ФИЗИЧЕСКИЙ ТЕЗИС ЧЁРЧА*

К.Ф. Самохвалов

В статье дается методологический анализ физического тезиса Чёрча.

Ключевые слова: стандартный тезис Чёрча, физический тезис Чёрча, сверхзадача, гипервычисление

Стандартный тезис Чёрча (СТЧ) отождествляет интуитивно вычислимые функции с функциями, вычислимыми с помощью машин Тьюринга, и рассматривается обычно как методологически важная *философско-математическая* гипотеза. Между тем хотя машина Тьюринга никоим образом не является физическим объектом, само слово «машина» провоцирует некоторых людей считать, что интуитивный смысл слова «вычислимая» как-то относится также и к тому, что может делаться с помощью *физических* систем. Поэтому нет ничего удивительного в том, что наряду со *стандартным* тезисом Чёрча людям приходит в голову идея так называемого *физического тезиса Чёрча* (ФТЧ):

Числовая функция f физически вычислима (т.е. вычислима с помощью какой-либо физической системы) $\Leftrightarrow$ функция f вычислима с помощью машины Тьюринга [1].

Цель настоящей работы – дать методологический анализ этого тезиса. Читателю желательно ознакомится предварительно с нашими предыдущими работами [2].

* Работа поддержана грантом № 47 Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН «Логико-математический анализ выразительных возможностей языка в представлении знания: соотношение синтаксиса, семантики и семиотики в формализации научных теорий» и грантом НШ-335.2008.1.

§ 1. Терминология

Чтобы внятно говорить (и рассуждать) о тех или иных разновидностях тезиса Чёрча, необходимо, конечно, отчетливо осознавать, что в разных контекстах глагол «вычислять» понимается в разных смыслах. Соответственно, то же самое справедливо как по отношению к прилагательному «вычислимая», так и по отношению к существительным «вычисление» или «вычислимость». К сожалению, эта разница смыслов зачастую проявляется терминологически неудобным или даже просто терминологически не фиксируемым образом. Что, конечно, чревато всякого рода недоразумениями. Чтобы с этим разобраться, резонно начать с примеров [3].

1.1. Рассмотрим бинарную всюду определенную числовую функцию bb, задаваемую условием:

1, если R истинно;
$bb(x, y) = 0,$
если R ложно,

где R является высказыванием: «Цезарь думал о луне в момент своей смерти», – чье истинностное значение мы *не можем установить в принципе,* так как не располагаем способностью проникать непосредственно в чужое сознание (и способностью путешествовать во времени). Так как функция bb заведомо является постоянной, она является рекурсивной и – согласно *стандартному* пониманию вычислимости – *вычислимой* с помощью машины Тьюринга. Но при этом мы все-таки не можем указать алгоритм, который управлял бы ее вычислением, так как невозможно узнать, истинно ли предложение R или оно ложно. Следовательно, для любых значений аргументов x и y мы *в принципе не можем указать* значение $bb(x, y)$ рассматриваемой функции на этих аргументах, или, как еще говорят, мы *в принципе не можем вычислить* $bb(x, y)$ *по* x *и* y.

Читатель, таким образом, получил пример бинарной всюду определенной *вычислимой* (постоянной) функции, (*единственное*) *значение которой нельзя вычислить*. Пусть это будет пример № 1 *терминологического неудобства,* которое, тем не менее, необходимо явно осознавать. Ибо в противном случае психологически легко возникает коллизия смыслов.

Все дело в том, что когда мы называем функцию bb просто *вычислимой*, мы имеем в виду *стандартный* смысл вычисления – вычисления *в согласии с алгоритмом*, который *реализовал* бы эту функцию [4], и имеем уверенность, что такой алгоритм *существует*. Таким алгоритмом является, например, одно из двух следующих предписаний клерку: 1) коль скоро даны натуральные числа x и y, пиши $bb(x, y) = 0$; 2) коль скоро даны натуральные числа x и y, пиши $bb(x, y) = 1$.

А когда мы говорим, что *единственное значение функции* bb *нельзя вычислить в принципе*, мы имеем в виду вовсе *не отрицание существования искомого алгоритма, а отсутствие возможности правильно его опознать* среди двух только что указанных. Если бы такая возможность присутствовала, то мы должны были бы назвать функцию bb не просто *вычислимой*, а еще и *вычислимой в смысле Кальмара* [5].

1.2. Пусть c – это фиксированная монета, которую мы произвольно выбрали и которую собираемся *один и только один* раз подбросить. Рассмотрим теперь бинарную всюду определенную (постоянную) числовую функцию a_c, задаваемую условием

$$a_c(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если при единственном подбрасывании монеты } c \text{ выпадет «орел»;} \\ 0, & \text{если при единственном подбрасывании монеты } c \text{ выпадет «решка».} \end{cases}$$

Очевидно, что функция a_c, как и функция bb, вычислима (в стандартном смысле), невычислима в смысле Кальмара, но в отличие от функции bb значение $a_c(x, y)$ этой функции a_c для каждой пары натуральных чисел x и y можно указать, лишь один раз подбросив монету c, т.е. *с помощью физического эксперимента.*

По всей вероятности, когда говорят о *физических вычислениях* (вычислениях с помощью физических систем), имеют в виду нечто подобное последнему обстоятельству. Таким образом, мы имеем пример *вычислимой, физически вычислимой, невычислимой в смысле Кальмара* функции. Пусть это будет пример № 2 упомянутого терминологического неудобства.

Заметим, что в примере № 1 функция bb является *физически невычислимой.*

1.3. Рассмотрим теперь еще одну бинарную всюду определенную числовую функцию ***ccf***, задаваемую следующим образом (ср.: функция ***cf*** из работы автора «Обзор аргументов против тезиса Чёрча», разд. 2.2):

1, если x-е подбрасывание монеты ***c*** завершается «орлом»;
ccf $(x, y) = 0$,
если x-е подбрасывание монеты ***c*** завершается «решкой».

Из рассуждений, приведенных в указанном разделе работы «Обзор аргументов против тезиса Чёрча», сразу следует: крайне невероятно, чтобы для данной фиксированной монеты ***c*** функция ***ccf*** оказалась бы вычислимой (в стандартном смысле). Кроме того, очевидно, что функция ***ccf*** является невычислимой в смысле Кальмара. При этом, однако, ***ccf*** физически вычислима, причем, как читателю ясно, вполне тривиальным образом. Значит, с большой вероятностью функцию ***ccf*** можно считать *невычислимой*, *невычислимой в смысле Кальмара* и *физически вычислимой*. Пусть это будет примером № 3 все того же терминологического неудобства.

1.4. Таким образом, каждую числовую функцию можно характеризовать ответами на следующие три вопроса: а) является ли она вычислимой? б) является ли она вычислимой в смысле Кальмара? в) является ли она физически вычислимой? Например, функция ***bb*** характеризуется тройкой ответов («да», «нет», «нет») на вопросы (а), (б), (в) соответственно. Подобным образом функция a_c характеризуется тройкой «да», «нет», «нет». Наконец, что касается функции ***ccf***, то нельзя сказать однозначно, какой именно тройкой она характеризуется. Можно лишь с очень большой долей уверенности предположить, что она характеризуется тройкой «нет», «нет», «да». Или можно с очень малой степенью уверенности предположить, что она характеризуется тройкой «да», «нет», «да». Или можно с очень малой степенью уверенности предположить, что она характеризуется тройкой «нет», «да», «да». Или можно с очень малой степенью уверенности предположить, что она характеризуется тройкой «да», «да», «да».

