Как уже говорилось, принято полагать, что компьютерное доказательство является идеалом формального доказательства. Однако отмеченные выше обстоятельства – сбои в работе машины и возможные ошибки при написании программы – не позволяют полагать достигнутую формализацию надежным критерием убедительности. Тем не менее критерий формализации применим к компьютерному доказательству.

Поскольку компьютерное доказательство считается в должной степени формализованным, постольку понятие понимания этого доказательства к компьютерному доказательству применимо, т.е. при проверке *результата* этого доказательства можно убедиться в правильности переходов от одного шага к другому. Это доказательство понимаемо в указанном выше третьем смысле. Понимаемо ли компьютерное доказательство во втором смысле, т.е. понимаема ли идея такого доказательства как последовательность ключевых и значимых утверждений? Если нам представлен лишь результат доказательства, то ответить на этот вопрос положительно в общем случае нельзя, так как кажется сомнительным, что анализ этого, возможно, необозримого текста приведет нас к пониманию идеи доказательства. С другой стороны, математик, составляющий *программу* и использующий компьютер как вспомогательное средство для доказывания теорем, руководствуется вполне понятными для него идеями. То есть само доказательство может быть разделено на вполне осмысленные фрагменты. При составлении *программы*, доказывающей теорему, это реализуется в виде вполне определенной блок-схемы программы (возможно, с комментариями), которая глобально обозрима и выражает собственно идею доказательства. То есть машинное доказательство может быть в этом случае понимаемо и во втором смысле (в смысле идеи доказательства), и эпистемическая значимость такого доказательства вполне сопоставима с эпистемической значимостью «ручного» доказательства. Тогда сомнительными выглядят концепции, принижающие познавательную роль компьютерного доказательства. Кроме того, компьютерное доказательство в некоторых случаях может использоваться частично, т.е. некоторые фрагменты (в основном рутинные) могут доказываться с помощью компьютера, а некоторые – «вручную». В обоих случаях компьютерное доказательство может быть понимаемо во все трех смыслах.

Однако если все же допустить, что компьютер работает без сбоев и программа, реализующая доказательство, написана без ошибок, существует по меньшей мере еще один аспект, влияющий на убедительность компьютерного доказательства, который требует обсуждения.

В обширной статье А. Мостовски [6], посвященной описанию и метаматематическому исследованию синтаксических моделей различных аксиоматических систем, производимому средствами самих этих систем (в предположении их непротиворечивости или без него), устанавливается, среди прочего, *рефлексивность арифметики*. Иначе говоря, утверждается, что для любого конечного фрагмента A названной системы, в ней выводима формула Con_A, выражающая (как принято думать) интуитивную непротиворечивость A.

Приводимое доказательство – очень громоздкое, с отсылкой к ε-теореме Гильберта – дает основания предположить, что такой вывод можно построить по заданному A посредством некоторого явно не указанного алгоритма. Однако без его указания (хотя бы в виде обозримой схемы) трудно уловить реальный смысл устанавливаемого там результата.

Этот гипотетический алгоритм должен, по идее, работать с математическими объектами: формулами, доказательствами и т.п. Путем естественно напрашивающейся кодировки его, алгоритм, можно, предположительно, преобразовать в примитивно-рекурсивное (*п.р.*) описание некоторой функции (список функциональных равенств с метапеременными для цифр на местах аргументов). После такого рода формализации полученная примитивно-рекурсивная функция может быть отображена вполне определенной компьютерной программой, понятность и глобальная обозримость которой не вызывают сомнений. Основная трудность состоит в другом. Допустим, что это сделано, но и тогда мы не получим однозначного истолкования словесного оборота «для всякого фрагмента *A*». И такая недосказанность, кстати, не осталась без последствий для дальнейших изысканий в основаниях математики. Их причину можно обозначить одним словом – недоформализованность. Притом, похоже, незамеченная.

