Проблемы логики и методологии науки

МАТЕМАТИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ

Л.С. Сычева

Рассматривается представление о конструкторе как программе получения знания, предложенной М.А. Розовым. Он показывает, что существует глубокий изоморфизм между работой инженера и работой ученого: оба отталкиваются от набора функциональных характеристик некоторого объекта и пытаются создать проект его построения. Традиционно теоретическое конструирование связывают с апелляцией к идеальным объектам, к мысленным процедурам. Однако совершенно не ясно, как изучать мысленные процедуры. Конструирование – это такая теоретическая программа, которая позволяет ученым проектировать деятельность по созданию объектов с заранее созданными свойствами. Как примеры конструирования в математике рассматриваются число, интегральное исчисление, линейное программирование, графы.

Ключевые слова: математика, теоретическая конструкция, объект, свойство

В 2009 г. вышла большая статья М.А. Розова «Тезисы к перестройке теории познания» [1]. Один из тезисов посвящен познанию и инженерному проектированию. М.А. Розов развивает в своих работах теорию социальных эстафет, в основе которой лежит представление о воспроизведении деятельности по уже существующим образцам. Однако он пишет в «Тезисах…», что в целом это принципиальное, но очень упрощенное представление и что исторически на базе эстафет и накопления знания формируются принципиально новые механизмы, и прежде всего такое образование, как конструктор. Под конструктором М.А. Розов понимает «такую социальную программу, обычно частично вербализованную, а частично нет, которая позволяет нам проектировать деятельность по созданию объектов с заранее заданными свойствами. В рамках такой программы работает любой инженер, получивший проектное задание, сходным образом работает и ученый.

Оба отталкиваются от набора функциональных характеристик некоторого объекта и пытаются создать проект его построения. Знание представляет собой не только описание уже реализованной деятельности, но и проекты деятельности, которые еще надо реализовать, если это практически возможно. Существует глубокий изоморфизм между работой инженера и исследователя» [2]. Называя конструктором «некоторое множество объектов, для которых заданы определенные способы их преобразования» [3], М.А. Розов в основном рассматривает, как функционирует конструктор в экспериментальных науках – физике, химии и т.п. Рассмотрим эти случаи и затем сопоставим их с функционированием конструктора в математике.

Большинство программ получения знаний (методических программ) в науке не существуют без программ конструирования. Так, эксперимент Лавуазье, доказывающий, что вода состоит из кислорода и водорода, – это некоторая методическая программа, образец, который можно воспроизводить. М.А. Розов показывает, что эта экспериментальная ситуация возникла не сама по себе, не как случайное стечение обстоятельств, – она была предварительно сконструирована, был разработан, а затем реализован определенный проект [4]. Для понимания того, как действует конструктор в математике, нам более важны представления о *теоретическом* конструировании. Для такого конструирования существенно, что реализация заданных образцов или правил всегда возможна и всегда приводит к одному и тому же результату: «мы не учитываем и не оговариваем множества различных привходящих обстоятельств, которые подстерегают нас при работе с эмпирическими объектами» [5]. На естественный вопрос: с чем же мы работаем, чем оперируем в рамках теоретического конструктора – обычно дают ответ о действиях с идеальными или идеализированными объектами, при которых появляются *мысленные* процедуры. Однако совершенно не ясно, как изучать такие мысленные процедуры, ментальные состояния и т.п. Новаторство М.А. Розова в эпистемологии состоит в том, что он показывает, как можно полностью обойтись без подобных представлений. Он считает, что тайна работы в теоретическом конструкторе кроется в разделении труда. Так, например, человек забивает гвоздь, используя реальные предметы – гвоздь, молоток, доску. Он много раз забивал гвоздь и действует, воспроизводя имеющиеся у него образцы. При возникновении ситуации, когда надо объяснить другому, как забить гвоздь, человек рассказывает, как надо действовать. Какими объектами оперирует при этом инструктор? М.А. Розов говорит, что ничего не изменилось, кроме одного: раньше тот, кто забивал гвоздь, *непосредственно* воспроизводил образцы своего ремесла, а теперь он вынужден вербализовать их в форме набора команд. Он оперирует при этом образцами и командами, но работает он теперь в теоретическом конструкторе, ибо предполагает, что все его команды реализуемы и в данной конкретной ситуации, отличной от той, которую он когда-то наблюдал. Ученик же может столкнуться с тем, что гвоздь согнулся и т.д. Не случайно поэтому теоретические тексты очень напоминают подобного рода команды. То есть было «сконструировано» теоретическое исследование, где нет необходимости прибегать к «мысленным процедурам» с идеализированными объектами.