Если пренебречь предположениями с малыми степенями уверенности, то разделы **1.1, 1.2, 1.3** можно резюмировать приводимой ниже/выше таблицей с двумя входами. В этой таблице входы по вертикали соответствуют вопросам (а), (б), (в), а входы по горизонтали – логически возможным тройкам соответствующих этим вопросам ответов. Тогда выделенные строчки (в порядке сверху вниз) в этой таблице характеризуют соответственно функции ***ccf***, ***bb***, ***ac***.

А	б	в
нет	нет	нет
нет	**нет**	**да**
нет	да	нет
нет	да	да
да	**нет**	**нет**
да	**нет**	**да**
да	да	нет
да	да	да

Можно сказать, что данная таблица демонстрирует употребление неудобной терминологии *наглядным* образом, поэтому она приемлема как простейшее средство против непреднамеренного смешения понятий, затрудняющего внятное изложение темы физического тезиса Чёрча.

§ 2. Умеренный физический тезис Чёрча и гипервычислимые функции

2.1. Обозначим через α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8 строчки в приведенной здесь таблице в порядке сверху вниз, так что α_1 = (нет, нет, нет), α_2 = (нет, нет, да), α_3 = (нет, да, нет), …, α_8 = (да, да, да).

Условимся называть некоторую совокупность всюду определенных двуместных числовых функций α_i-*классом*, $I = 1, \ldots, 8$, если эта совокупность состоит из всех тех и только тех функций, которые характеризуются тройкой α_i. Очевидно, все восемь классов попарно не пересекаются.

Тогда пример № 1 говорит о том, что α_5-класс не пуст; пример № 2 говорит о том, что не пуст α_6-класс; пример № 3 говорит о том, что не пуст α_2-класс. Рассуждения Л. Кальмара [6] свидетельствуют в пользу того, что, по-видимому, не пуст α_3-класс. Относительно четырех остальных α_i-классов нет нужды говорить в настоящей работе что-либо определенное относительно того, пуст ли каждый из них или не пуст.

Пусть аббревиатуры *ВФ*, *КФ* и *ФФ* соответственно означают: класс всех всюду определенных вычислимых функций двух аргументов; класс всех всюду определенных функций двух аргументов, вычислимых в смысле Кальмара; класс всех физически вычислимых всюду определенных функций двух аргументов. Тогда очевидно, что

$$\alpha_5\text{-класс} \cup \alpha_6\text{-класс} \cup \alpha_7\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс} = \mathit{ВФ}, \qquad (1)$$

$$\alpha_3\text{-класс} \cup \alpha_4\text{-класс} \cup \alpha_7\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс} = \mathit{КФ}, \qquad (2)$$

$$\alpha_2\text{-класс} \cup \alpha_4\text{-класс} \cup \alpha_6\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс} = \mathit{ФФ}. \qquad (3)$$

Обозначим через *ОРФ* класс всех общерекурсивных функций двух аргумента. Ясно, что стандартный тезис Чёрча СТЧ – это гипотеза о том, что *ВФ* = *ОРФ*. Значит, из (1) вытекает, что эта гипотеза может быть выражена в виде

$$\alpha_5\text{-класс} \cup \alpha_6\text{-класс} \cup \alpha_7\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс} = \mathit{ОРФ} \qquad (4)$$

С другой стороны, физический тезис Чёрча ФТЧ – это гипотеза о том, что *ФФ* = *ОРФ*. Тогда из (3) вытекает, что он эквивалентен гипотезе о том, что

$$\alpha_2\text{-класс} \cup \alpha_4\text{-класс} \cup \alpha_6\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс} = \mathit{ОРФ}. \qquad (5)$$

Кроме того, Из (2) вытекает, что гипотеза *КФ* = *ОРФ* равносильна гипотезе о том, что

$$\alpha_3\text{-класс} \cup \alpha_4\text{-класс} \cup \alpha_7\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс} = \mathit{ОРФ}. \qquad (6)$$

2.2. Обсуждению гипотез (4) и (6) посвящена наша работа «Обзор аргументов против тезиса Чёрча». В ней, в частности, констатируется, что пока не найдено опровержение гипотезы (4). Что же касается гипотезы (6), то, как читатель может узнать из упомянутой работы, Кальмар привел серьезные доводы в пользу того, что она не верна. Согласно его доводам, предположение, что некоторая конкретно указанная специальная числовая всюду определенная, но не общерекурсивная функция g не принадлежит классу *КФ*, имеет нелепые следствия. Поэтому Кальмар вместо (6) выдвигает гипотезу о том, что

$$(\alpha_3\text{-класс} \cup \alpha_4\text{-класс} \cup \alpha_7\text{-класс} \cup \alpha_8\text{-класс}) \supset ОРФ, \qquad (7)$$

где включение $\supset$ является собственным [7].

Рассмотрим теперь гипотезу (5). Нетрудно видеть, что из (5) вытекает

$$\alpha_2\text{-класс} = \alpha_4\text{-класс} = \varnothing,$$

что противоречит примеру № 3. Стало быть, физический тезис Чёрча в формулировке ФТЧ – чрезмерно сильная гипотеза, ибо она опровергается тривиальным образом. Поэтому интересными формулировками физического тезиса Чёрча могут быть только формулировки более слабых гипотез, чем гипотеза тезиса Чёрча в формулировке ФТЧ. Будем называть их формулировками *умеренных* физических тезисов Чёрча [8].

2.3. Обозначим через *ГФ* объединение α_2-класс $\cup$ α_4-класс и назовем его классом *гипервычислимых* функций. Класс *ГФ* не пуст, так как не пуст α_2-класс, которому принадлежит, по крайней мере, функция ***ccf***.

Тот факт, что ***ccf*** $\in$ *ГФ*, представляется, однако, все же малоинтересным, так как малоинтересна сама по себе функция ***ccf***. Поэтому естественно возникает вопрос: содержит ли класс *ГФ* хотя бы одну невычислимую функцию, такую, знать значения которой *важно* по тем или иным причинам? Ясно, что положителен ли или отрицателен искомый ответ – это, конечно, зависит помимо всего прочего также и от того, какова упомянутая важная невычислимая функция.

Очевидно, что можно указать бесчисленное множество претендентов на роль такой важной невычислимой функции. И все-таки первое, что приходит в голову, так это взять в качестве нее *характеристическую функцию проблемы остановки* (обозначим ее через ***halt***) для машин Тьюринга. Тогда *относительно нее умеренный физический тезис Чёрча*, или просто *физический* {***halt***}*-тезис Чёрча* (сокращенно Ф{***halt***}-ТЧ), формулируется в виде гипотезы о том, что упомянутый ответ отрицателен, т.е. что характеристическая функция проблемы остановки *halt* не принадлежит классу *ГФ*. Иными словами, мы имеем гипотезу

$$halt \notin ГФ. \tag{8}$$

2.4. Попытки опровергнуть именно *эту* гипотезу или по крайней мере привести разумные доводы против нее – основное содержание ведущихся ныне дебатов на тему «Физический тезис Чёрча и гипервычисления». Эта же гипотеза – главный предмет интереса в настоящей статье.

Следует, тем не менее, заметить, что по желанию можно интересоваться и многими другими умеренными физическими тезисами Чёрча, каждый из которых будет подпадать под следующую обобщенную формулировку:

Пусть F – произвольный класс всюду определенных числовых функций (двух аргументов). Тогда *умеренный физический тезис Чёрча относительно класса* ***F***, или просто *физический* ***F****-тезис Чёрча* (сокращенно ФF-ТЧ), – это гипотеза о том, что ни одна функция из класса F не принадлежит классу *ГФ*.