Лишь такому, недостаточно критичному, взгляду может представиться, будто достаточно поместить *символы числовых переменных* на аргументные места упомянутого описания, чтобы полученная копия стала его полноценным *формальным заместителем* – принадлежностью *п.р.* расширения формализованной арифметики. И оперируя этим, так сказать, *п.р. аналогом* подразумеваемого алгоритма, можно будет устанавливать корректные утверждения общего характера. Но не следует забывать, что такое копирование – не более чем *имитация* первоначального алгоритма, адекватность (исходному замыслу) которого, в свою очередь, подлежит формальной верификации. Дело в том, что в каждом конкретном случае п.р. аналог исходного алгоритма требует соответствующего доопределения для его компьютерной реализации. Корректность этого доопределения и требует верификации.

Таким образом, из вышесказанного следует, что формализация по отношению к компьютерному доказательству имеет еще один важный аспект, который может существенно влиять на убедительность компьютерного доказательства.

Требование локальной обозримости в общем случае подрывает доверие к компьютерному доказательству. Доказательство должно быть проверяемо. И здесь даже неважно, кто будет проверять конкретное компьютерное доказательство – человек или другая компьютерная программа. Человеку это может оказаться не под силу из-за длины доказательства. Если же проверка доверена другой компьютерной программе, то неизбежно встает вопрос о доверии к результатам этой проверки, что неизбежно приводит к проверке правильности работы проверяющей программы человеком, а это может натолкнуться на те же трудности. Поэтому есть основания считать требование локальной обозримости неприменимым к компьютерному доказательству. Но компьютерное доказательство, как было сказано выше, может быть глобально обозримо, и эта глобальная обозримость с четко выраженной идеей доказательства будет проявлена в блок-схеме программы. Во всяком случае, для доказывающего с помощью программы математика эта идея будет несомненно ясна и ясность может быть, при желании, отражена в блок-схеме программы в виде комментариев.

Понятие простоты доказательства применимо к компьютерному доказательству в той же мере, что и к обычному доказательству. Два доказательства одного и того же утверждения сравнимы по степени своей сложности. Для компьютерных доказательств возможен поиск простейшего доказательства за заданное число шагов [7].

С учетом вышесказанного относительно компьютерного доказательства теорем ответ на вопрос о том, меняется ли понятие доказательства применительно к компьютерным доказательствам, будет следующим. Применительно к тем случаям, когда компьютер используется так же, как и карандаш, т.е. как вспомогательное средство для рутинных операций, понятие компьютерного доказательства идентично понятию доказательства в традиционном смысле. Более того, как было показано выше, компьютерное доказательство может иметь такую же познавательную ценность, что и «ручное» доказательство. Интересными кажутся также перспективы использования компьютера для имитации человеческого мышления [8], что позволило бы расширить возможности компьютерного доказательства теорем.

Примечания

1. См.: *Tymoczko T.* Four-color problem and its philosophical significance // Journal of Philosophy. – 1979. – V. LXXVI. – P. 57–83.

2. См.: *Целищев В.В.* Эпистемология математического доказательства. – Новосибирск: Параллель, 2006. – С. 61–67.

3. Там же. – С. 98.

4. См.: *Черепанов Е.М.* Простота как критерий убедительности доказательства // Философия науки. – 2010. – № 1(44). – С. 91–101.

5. См.: *Целищев В.В.* Эпистемология математического доказательства. – С. 46–48.

6. См.: *Mostovski A.* On models of axiomatic system // Fund. Math. – 1952. – V. 39. – P. 133–158.

7. См.: *Черепанов Е.М.* Простота как критерий убедительности доказательства.

8. См.: *Белякин Н.В., Гайлит Е.В.* Рекурсивная имитация гиперарифметической вычислительности // Философия, математика, лингвистика: аспекты взаимодействия: Мат. Междунар. науч. конф. (Санкт-Петербург, 20–22 ноября 2009 г.). – СПб., 2009. – С. 72–76.

Дата поступления 10.03.2010

Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск
emcher@math.nsc.ru

***Belyakin, N.V. and Ye.M. Cherepanov.* On fundamental criteria of proof convincingness**

Proof convincingness is usually associated with fundamental criteria which describe it. We believe that some aspects of this consideration need further study and more precise definition. We mean both definition of different senses of fundamental criteria of proof convincingness and study of criteria relations. The present paper is quite such an attempt.

Keywords: proof, convincingness, sense