М.А. Розов, таким образом, связывает теоретическое исследование не с мифическими мысленными процедурами, а с вербализацией образцов прошлой деятельности, когда один человек объясняет другому, как действовать в тех или иных случаях (первый уже владеет этими действиями).

Математика существенно отличается от эмпирических наук тем, что в ней нет эмпирической референции, она непосредственно не имеет дела с природными, вещественными объектами. Если физик, химик, биолог могут экспериментировать со своими объектами – нагревать, сжимать, измерять и т.д., то математик имеет дело с объектами, обозначенными разного рода символами. М.А. Розов показывает, что числа – это роли обозначений [6]. Но как заданы роли? Роли заданы способами действий. Здесь и начинается функционирование конструктора в математике. Число, треугольник, любой другой математический объект всегда связан с теми или иными действиями, которые можно (или нельзя) совершать с символами. Итак, одна из функций конструктора в математике – задание объекта исследования, ибо человеку важно не столько то, что есть такой объект, как число, сколько в первую очередь то, что можно с числом делать (складывать, умножать, делить и т.п.) и какие задачи можно решить с помощью чисел. Прежде всего нужно представить число, записать его, хотя и до традиции записей существовали способы установления некоторых соотношений: например, не умея считать, хозяин, тем не менее, мог знать, все ли стадо возвратилось домой. Система записей в разных культурах различается, и это свидетельствует, в частности, и о том, что числа не были даны кем-то всем культурам, а возникали в каждой в своем, специфическом виде.

Принципы записи чисел – это один из первых конструкторов в арифметике, который совершенствуется чуть ли не до наших дней (если учесть создание двоичной системы для компьютеров). Историк арифметики И.Я. Депман пишет, что у людей, освоивших натуральный ряд чисел до некоторой достаточно далекой границы, возникла необходимость создания удобных способов называния и записи чисел [7]. Слово «освоивших» здесь не совсем точно, ибо люди не нашли числовой ряд в природе, а построили его. И.Я. Депман отмечает, что счисление было бы безнадежным, если бы каждому числу присваивалось особое название. «Но люди вскоре догадались, что считать надо группами, называя группы теми же именами числительными, как единицы, но с добавлением названий групп» [8]. Люди должны были, таким образом, создать удобные способы называния и записи чисел. Одновременно с формами записи чисел возникали правила сложения и других арифметических действий. Проблемой было создание не только правил действия с числами, но и символики для обозначения действий. Принятые ныне знаки плюс, минус, знак равенства, скобки и другие знаки появились в Европе не ранее XV в.

Итак, математик имеет дело с символами или знаками-пиктограммами. Суть математики состоит в том, что математик строит правила действия с числами, другими символами, чертежами, т.е. работает в рамках того или иного конструктора, который он сам и создает.

Важным фактором развития математики было осознание математиками того обстоятельства, что математика нуждается в алгоритмах или правилах (т.е. конструкторах), а не только в нахождении тех или иных зависимостей. Я имею в виду, например, факты из истории становления интегрального исчисления: Архимед, И. Кеплер и ряд других математиков стремились найти площади криволинейных фигур, а между тем исчисление было создано, когда осознали, что нужно искать (строить) *метод* нахождения площадей, максимумов и минимумов, а не только сами максимумы и минимумы. Первый шаг в этом направлении сделал сам Архимед, который понял, что получил *два результата*: нашел площадь (объем) криволинейных фигур и решил эти задачи новым методом, который, как он предвидел, возможно, впоследствии будет использоваться и для решения других задач. Этот метод, писал Архимед, «может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам еще не приходили в голову» [9].