Иными словами, речь идет о гипотезе в формулировке

$$\forall f \in F\,(f \notin ГФ). \tag{9}$$

Под эту формулировку подпадает, например, тривиальный умеренный физический тезис Чёрча относительно функции ***ccf***, т.е. Ф{***ccf***}-ТЧ. В этом случае класс F – это синглетон {***ccf***}. Такое же замечание справедливо, конечно, и по отношению к Ф{*halt*}-ТЧ.

Словом, (9) на самом деле является записью *схемы* умеренных физических тезисов Чёрча.

§3. Характеристическая функция проблемы остановки [9]

3.1. В «Обзоре аргументов против тезиса Чёрча» машины Тьюринга уже упоминались. Однако в настоящей работе необходимо поговорить о них более подробно.

Итак, машина Тьюринга (сокращенно *M*) имеет две главные части. Во-первых, имеется потенциально бесконечная в обе стороны лента, разделенная на ячейки. Каждая ячейка содержит один символ (который может быть пустой ячейкой). Во-вторых, имеется активное устройство (головка), которое может находиться в одном из конечного числа состояний. Это активное устройство воздействует на ленту одним из следующих четырех способов: оно считывает символ из ячейки; записывает символ в ячейку; смещается по ленте на одну ячейку влево; смещается по ленте на одну ячейку вправо. Активное устройство машины Тьюринга действует в дискретные моменты времени (действует в дискретном времени). В каждый момент активное устройство считывает символ из какой-то ячейки на ленте. Этот символ из этой ячейки и текущее состояние активного устройства определяют, что делать активному устройству: записать ли некоторый символ в текущую ячейку и перейти в некоторое состояние, или сместиться влево и перейти в некоторое состояние, или сместиться вправо и перейти в некоторое состояние. Когда что-нибудь из этого случается, мы говорим, что активное устройство *реагирует* на свое внутреннее состояние и символ на ленте. Всем машинам Тьюринга присуща эта общая структура.

Хотя, строго говоря, именно активные устройства машин Тьюринга осуществляют воздействия над лентой (которая пассивна), для простоты мы следуем стандартному соглашению приписывать активность просто самим машинам Тьюринга. Машины Тьюринга отличаются одна от другой алфавитом, которым они оперируют, числом своих внутренних состояний и, что более важно, конкретными действиями, которые они осуществляют в ответ на свои внутренние состояния и символы на ленте. Описание способа, которым конкретная машина Тьюринга реагирует на конкретное состояние и на конкретный символ на ленте, называется здесь *инструкцией* (*командой*). Множество инструкций, которое однозначно идентифицирует некоторую машину Тьюринга, называется *программой* (*для*) *этой машины* (*M-программой*).

Чтобы избежать путаницы, сами машины Тьюринга *M* должно отличать от *M*-программ, которые описывают их поведение.

В последующих двух разделах мы покажем, что программы для машин Тьюринга можно кодировать, используя алфавит, которым оперируют машины, и затем записывать эти программы на ленты машин. Более того, имеются специальные машины Тьюринга, называемые *универсальными* машинами Тьюринга U, которые могут реагировать на всякую *M*-программу, записанную на ленте, так, чтобы симулировать поведение машин Тьюринга, описываемое этой программой. Так как универсальные машины Тьюринга вычисляют, отвечая на *M*-программы, записанные на их ленте, мы говорим, что они *выполняют* M-программы. Нет нужды говорить, что поведение универсальных машин Тьюринга также описывается их собственными программами, называемыми *универсальными* программами (U-программами).

Формально определяя M, мы будем использовать следующие ингредиенты:

символы, обозначающие *внутренние состояния* активных устройств машин Тьюринга: $q_1, q_2, q_3, \ldots$;

символы, обозначающие *символы*, которые машины Тьюринга могут печатать на ленте: $S_0, S_1, S_2, \ldots$;

символы, обозначающие *исходные операции*: R (сместиться вправо), L (сместится влево);

выражения – конечные последовательности символов;

команды – выражения, имеющие один из следующих видов: 1) $q_i S_j S_k q_l$; 2) $q_i S_j R\, q_l$; 3) $q_i S_j L\, q_l$. Четверки первого вида означают, что в состоянии q_i, считав символ S_j, активное устройство должно напечатать символ S_k и перейти в состояние q_l. Четверки второго вида означают, что в состоянии q_i, считав символ S_j, активное устройство должно сместиться на одну ячейку вправо и перейти в состояние q_l. Наконец, четверки третьего вида означают, что в состоянии q_i, считав символ S_j, активное устройство должно сместиться на одну ячейку влево и перейти в состояние q_l.

Теперь легко определить M-программы, их алфавиты и их мгновенные описания, или моментальные кадры.

M-*программа* – это конечное множество команд, которое не содержит двух различных команд, таких, у которых первые два символа совпадали бы.

Алфавит M-программы: все символы S_i в командах за исключением S_0. Для удобства мы будем вместо S_0 писать B (бланк), а вместо S_1 писать 1.

Моментальный кадр – это выражение, которое содержит в точности один символ q_i, не содержит ни одного символа исходных операций и такое, что q_i не является самым правым символом.

Моментальный кадр описывает символы на ленте машины Тьюринга, положение активного устройства вдоль ленты и состояние активного устройства. В любом моментальном кадре символы S_i представляют символы на ленте, символ q_i представляет состояние активного устройства, а положение символа q_i среди S_i-х символов представляет положение активного устройства вдоль ленты. Для всякой ленты и всякой M-программы на любом шаге вычисления имеется моментальный кадр, представляющий символы, записанные на ленте, состояние активного устройства и его положение на ленте на данном шаге. На следующем шаге вычисления мы можем заменить старый моментальный кадр его непосредственным *последователем*, чье отличие от его предшественника указывает все изменения (ленты, положения и состояния активного устройства), что появились на этом шаге. Моментальный кадр без последователя, относящийся к данной M-программе, называется *терминальным кадром* (*терминалом для*) данной программы.

Используя понятие моментального кадра, можно строго определить вычисления с помощью M-программ.

Вычисление M-программой М: конечная последовательность моментальных кадров $a_1, \ldots, a_n$, такая что $1 \leq i < p$, $a_i + 1$ – последователь a_i, и a_n есть терминал для М. Мы называем a_n *результантом* a_1 *относительно программы* М.

С каждым натуральным числом n мы ассоциируем строчку $\mathbf{n} = 1^{n+1}$. Например: $\mathbf{4}$ = 11111. С каждой последовательностью (n_1, $n_2, \ldots, n_k$) чисел длины k мы ассоциируем выражение на ленте ($\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_k$), где

$$(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots \mathbf{n_k}) = \mathbf{n_1}\mathrm{B}\mathbf{n_2}\mathrm{B} \ldots \mathrm{B}\mathbf{n_k}.$$

Например: (1, 3, 2) = (**1**, **3**, **2**) = 11B1111B111.

Для заданного начального моментального кадра и заданной программы либо имеется вычисление, либо нет (если нет, то потому, что список моментальных кадров бесконечен).

Определяем: n-арная функция $f(x_1, \ldots x_n)$ является *вычислимой с помощью машины Тьюринга*, если и только если имеется M-программа М, такая что для каждого набора чисел $x_1, \ldots, x_n$ $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена тогда и только тогда, когда имеется вычисление программой М, такое что его первый моментальный кадр есть $q_1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, а результант содержит $n_j + 1$ вхождений символа 1, причем $f(x_1, \ldots, x_n) = n_j$. Мы пишем:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Psi_{\mathrm{M}}{}^{n}(x_1, \ldots, x_n).$$

3.2. Метод**,** в свое время разработанный Геделем, позволяет использовать натуральные числа для кодирования команд машин Тьюринга и, следовательно, для кодирования *M*-программ.

