ЧАСТОТНЫЕ КОНЦЕПЦИИ И СТОХАСТИЧЕСКАЯ РАБОТАЮЩАЯ МАТЕМАТИКА

*В.М. Резников**

Показано влияние частотной концепции Мизеса на развитие стохастической работающей математики, в частности на анализ проблемы соответствия теоретического и эмпирического статистических объектов. Влияние частотной концепции Рейхенбаха на развитие стандартной статистической математики несущественно. Однако понятие референтного класса в теории Рейхенбаха повлияло на развитие тех вероятностных интерпретаций, в которых базовым понятием является условная вероятность. Кроме того, теория Рейхенбаха оказала влияние на развитие вероятностной теории причинности и экспертных систем (принцип общей причины) и на философию науки (проблема индукции).

Ключевые слова: частотные концепции, теоретический и эмпирический объекты, сингулярная вероятность, референтный класс, проблема индукции

Как нами было показано ранее, при адекватном описании данных с помощью теоретического объекта, например посредством теоретического распределения, а также при корректном определении степени близости эмпирического распределения данных и теоретического распределения и (или) обосновании, что данные определяются независимыми теоретическими объектами, практически любая задача статистического анализа получает точное решение [1]. По нашему мнению, в современной математической статистике недооценивается значимость проблем теоретического описания данных и определения близости эмпирического и теоретического описаний. Проблема определения близости теоретического и эмпирического описаний в математической статистике относится к предварительному анализу данных. Однако естественно эту проблему считать одной из базовых проблем статистического анализа данных. При описании теоретического и эмпирического объектов учитываются особенности исследуемых данных, потому что в современной прикладной математике нет универсальных методов решения

---

* Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 47.

проблем, все известные методы в той или иной степени учитывают особенности теоретического описания решаемой задачи, особенности данных, их объем и другие характеристики решаемой проблемы.

Впервые идея решения стохастических проблем не для универсальных, а для специальных объектов была обоснована и реализована в рамках частотной интерпретации Р. Мизесом. Он полагал, что одно из преимуществ научного познания мира заключается в том, что в каждой отдельной научной дисциплине учитывается лишь часть содержания общего термина и это ограничение способствует точности определений. Так, например, в механике работа понимается в специальном смысле, при этом не учитываются особенности работ, относящихся, скажем, к врачебной деятельности или к труду педагога. Точно так же понятие вероятности в науке не должно быть универсальным и охватывать все мыслимые смысловые оттенки этого понятия. По Мизесу, для науки адекватна частотная интерпретация вероятности, потому что частота – объективная характеристика мира явлений. Частота выступает характеристикой не индивидуальных объектов, а всех объектов, составляющих коллектив. Частоты суть полуэмпирические характеристики, теоретические вероятности являются представителями частот, которые удовлетворяют двум основным требованиям.

Во-первых, бесконечная последовательность частот сходится к пределу. Интересно, что рассматривается не вероятностная сходимость, а на первый взгляд, используется обычная сходимость, изучаемая в математическом анализе. Однако описываемая Мизесом сходимость не является изучаемой в математическом анализе стандартной сходимостью. Нестандартность связана с мизесовским позитивизмом. Согласно позитивизму теоретические законы в исследуемой области априори не известны. В лучшем случае они становятся известными в конце исследования. Поэтому, в отличие от математического анализа, у Мизеса закон образования частотной последовательности не задан.

Во-вторых, любая некоторым разумным образом выбранная подпоследовательность частот сходится к одному и тому же пределу. Опять, на первый взгляд, это правило является естественным и выполняется в математическом анализе. Нестандартность второго требования связана с тем, что выбор подпоследовательностей у Мизеса не был описан конструктивно, а лишь был продемонстрирован на примерах. Второе условие содержательно описывает свойство независимости выбранных подпоследовательностей, характерное для азартных игр. Это условие получило название невозможности системы игры. Для независимых подпоследовательностей, а независимость является характерным свойством мира случайных явлений, знание особенностей одной подпоследовательности данных не дает никаких преимуществ игроку при выборе очередной подпоследовательности, независимой от предыдущей подпоследовательности.