Однако когда Г. Лейбниц ввел определение дифференциала, предложил для него обозначение и сообщил *без доказательства* правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и степени, его работа долго оставалась непонятой. Это весьма удивительно, так как предложенные правила не были чем-то новым в математике, ими более или менее осознанно пользовались все, кто занимался тогда проблемами касательных, максимумов и минимумов и т.д. [10]. Причина такого непонимания была в том, что сформулированные правила были «выставлены Лейбницем в качестве общего исходного пункта для всех инфинитезимальных исследований… что связь их с символикой делает их основой исчисления, с помощью которого можно производить разнообразные инфинитезимальные исследования таким же образом, как исследования анализа конечной величины с помощью буквенного исчисления» [11]. Здесь очень важно обратить внимание на следующее: новаторство Лейбница состоит не в том, что он предложил *новые правила*, а в другом *осознании* этих правил. Правила не были *средством* нахождения определенных геометрических величин (максимумов, минимумов, касательных), но стали самостоятельным результатом, *основой исчисления*, с помощью которого можно было производить «разнообразные инфинитезимальные исследования», а не только те, которые привели к этим правилам. Осуществление этого рефлексивного преобразования и делает Лейбница одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления.

Использование математики при решении задач механики, физики сделало их точными науками и привлекательным образцом для подражания. Во второй половине XX в. много писали о математической лингвистике, математической экономике и других подобных дисциплинах, надеясь решить их основные проблемы средствами математики. Однако надежный способ математизации (или математического моделирования) имеет место только в том случае, когда есть некоторый инверсивный (двойственный) объект, с одной стороны, фиксирующий важные свойства реальности, а с другой – представляющий собой задачу, которая может быть решена математически.

Такова, например, задача фанерного треста о таком раскрое листа фанеры, чтобы отходы были минимальными. В 1938 г Л.В. Канторович консультировал фанерный трест по проблеме эффективного использования лущильных станков. Он понял, что дело сводится к задаче максимизации линейной формы многих переменных при наличии большого числа ограничений в виде линейных равенств и неравенств. Он модифицировал метод разрешающих множителей Лагранжа для ее решения и обнаружил, что к такого рода задачам сводится колоссальное количество проблем экономики. В 1939 г. Л.В. Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой описал задачи экономики, поддающиеся открытому им математическому методу, и тем самым заложил основы линейного программирования. Формирование новой математической дисциплины в этом случае есть не что иное, как становление нового конструктора в математике, в рамках которого решается класс экстремальных задач с ограничениями. Лист фанеры, который надо раскроить оптимально, – это инверсивный объект: с одной стороны, здесь описывается содержательная практическая задача; с другой стороны, эта ситуация способствует постановке новой *математической* задачи – максимизации линейной формы многих переменных при наличии большого числа ограничений.

Еще один пример успешного математического моделирования – решение Л. Эйлером (1736 г.) задачи о Кенигсбергских мостах. Получив решение, Эйлер задал себе вопрос, почему такую задачу «обыденной жизни» решает математик, ибо никаких собственно математических действий он, по его мнению, не совершал. Однако в наши дни решение задачи о Кенигсбергских мостах считается первым шагом в новой области математики – теории графов. Термин «граф» появился в 1936 г. у Д. Кенига. Перечисляя задачи, приведшие к формированию теории графов, обычно называют кроме задачи о мостах задачу о четырех красках, задачу коммивояжера, открытие Г. Кирхгофом законов течения электрического тока в разветвленных цепях и т.д. [12]. Как оказалось, что эти совершенно разные практические задачи лежат в основании новой математической теории – теории графов? Исследователи должны были осознать все эти задачи как одну и ту же задачу (как задачу на одном и том же объекте, и что важно – новом для математики). Для этого, отвлекаясь от конкретного содержания задач, каждый случай представляли чертежом, на котором были нанесены точки и соединяющие их линии – ребра графа. Все практические задачи, названные выше, – тоже инверсивные объекты: они и описывают содержательные ситуации, и позволяют представить эти ситуации как новый математический объект – граф и тем самым создать новый математический конструктор.