Как мы уже знаем, базисные символы, употребляемые для формулировки программ, суть следующие:

R, L;
S_0, S_1, S_2, … ;
q_1, q_2, q_3, … .

Ассоциируем с каждым из них нечетное натуральное число начиная с числа 3 по следующему правилу:

3 R
5 L
7 S_0
9 q_1
11 S_1
13 q_2
15 S_2
17 q_3
19 S_3
21 q_4
и т.д.

Тогда, стало быть, для каждого выражения M длины *n* имеется конечная последовательность нечетных чисел b_1, b_2, …, b_n, ассоциируемых с M. Теперь мы свяжем свое одно-единственное число с каждой такой последовательностью и, следовательно, с каждым выражением.

Пусть *a* – последовательность, состоящая из символов a_1, a_2, …, a_n. Пусть b_1, b_2, …, b_n – соответствующие числа, ассоциированные с этими символами. Тогда *геделевский номер* (для) последовательности *a* есть следующее число:

$$r = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Pr}\,(k)^{bk},$$

где Pr (k) – k-е простое число в порядке возрастания. Мы пишем $g_n(a) = r$ и $a = \mathrm{Exp}\,(r)$.

Если a – пустое выражение, то пусть $g_n(a) = 1$.

Пусть M_1, M_2, …, M_n – конечная последовательность выражений. Тогда геделевский номер этой последовательности выражений есть число

$$r = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{Pr}\,(k)^{g_n(M_k)}.$$

Легко видеть, что всякое выражение и всякая конечная последовательность выражений имеет один и только один геделевский номер. Так как M-программы являются множествами, а не последовательностями команд, всякая программа, состоящая из n команд, имеет $n!$ геделевских номеров.

Для каждого $n > 0$ пусть $T_n(z, x_1, \dots x_n, y)$ будет предикатом, для данных $z, x_1, \dots x_n, y$ означающим, что z есть геделевский номер M-программы Z, и что y есть геделевский номер вычисления относительно Z, начинающееся моментальным кадром $q_1(x_1, \dots x_n)$. Заметим: в теории рекурсивных функций доказывается, что всякая частично рекурсивная функция вычислима с помощью машины Тьюринга и, наоборот, всякая вычислимая с помощью машины Тьюринга функция является частично рекурсивной. Кроме того, доказывается, что для каждого $n > 0$ предикат $T_n(z, x_1, \dots x_n, y)$ примитивно рекурсивен.

3.3. Теперь нетрудно описать универсальные машины Тьюринга, которые вычисляют любую функцию, вычислимую любой машиной Тьюринга. Рассмотрим частично рекурсивную бинарную функцию $f(z, x) = u_1^1(\min_y T(z, x, y))$. Так как эта функция вычислима с помощью машины Тьюринга, постольку найдется M-программа U, такая что

$$\Psi_U^2(z, x) = f(z, x).$$

Эта программа называется *универсальной* M-программой (U-программой). Ее можно следующим образом использовать для вычисления любой одноместной частично рекурсивной функции. Если Z_0 есть M-программа и если z_0 есть геделевский номер программы Z_0, то

$$\Psi_U^2(z_0, x) = \Psi_{z0}(x).$$

Таким образом, если за числом z_0, записанным на ленте U, следует число x_0, то U вычислит число $\Psi_{z0}(x_0)$.

3.4. Рассмотрим функцию $halt(x, y)$, определяемую следующим образом. Для данного y пусть P будет M-программой, такой что $g_n(P) = y$. Тогда $halt(x, y) = 1$, если $\Psi_P(x)$ определено, иначе $halt(x, y) = 0$. Иными словами, $halt(x, y) = 1$, если и только если M-программа с геделевским номером y в конце концов останавливается на входе x, иначе $halt(x, y) = 0$. Имеет место следующая

Теорема: $halt(x, y)$ **–** не (обще) рекурсивная функция.

Эта теорема дает пример функции, которая является всюду определенной, но не вычислимой какими-либо M-программами. Функция *halt* называется *характеристической функцией проблемы остановки*, а сама теорема фиксирует точный смысл широко известного утверждения, что «проблема остановки неразрешима (с помощью машины Тьюринга)».

§ 4. Теории гипервычислений

Повторим еще раз: умеренный физический тезис Чёрча относительно произвольного класса функций F, подпадающий под формулировку (9), – гипотеза. Гипотеза в том смысле, что он допускает фальсификацию. А именно, если кто-либо предъявит *убедительный* пример ситуации, когда указанное условие (9) нарушается, то рассматриваемый умеренный физический тезис Чёрча будет опровергнут. Здесь апелляция к убедительности – а убедительность постигается только на опыте – делает эту гипотезу принципиально *эмпирической* [10]. Причем успех или неудача в фактическом поиске упомянутого убедительного примера, опровергающего рассматриваемый умеренный физический тезис, зависят, вообще говоря, от того, каков класс F и какова предполагаемая *физика*.

Различные *проекты*, нацеленные на то, чтобы реализовать желание находить подобные примеры, составляют ныне новое научное направление, называемое иногда (*теоретическим*) *исследованием гипервычислимости*. При этом каждый отдельный предлагаемый проект воспринимается как *теория* (соответствующего) *гипервычисления*.

4.1. Как уже было упомянуто ранее, предмет данной статьи – умеренный физический $\{halt\}$-тезис Чёрча. В соответствии с этим далее рассматриваются проекты опровержения только одной частной гипотезы, подпадающей под схему (9), именно, гипотезы (8).

4.2. Тем не менее для начала надо сказать, что все широко обсуждаемые в литературе теории гипервычислений обладают одной общей особенностью. Она заключается в том, что в каждой из этих теорий описывается некий «гиперкомпьютер», с помощью которого изобретатель теории предлагает «обуздать бесконечность» («the mark of hypercomputers is that they find a way to somehow harness the power of the infinite» [11]) приблизительно в том смысле, в каком иногда говорят: «осуществить бесконечный перебор». Но поскольку последнее многими людьми считается либо просто чем-то бессмысленным, либо *принципиально* (*логически*) невозможным, требуются пояснения. В результате пояснений читатель, надеемся, убедится, что все-таки имеются некие более или менее здравые смыслы, в которых допустимо утверждать, что «обуздать бесконечность» возможно. Именно этим последним обстоятельством вдохновляются изобретатели рассматриваемых здесь теорий гипервычислений.

В частности, один из таких смыслов связан с понятием «суперзадачи». Обратимся к этому понятию [12].

4.3. Читатель знаком, конечно, с апориями Зенона Элейского. Так вот, суперзадачи – это современные вариации на тему апорий Зенона о движении. А именно: хотя термин *суперзадача* относительно недавний (введен в 1954 г. Томсоном [13]), он обозначает очень старую идею (V в. до н.э.) бесконечной последовательности актов, или операций, осуществляемых за конечный временной интервал. Иногда рассматривается частный вид суперзадач, называемый *гиперзадачами*. А именно: с гиперзадачей мы встречаемся тогда, когда мы собираемся иметь дело с *несчетной* бесконечной последовательностью (трансфинитным ординалом) актов. Так что суперзадача, которая не является гиперзадачей, всегда означает *счетную* бесконечную последовательность актов, осуществляемых за конечный интервал времени. Ниже внимание уделяется именно таким суперзадачам.

4.4. Как уже было сказано, многие люди полагают, что осуществить *бесконечную* последовательность отдельных актов за *конечное* время заведомо невозможно, и поэтому все разговоры о суперзадачах они с самого начала считают *беспредметным* вздором. Другие отрицают подобное заключение и полагают, что изучение суперзадач помогает нам лучше понять физический мир (наши физические теории). Кто прав? Развернутый ответ на этот вопрос удобно начать сравнением двух формулировок – античной и современной – апории Зенона Элейского под названием «Ахилл».

4.5. В оригинальной античной версии этой апории утверждается, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползущую черепаху, если в начале движения он был на некотором расстоянии от нее. В самом деле, допустим, что Ахиллес бежит в 10 раз быстрее, чем черепаха, и на старте находился от нее на расстоянии в 100 стадий. За то время, за которое Ахиллес пробежит эти 100 стадий, черепаха отползет на 10 стадий вперед. Когда Ахиллес пробежит эти 10 стадий, черепаха отползет еще на 1 стадию. Когда Ахиллес пробежит эту стадию, черепаха отодвинется на 1/10 стадии. И так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности.

В итоге:

А) *согласно приведенному рассуждению*, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху;

Б) между тем мы (и Зенон тоже) знаем по *опыту*, что Ахиллес догонит черепаху;

В) имеет место, как полагал Зенон Элейский (в V в. до н.э.), а многие полагают и сейчас (в XXI в. н.э.), неустранимое противоречие между опытными данными и теорией – между (Б) и (А).

Из противоречия, как известно, логически правильно вытекает любое наперед заданное утверждение, в частности сногсшибательное утверждение самого Зенона о том, что движения на самом деле нет, оно нам только кажется. Иными словами, из противоречия между (Б) и (А) Зенон делает вывод о ложности пункта (Б). Однако подавляющее большинство людей предпочитают из указанного противоречия делать вывод об ошибочности рассуждений Зенона, т.е. о несостоятельности пункта (А).

Наша ближайшая цель – показать, что ошибочен пункт (В), в то время как пункты (Б) и (А) по существу верны.

4.6. Воспользуемся одной из современных версий апории «Ахилл» [14]. Эта версия апеллирует к метаматематике, т.е. к рассуждениям о логических системах, об их синтаксисе и семантике. И с точки зрения этой версии корректная формулировка апории – это, например, следующая логическая система *AET* [15].

Формальный язык теории AET:

(а) Индивидные константы: $\lceil \mathrm{r} \rceil$ для каждого рационального числа r.

(б) Двуместный предикатный символ: P.

Аксиоматизация теории:

(a) Аксиома: $P(\lceil 0 \rceil, \lceil 100 \rceil)$.

(b) Правило вывода:

$$\frac{P(\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)}{P(\lceil y \rceil, \lceil y + 1/10\,(y - x) \rceil).}$$

Эту формальную теорию можно, конечно, интерпретировать по-разному, но рассматривается интерпретация такая, когда «$P(\lceil r \rceil, \lceil s \rceil)$» истолковывается следующим образом: Ахиллес находится на расстоянии r от стартовой черты, когда черепаха находится на расстоянии s от этой же стартовой черты.

Тогда в соответствии с указанной интерпретацией можно считать, что теория *AET* описывает предполагаемое Зеноном поведение Ахиллеса и черепахи.

Однако индукцией по длине выводов легко показать, что *ни для какого числа* r *высказывание* $P(\lceil r \rceil, \lceil r \rceil)$ *недоказуемо в теории AET*, а раз так, то точный смысл пункта (А) передается утверждением: действуя пошагово в соответствии с теорий *AET*, Ахиллес никогда, *т.е. ни на одном шаге этого действия*, не достигнет ситуации, описываемой предложением вида $P(\lceil r \rceil, \lceil r \rceil)$ [16].

С другой стороны, известно (на основании внешней информации), что предложение $P(\lceil 111 + 1/9 \rceil, \lceil 111 + 1/9 \rceil)$ истинно в классической модели – кинематике Ньютона. С учетом интерпретации теории *AET* это означает, что Ахиллес догонит черепаху на расстоянии 111 + 1/9 стадий от стартовой черты. В этом смысле верен пункт (Б).

Теперь виден путь подлинного решения рассматриваемой апории.

Тот факт, что предложение $P(\ulcorner 111 + 1/9 \urcorner, \ulcorner 111 + 1/9 \urcorner)$ недоказуемо в некоторой теории (в данном случае в теории *AET*), но является истинным в подразумеваемой модели этой теории, ныне (после открытий Геделя) никому не должен казаться (хотя все-таки многим кажется) парадоксальным. Указанный факт свидетельствует всего лишь о неполноте теории *AET*. Весьма заурядный факт. Стало быть, пункт (В) ложен, никакого противоречия нет – и парадокс исчезает. Таково современное прочтение апории Зенона «Ахилл».

Другое дело – V век до нашей эры. Тогда даже величайшие греческие мыслители вряд ли владели понятием неполноты. Поэтому Зенон вполне мог подспудно полагать, что *раз невозможно доказать*, что Ахиллес *догонит* черепаху, *то* утверждение «Ахиллес догонит черепаху» *ложно*. Тогда, при таком ошибочном подспудном убеждении, Зенон просто-таки должен был бы считать свою апорию подлинным парадоксом.

4.7. В разделе 4.2 термином *суперзадача* предлагалось обозначать любую счетно-бесконечную последовательность отдельных актов или операций, осуществляемых в течение конечного интервала времени. В соответствии с этим предложением интерпретированную теорию *AET* можно считать *точным* описанием конкретной суперзадачи – бесконечной последовательности $(P(\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 100 \urcorner), P(\ulcorner 100 \urcorner, \ulcorner 110 \urcorner), P(\ulcorner 110 \urcorner, \ulcorner 111 \urcorner), P(\ulcorner 111 \urcorner, \ulcorner 111 + 1/10 \urcorner), \ldots)$. Поэтому не будет никакой беды, если впредь мы будем иногда обозначать эту суперзадачу через **AET**.

4.8. Таким образом, античная апория Зенона «Ахилл» – исторически первый и относительно легкий для анализа пример суперзадачи. Стоит заметить, что только в 1954 г. появился столь же легкий для анализа *современный* пример суперзадачи – так называемый *парадокс лампы Томсона* [17].

Лампа Томсона – это простое устройство, состоящее из электрической лампочки и сетевого переключателя. Переключатель имеет две позиции: «включено», «выключено». В позиции «включено» лампочка светится, в позиции «выключено» лампочка не светится. Предположим, что исходно (скажем, в $t_0 = 12$) лампочка не светиться. Предположим также, что начиная с этого момента она подвергается следующей бесконечной последовательности воздействий. Когда истекает ровно половина времени до $t* = 13$, мы осуществляем акт a_1, переводя переключатель в положение «включено», в результате чего лампочка вспыхивает. Воздействие a_1, таким образом, осуществляется в момент $t = 12 + 1/2$. Затем, когда истекает половина времени от осуществления воздействия a_1 до $t* = 13$, мы осуществляем акт a_2, переводя переключатель в положение «выключено», в результате чего лампочка гаснет. Воздействие a_2, таким образом, осуществляется в момент $t = 12 +1/2 +1/4$. Когда истекает половина времени от осуществления воздействия a_2 до $t* = 13$, мы осуществляем акт a_3, переводя переключатель в положение «включено», в результате чего лампочка опять вспыхивает. Воздействие a_3, таким образом, осуществляется в момент $t = 12 +1/2 +1/4 +1/8$. И так далее.

Речь, следовательно, идет о бесконечной последовательности актов, т.е. о суперзадаче

$$\mathbf{TL} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots).$$

Теперь спросим, в каком состоянии будет лампочка в момент $t* = 13$?

Чтобы исследовать этот вопрос, построим описание поведения лампочки в виде теории, которую обозначим через *TL*.

Формальный язык теории TL:

(а) Индивидные константы: $\ulcorner r \urcorner$ для каждого рационального числа r.