Таким образом, введение в структуру науки такой программы, как конструктор, позволяет отвечать на вопросы о том, как возникают объекты математики, откуда они берутся. Эти объекты не находятся в природе, как растения, животные, минералы, а конструируются тем или иным образом при осуществлении допустимых действий с помощью чертежей, алгебраической символики и т.п. Конструирование как способ возникновения математических объектов может пролить некоторый свет на дискуссию о научных революциях в математике. Если науки о природе изучают явления и строят модели, объясняющие эти явления, то рано или поздно, как показал Т. Кун, появляются аномальные факты, требующие отказа от одних объяснительных конструкций и замены их другими, более адекватно «отражающими» явления, т.е. происходят научные революции. В математике же не отказываются ни от каких объектов, ибо они конструируются «правильно», «без ошибок»; их конструированием руководит не стремление объяснить те или иные явления, а только возможность осуществления определенных операций – решения уравнений, геометрических построений и т.д. Иначе говоря, в математике не выполняется одно из условий, важных в модели научной революции Куна, – отбрасывание неработающих моделей. В истории математики можно зафиксировать только то, что какие-то объекты становятся менее употребительными, их просто не используют, но не отбрасывают. Именно потому, что объекты математики не берутся из природы, а конструируются учеными, оказалась возможной не только геометрия Евклида, но и две другие – Лобачевского и Римана. Геометрия Лобачевского долго не принималась многими математиками как раз потому, что полагали, будто математика ничем, по сути, не отличается от других наук, «отражающих» природу, следовательно, наличие двух или более геометрий – это нонсенс. Приняли же неевклидову геометрию тогда, когда были найдены модели, в которых выполняется эта геометрия, например псевдосфера (поверхность типа пионерского горна).

Конечно, возникают вопросы: как именно конструируются математические объекты, чем руководствуются ученые при их создании? Но эта тема требует самостоятельного рассмотрения. Отметим только, что многие новые математические объекты возникают незапланированно. Таковы отрицательные и комплексные числа, появившиеся в процессе решения уравнений, неевклидова геометрия, которая была невольно построена в ходе попыток доказательства пятого постулата Евклида, группы в работах Галуа, возникшие как средство решения задачи о том, при каких условиях разрешимы некоторые уравнения выше пятой степени в радикалах. Такие объекты далеко не сразу принимались математиками. Ибо в рамках «модели отражения» было неясно, что именно отражают отрицательные числа, комплексные числа и т.д. Принятие этих объектов обязано приданию им некоторых смыслов (отрицательное число обозначает долг и т.п.). Наряду с подобными незапланированными объектами возникают и такие, конструктивная природа которых была очевидна, – пространства больших (и даже бесконечных) размерностей, уравнения *n*-й степени и т.д.

Примечания

1. См.: *Розов М.А.* Тезисы к перестройке теории познания // На пути к неклассической эпистемологии. – М., 2009.
2. Там же. – С. 108.
3. *Розов М.А.* Теория и инженерное конструирование // На теневой стороне. – Новосибирск: Сибирский хронограф, 2004. – С. 281.
4. См.: *Розов М.А.* Теория социальных эстафет и проблемы эпистемологии. – Смоленск: Смолен. гос. ун-т, 2006. – С. 342.
5. *Розов М.А.* Теория и инженерное конструирование. – С. 282.
6. См.: *Розов М.А.* Способ бытия математических объектов // Методологические проблемы развития и применения математики. – М., 1985.
7. См.: *Депман И.Я.* История арифметики. – М.: Просвещение, 1965. – С. 26.
8. Там же.
9. *Архимед*. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 299.
10. См.: *Медведев Ф.А.* Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974. – С. 112.
11. *Цейтен Г.* История математики в XVI и XVII веках. – М.; Л.: ГТТИ, 1933. – С. 409.
12. *Эйлеровы пути*. URL: http://www.msclub.ce.cctpu.edu.ru/bibl/ODM/Ll2_5.html

Дата поступления 05.12.11

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
sls@academ.org

***Sycheva, L.S.* Mathematics and theoretical construction**

The paper analyses the concept of a constructor as a program of knowledge gaining suggested by M.A. Rozov. He shows that there is a deep isomorphism between a work carried by an engineer and a work carried by a scientist for they both make start from a set of functional features of an object and try to project how to construct it. Traditionally, theoretical construction is associated with an appeal to ideal objects and mental processes. But it is absolutely unclear how to study these mental processes. Construction is a theoretical program which makes it possible for scientists to project activities in creation of objects with defined properties. The paper considers number, integral calculus, linear programming and graphs as cases of construction in mathematics.

Keywords: mathematics, theoretical construct, object, property