(б) одноместный функциональный символ: f.

Аксиоматизация теории:

(*a*) Аксиомы: $f(\ulcorner 12 \urcorner) = \ulcorner 0 \urcorner$, $\forall x\, (f(x) = \ulcorner 0 \urcorner \vee \mathrm{f}(x) = \ulcorner 1 \urcorner)$.

(*b*) Правило вывода:

$$\frac{f(\ulcorner x \urcorner) = \ulcorner y \urcorner}{f(\ulcorner x + 1/2\,(13 - x) \urcorner) = \ulcorner \mathrm{mod}_2\,(y + 1) \urcorner}.$$

где mod_2 – сложение по модулю 2.

Подобно теории *AET* теорию *TL* можно интерпретировать по-разному, но мы рассмотрим интерпретацию такую, когда:

«$f(x) = 0$» истолковывается как утверждение, что в момент времени x лампочка не светит;

«$f(x) = 1$» истолковывается как утверждение, что в момент времени x лампочка светит.

Тогда в соответствии с указанной интерпретацией теорию *TL* можно считать точным описанием суперзадачи **TL**.

Снова индукцией по длине выводов легко показать, что ни предложение $f(\ulcorner 13 \urcorner) = \ulcorner 0 \urcorner$, ни предложение $f(\ulcorner 13 \urcorner) = \ulcorner 1 \urcorner$ не выводимо в теории *TL*. Следовательно, теория *TL* недостаточно сильна, чтобы ответить на заданный вопрос. Единственное, что можно уверенно утверждать в ответ на этот вопрос, так это заявить на основании второй аксиомы теории *TL*, что лампочка будет или в состоянии, описываемом предложением «Лампочка светится», или в состоянии, описываемом предложением «Лампочка не светится».

Читатель видит, что анализ суперзадачи **TL** развивается параллельно анализу суперзадачи **AET**. Тем не менее, в отличие от суперзадачи **AET**, теперь нет и намека на какую-либо апорию. Почему?

4.9. Конечно, обе теории – *AET* и *TL* неполны. Неполнота теории *AET* не позволяет предсказать ни ситуацию, описываемую предложением $P(\ulcorner 111 + 1/9 \urcorner, \ulcorner 111 + 1/9 \urcorner)$, ни ситуацию, описываемую предложением $\neg P(\ulcorner 111 + 1/9 \urcorner, \ulcorner 111 + 1/9 \urcorner)$. Иными словами, теория *AET* не позволяет предсказать ни того, что на расстоянии 111+1/9 стадий от точки старта Ахиллес догонит черепаху, ни того, что он на этом расстоянии от точки старта черепаху не догонит.

Неполнота теории *TL* не позволяет предсказать, ни того, что в момент $t* = 13$ лампочка светится, ни того, что в этот момент лампочка не светится.

Но тогда почему же все-таки в первом случае *возникает* иллюзия, что суперзадача **AET** противоречит ситуации, отвечающей предложению $P(\ulcorner 111 + 1/9 \urcorner, \ulcorner 111 + 1/9 \urcorner)$, а во втором случае *не возникает* иллюзии, что суперзадача ***TL*** противоречит любому определенному, но неизвестному состоянию лампочки в момент $t* = 13$ [18].

Небольшое умственное усилие дает очевидный ответ. Все дело в том, что в первом случае – в случае апории Зенона мы не только описываем суперзадачу **AET**, но и предсказываем (полагаем, что знаем) ситуацию, отвечающую предложению $P(\ulcorner 111 +1/9 \urcorner, \ulcorner 111 +1/9 \urcorner)$. И для этого предсказания пользуемся внешней и, следовательно, дополнительной по отношению к теории *AET* информацией, связывающей *AET* с $P(\ulcorner 111 +1/9 \urcorner, \ulcorner 111 +1/9 \urcorner)$. Однако эта внешняя информация настолько привычна и естественна, что ее наличие мы обычно упускаем из виду. И тогда нам *кажется*, что указанным предсказанием мы обязаны только самой суперзадаче **AET**. Вот тут-то и возникает ощущение противоречия – на сцену выходит *апория*. А во втором случае мы не располагаем никакой привычной и внешней по отношению к теории *TL* информацией и у нас, стало быть, не возникает даже почвы для иллюзии предсказания определенного состояния лампочки в момент $t* = 13$.

Упомянутая внешняя по отношению к теории *AET* информация, связывающая *AET* с $P(\ulcorner 111 +1/9 \urcorner, \ulcorner 111 +1/9 \urcorner)$, – это *физическое предположение* (в обыденных разговорах воспринимаемое даже как убеждение), что Ахиллес и черепаха движутся (с постоянными скоростями) не просто вдоль прямой, а вдоль именно *непрерывной* прямой.

Осталось заметить, что если бы мы захотели формализовать указанное физическое предположение, то мы вправе были бы выразить его, например, в виде следующего бесконечного правила вывода:

$$\frac{P(\ulcorner x_0 \urcorner, \ulcorner y_0 \urcorner), \ldots, P(\ulcorner x_n \urcorner, \ulcorner y_n \urcorner), \ldots}{P(\ulcorner x \urcorner, \ulcorner y \urcorner)}$$

Где $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Еще раз подчеркнем, что здесь речь идет о подспудной вере в физику (ньютонову кинематику); именно она (подразумеваемая физика) обеспечивает связь между **AET** и предложением $P(\ulcorner 111 +1/9 \urcorner, \ulcorner 111 +1/9 \urcorner)$.

Ничего подобного этой ситуации нет в случае лампы Томсона: во-первых, функция $f(x)$ вообще не имеет предела ни в какой точке числовой прямой и, во-вторых, отсутствует вера (осознаваемая или подспудная) в какую-либо физически обоснованную связь между **TL** и значением $f(t*)$ функции f в точке $t* = 13$.

Чтобы подчеркнуть именно это различие между рассматриваемыми суперзадачами, можно сказать, что суперзадача **AET** *физически вычисляет* значение предиката P в точке ($\lceil 111 + 1/9 \rceil$, $\lceil 111 + 1/9 \rceil$), в то время как суперзадача **TL** *физически не вычисляет* значения функции f в точке $t* = 13$.

4.10. Вернемся к умеренному физическому тезису Чёрча относительно функции *halt*, т.е. к гипотезе (8). Можно ли – и если можно, то в каком смысле – гипотезу (8) опровергнуть?

Допустим, мы сумели универсальную машину Тьюринга U осуществить практически, да еще таким образом, что будучи запущена в момент времени $t_0 = 12$, она выполняет первое действие в момент $12 + 1/2$, второе действие – в момент $12 + 1/2 + 1/4$, третье действие – в момент $12 + 1/2 + 1/4 + 1/8$ – и т.д. до тех пор, пока не остановится, если вообще остановится. Тогда каждому входу (z, x), универсальной машины U, на котором она не останавливается, соответствует своя бесконечная последовательность $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ действий $a_1, a_2, a_3, \ldots$ машины U, т.е. некая своя суперзадача **U(z, x)**:

$$\mathbf{U}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots).$$

Из разделов 4.4 – 4.8 читателю нетрудно заключить, что ни одна из этих суперзадач **U(z, x)** не позволяет по состоянию лампочки в момент времени $t* = 13$ (светится она или нет) определить, что машина U, будучи снабжена входом (z, x) и запущена в $t_0 = 12$, не останавливалась ранее $t*$.

Однако теперь допустим, что нам удалось сконструировать переключатель и собрать электрическую схему из переключателя и лампочки таким образом, чтобы, в отличие от лампы Томсона, переключатель мог сработать (переключиться) *один и только один* раз. Причем сработать *только на включение и только в тот момент*, когда машина U, будучи снабжена входом (z, x) и запущена в $t_0 = 12$, остановилась. Тогда, очевидно, лампочка не будет гореть в момент времени $t* = 13$, если и только если указанная машина Тьюринга при указанном входе никогда (ни на одном такте) ранее не остановилась.

Мы, таким образом, получаем возможность в течение конечного интервала времени решить проблему остановки. Здесь требуемая для этого внешняя (по отношению к U) информация, т.е. физически обоснованная связь между суперзадачей **U(z, x)** и состоянием лампочки в момент $t*$, обеспечивается самой конструкцией управляемого универсальной машиной U переключателя.

Это гипотетическое устройство в целом (= универсальная машина Тьюринга плюс дополнительное внешнее приспособление из лампочки и специфически устроенного переключателя) называется в литературе *бесконечно ускоряющейся машиной Тьюринга* [19]. А так как функция упомянутого внешнего приспособления сводится к тому лишь, чтобы в момент случившейся машинной остановки послать сигнал в будущее (начинающееся с момента $t* = 13$), любое приспособление с подобной функцией можно назвать *сигнализатором*, как бы оно ни было устроено на самом деле.

4.11. Бесконечно ускоряющаяся машина Тьюринга – простейший пример *гиперкомпьютера*, т.е. компьютера, реализующего физическое вычисление невычислимой функции. Так как под невычислимой функцией здесь подразумевается функция *halt*, наш воображаемый гиперкомпьютер гипотетически опровергает физический {*halt*}-тезис Чёрча (в формулировке (8)).

Читатель видит, таким образом, что логический статус проекта бесконечно ускоряющейся машины выражается утверждением: этот проект *логически* состоятелен (последователен и непротиворечив).

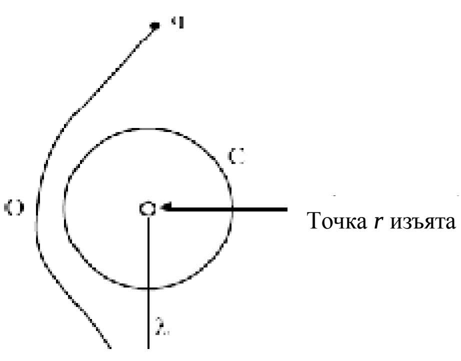
Но каков его (проекта) физический статус? На этот вопрос ответить затруднительно. Ибо не вполне ясно, что такое физика. Поэтому чтобы придать вопросу какую-то определенность, следует принять более или менее разумное соглашение. В этой связи мы будем говорить, что тот или иной проект *физически состоятелен*, если и только если он не противоречит общей теории относительности.

Даже если мы не знаем, как и чем обеспечить постоянное ускорение работы машины U, то все равно можно заранее утверждать, что любое средство здесь окажется в противоречии со специальной теорией относительности (активное устройство универсальной машины не может двигаться со скоростью больше скорости света). Однако этот факт еще не говорит, как может показаться на первый взгляд, о физической несостоятельности проекта бесконечно ускоряющейся машины Тьюринга. Ибо специальная теория относительности (СТО) – частный случай, а не подтеория общей теории относительности (ОТО).

Более того, М. Хогарт (1994 г.) установил, что данный проект, рассматриваемый с точностью до эквивалентных (по результативности) ему версий, физически состоятелен. А именно: версия Хогарта [20] апеллирует к общей теории относительности и совместима с ней. В общих чертах она выглядит следующим образом [21].

Для начала – кратко идея версии Хогарта. Дело в том, что если мы хотим построить бесконечно ускоряющуюся машину Тьюринга, конструкция которой должна быть заведомо согласована с общей теорией относительности, то нам следует тогда учесть, что длительность любого физического процесса может не быть одной и той же в разных системах отсчета (вспомним пресловутый «парадокс близнецов»). Но это значит, что, вообще говоря, встает вопрос: не может ли какой-нибудь процесс, длящийся бесконечно в одной системе отсчета, в другой системе отсчета оказаться занимающим конечный интервал времени? Быть может, уравнения теории относительности допускают существование таких двух систем отсчета, что работа обычной машины Тьюринга для наблюдателя, находящегося в одной из этих систем, будет выглядеть неограниченно ускоряющейся, в то время как для наблюдателя в другой системе, в которой находится сама машина, длина временного интервала между любыми двумя смежными тактами работа машины будет выглядеть постоянной величиной.

М. Хогарт указал, что действительно можно указать такие две системы отсчета, если воспользоваться так называемым пространством-временем Маламента – Хогарта. Мы не будем приводить точных определений, но заметим, что это весьма необычный вид релятивистских пространственно-временных структур. В частности, среди них есть и такая, чьи экзотические свойства в их применении для гипотетического физического вычисления функции остановки более или менее можно пояснить рисунком.



Плоскость этого рисунка заполнена мировыми точками [22]. Плотность распределения этих точек неравномерна и представлена некоторым скалярным полем. За пределами окружности *C* значения *D* этой плотности равны 1, а внутри окружности – больше 1. Причем чем ближе к центру, тем больше, в пределе стремясь к бесконечности. Центр окружности изъят из плоскости.

Далее, линия от p до (изъятого) центра r представляет мировую времени – подобную полулинию с концевой мировой точкой p в хронологически прошлом мировой точки q. Причем не только мировая точка p, но и вся эта мировая полулиния целиком включена в хронологически прошлое мировой точки q, а собственное хронологически будущее время мировой точки p вдоль этой полулинии бесконечно. Между тем собственное время вдоль линии O конечно.

Хогарт доказал [23], что вся эта (четырехмерная) конструкция является одним из решений уравнений Эйнштейна и, следовательно, ее допустимо считать возможной (но не обязательно реальной) физической ситуацией.

Хогарт, кроме того, предложил использовать такую ситуацию, чтобы обеспечить физическое вычисление функции остановки *halt* и таким образом обеспечить опровержение физического {*halt*}-тезиса Чёрча.

Мысль состоит в следующем. Допустим, мы хотим узнать настолько достоверно, насколько верим физике, остановится или нет универсальная машина Тьюринга U на входе (*z*, *x*). Для этого мы и уже загруженная машина U должны оказаться в мировой точке p. Как это сделать, мы не знаем, но знаем, что этому не препятствует общая теория относительности. Оказавшись в мировой точке p, мы обеспечиваем следующие три события в этой точке:

1) для данного входа (z, x) запускаем машину U;

2) посылаем машину U по указанной мировой полу – линии в бесконечное «путешествие» к центру r;

3) сами же «следуем» к мировой точке q «в обход» поля C вдоль мировой линии O.

Снова мы должны сказать, что никто не знает, как и чем обеспечить события (2) и (3), но мы знаем, что их обеспечению не препятствует общая теория относительности. Так или иначе, если мы обеспечили все три события, то в своей системе отсчета мы будем воспринимать работу машины U как бесконечно ускоряющуюся, но длящуюся конечный промежуток времени (нужный нам для перехода из p в q).

Предполагается, что машина U посылает сигнал по направлению к мировой точке q (имеет «сигнализатор»), если и только если она останавливается на данном входе (z, x). Прибыв в мировую точку q, мы смотрим, пришел или нет сигнал от машины U. Если пришел, то делаем вывод, что машина U на входе (z, x) на каком-то шаге остановилась. Если сигнала нет, то делаем противоположный вывод. В любом случае мы будем знать значение функции *halt* на данном входе (z, x).

Правда, если мы хотим узнать значение функции *halt* еще на одном входе, то мы должны будем запустить в мировой точке p уже две идентичные машины, по-разному загруженные. И.так далее.

Тем не менее если простить чрезвычайную экзотичность предложения Хогарта, то можно согласиться с мнением Шаргира и Питовского [24], что это предложение является единственным примером физически состоятельного проекта гиперкомпьютера для опровержения физического {halt}-тезиса Чёрча.

Обсуждение остальных проектов [25] мало что добавило бы к пониманию общей природы исследований по гипервычислимости.

§ 5. Резюме

В заключение сделаем два замечания.

Первое. В самом конце предыдущего параграфа мы присоединились к мнению Шаргира и Питовского о том, что проект Хогарта является единственным известным ныне примером физически состоятельного проекта гиперкомпьютера. Однако мы хотели бы подчеркнуть пределы значимости этого достижения. Ведь физическая состоятельность в данном случае означает не больше (правда, и не меньше), чем просто то, что описание определенного мысленного эксперимента совместимо с уравнениями Эйнштейна. Конечно, мысленные эксперименты в физике подчас играли и играют большую роль, но, заметим, эта роль всегда побудительная и разъяснительная, т.е. всегда *всего лишь эвристическая*.

Второе наше замечание связано с тем, что по поводу гипервычислений бытует мнение, что их анализ ведет якобы к пересмотру некоторых доктрин, проблем и понятий в математике. Например, доктрин интуиционизма или конструктивизма, проблем разрешимости, понятий доказательства и т.п. Не вдаваясь в глубокие дискуссии на эту тему, заметим: вера в то, что мысленные эксперименты в физике, которые сами *описываются математически*, якобы влияют на математику, не очень далеко отстоит от доверия к рассказу Мюнхгаузена, как он сам себя вытащил из болота.

Примечания

1. В пределах данной статьи функция f называется *числовой*, если и только если $f: N \to N$, где N – множество натуральных чисел.

2. См.: *Самохвалов К.Ф.* Обзор аргументов против тезиса Чёрча // Философия науки. – 2006. – № 4(31). – С. 62–85; *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики: недомогания и лечение. – Новосибирск: Параллель, 2007. – Гл. 3, §1–3.

3. Хотя наши примеры, как и все рассуждения в данной работе, относятся к функциям не более чем двух аргументов, общность не теряется, – все автоматически можно перенести на общий случай n переменных.

4. Ср.: *Самохвалов К.Ф.* Обзор аргументов против тезиса Чёрча // Философия науки. – 2006. – № 4(31). – С. 64–65.

5. Пояснение: Кальмар (см.: *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики…) предлагал считать всюду определенную числовую функцию $g(x)$ вычислимой, если и только если для каждого конкретного числа n можно указать число $g(n)$ посредством *любых убедительных* рассуждений и только посредством них (ср.: *Самохвалов К.Ф.* Обзор аргументов против тезиса Чёрча, раздел 3.3).

6. См.: *Самохвалов К.Ф.* Обзор аргументов… – Гл. 3, разд. 2.1, 3.3.

7. Быть может, стоило бы (7) называть *тезисом Кальмара*.

8. См.: *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Современная философия математики…

9. В этом параграфе излагается хорошо известный классический материал, заимствуемый (с незначительными изменениями) из различных источников, преиму-

щественно из работы: *Piccinini G.* Compupations and Computers in the Sciences of Mind and Brain. – University of Pittsburgh, 2003.

10. См.: *Самохвалов К.Ф.* Обзор аргументов… – Разд. 1.6.

11. *Bringsjord S., Kellett O., Shilliday A. et al.* A New Gödelian Argument for Hypercomputing Minds Based on the Busy Beaver Problem/ – [Эл. ресурс]. – Режим доступа: http://www.rpi.edu/_brings.

12. Достаточно обширную информацию о суперзадачах, включая их подробный анализ, их историю, их классификацию и соответствующую библиографию, читатель может найти в статье «Суперзадачи» в Стэнфордской философской энциклопедии (см.: *Pйrez Laraudogoitia, J.* Supertasks. – [Эл. ресурс]. – Режим доступа: http://plato.stanford.edu/).

13. *Thomson J.F.* Tasks and Super-Tasks // Analysis. – 1954. – V. 15. – P. 1–10.

14. См.: *Routledge N.A.* Achilles and the Tortoise // Eureka. – 1964/ – V/ 27. – P. 24–26. – [Эл. ресурс]. – Режим доступа: http://www.archim.org.uk/eureka/27/metamathematics.html; *Lopez-Escobar E.G.K.* Infinite Rules in Finite Systems // Non-Classical Logics, Model Theory and Computability / Ed. by A.I. Arruda, N.C.A. da Costa and R. Chuagui. – North-Holland Publishing Comp., 1971.

15. Ср.: *Lopez-Escobar E.G.K.* Infinite Rules in Finite Systems.

16. Причем, подчеркнем, совсем не имеет значения, что понятие *никогда* (*ни на одном шаге*) распространяется здесь на конечный фиксированный по длительности интервал времени. Если бы исходная разность скоростей Ахиллеса и черепахи стремилась к нулю, понятие *никогда* распространялось бы на время, неограниченно устремленное в будущее.

17. См.: *Thomson J.F.* Tasks and Super-Tasks.

18. Впрочем, Томсон все-таки первоначально питал иллюзию, что он изобрел новый *парадокс*, и только позже, под влиянием критики Бенацераффа, переменил этот свой первоначальный взгляд (см.: *Fraser R, Akl S.G.* Accelerating Machines // Technical Report No. 2006-510, School of Computing Queen's UniversityKingston, Ontario, Canada K7L 3N6). Томсон просто путал невозможность предсказать определенное состояние (светит, не светит) лампочки в момент *t** с отсутствием определенного состояния лампочки в этот момент, что, конечно, было бы парадоксом, если было бы. (Несколько странно, но многие современные авторы, пишущие о гипервычислениях, затрагивают «парадокс» лампы Томсона таким образом, что их также можно заподозрить в подобной путанице.)

19. Стоит заметить, однако, что в литературе имеется много других названий (синонимов) для рассматриваемого устройства: *ускоряющаяся универсальная машина Тьюринга*, *ускоряющаяся машина Тьюринга*, *машина Зевса* и т.д. (см., например: *Fraser R, Akl S.G.* Accelerating Machines. – P. 7).

20. См.: *Hogarth M.L.* Non-Turing Computers and Non-Turing Computability // PSA. – 1994. – V. 1. – P. 126–138.

21. Ср.: *Hogarth M.L.* Non-Turing Computers…

22. На самом деле нужно иметь в виду не плоскость, а четырехмерное многообразие, не окружность, а четырехмерную сферу и т.д. Потому-то рисунок и называется «игрушечным пространством-временем Маламента – Хогарта», что он всего лишь намекает на то, что на нем принципиально нельзя изобразить.

23. *Hogarth M.L.* Does General Relativity Allow an Observer to View an Eternity in a Finite Time? // Foundations of Physics Letters. – 1992. – V. 5. – P. 173–181.

24. См.: *Shagrir O., Pitowsky I.* Physical hypercomputation and the Church–Turing Thesis // Minds and Machines. – 2003. – V. 13. – P. 87–101.

25. См.: *Kieu T.D.* Quantum Hypercomputability // Minds and Machins. – 2002. – V. 12. – P. 541–561; *Hagar A., Korolev A.* Quantum Hypercomputation – Hype or Computation? // Philosophy of Science. – 2007. – V. 74. – P. 347–363.

Дата поступления 10.03.2010
Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск
kfsamochvalov@mail.ru

Samokhvalov, K.F. **The Church's physical thesis**

The paper presents the methodological analysis of the Church's physical thesis.
Keywords: the standard Church thesis, the physical Church thesis, supertask, hypercalculation