Концепции Мизеса был дан серьезный критический анализ, прежде всего в работах специалистов в области чистой математики и философии науки. Во-первых, критиковалось определение вероятности посредством пределов частот. Такое определение применимо только в случае бесконечных последовательностей. Для адекватного понимания вероятности, о которой говорит Мизес, необходимо иметь в виду, что он был разносторонним ученым. В математике он был профессионалом в области анализа и стохастической математики, в физике он был профессионалом в области аэродинамики. Мизес считал представление о бесконечных коллективах допустимой абстракцией для физических наук. В то время теория вероятностей имела статус естественнонаучной дисциплины, а для физики, как известно, традиционно использование основных понятий – мгновенной скорости и ускорения, а также многих других понятий путем апелляции к пределу.

Во-вторых, критиковался неаксиоматический способ описания теории. Хотя впоследствии Х. Гейрингер разработала аксиоматику для частотной концепции Мизеса.

В-третьих, самая жестокая критика была предпринята в отношении принципа невозможности системы игры из-за его неконструктивного характера. А. Черч, А. Вальд, А.Н. Колмогоров, К. Поппер и многие другие пытались дать конструктивное определение принципа невозможности системы игры. Все известные подходы к формализации этого принципа оказались безуспешными. Так, например, при формализации выбора на примере двоичных последовательностей оказалось, что все подходы вели к генерации несимметричных последовательностей, что нарушает принцип невозможности системы игры.

Несмотря на эту критику, частотная концепция Мизеса оказала большое влияние на развитие стохастической математики в целом и на решение проблемы корректного применения стохастической работающей математики в частности. Для обоснования значимости достижений Мизеса приведем следующие аргументы.

1. Теория вероятностей Мизеса являлась главным претендентом на роль работающей теории вероятности вплоть до принятия математиче-

ским сообществом аксиоматической теории вероятностей Колмогорова в качестве таковой. Принятие теории вероятностей Колмогорова связано с многообразными объективными и субъективными факторами. К объективным относятся аксиоматический характер колмогоровской теории вероятностей и то, что построение теории вероятностей было осуществлено с учетом последних достижений в области теории меры и интегрирования. К субъективным факторам относятся признание и предпочтение теории Колмогорова влиятельными математиками. Одним из авторитетных адептов теории Колмогорова и одновременно противников теории Мизеса был знаменитый математик М. Фреше, ярко раскритиковавший теорию Мизеса. В 1938 г. в докладе на математическом конгрессе он обосновал новый контраргумент к теории Мизеса, заключающийся в том, что в рамках мизесовской теории невыразимы некоторые (по крайней мере один) законы стандартной теории вероятностей. Кроме того, Фреше запретил своему аспиранту Ж. Вилли, сообщившему ему этот результат и предлагавшему устранить все известные слабости мизесовской концепции на основе разработанной им, Вилли, теории мартингалов, заниматься спасением теории Мизеса.

2. Разработанные Мизесом условия применимости вероятностной математиками считались серьезно обоснованными. В частности, А.Н. Колмогоров отмечал, что его требования к применимости теории вероятностей близки к требованиям Мизеса. Детально анализ близости требований Мизеса и Колмогорова к применению теории вероятностей дан в работах Г. Шафера и В. Вовка, Д. Гиллеса, В.М. Резникова [2].

3. Мизес был профессионалом в области математической статистики. В частности, известен критерий согласия Мизеса.

4. Специалисты в области прикладной математики полагают, что формальная неразработанность принципа невозможности системы игры не является серьезным недостатком концепции Мизеса. Этот принцип имеет прагматическую интерпретацию относительно принципиальной значимости устойчивости результатов для признания обоснованности статистической оценки. По мнению Ю.И. Алимова, определение устойчивых оценок, верификация устойчивости относятся к основным проблемам прикладной статистики [3]. Наша критика принципа невозможности системы игры заключается в том, что Мизес не предложил метода определения и проверки близости эмпирических распределений данных и теоретических распределений. На примере анализа решения Мизесом практической задачи о частоте встречаемости буквы «а» в тексте «Bellum Gallicum» Цезаря нами было показано, что для проверки близости эмпи-

рической и теоретической величин Мизес предполагал использовать стандартные принципы и методы проверки гипотез, несмотря на общие присущие им недостатки, а также несмотря на то, что они не учитывали особенности мизесовских конструкций [4]. Наш вывод вполне подтверждается соображениями А.Н. Ширяева, согласно которым при решении конкретных проблем Мизес был нормальным математиком.

Другой известной частотной теорией является концепция Г. Рейхенбаха. Многие исследователи считают ее некоторым развитием теории Мизеса. Так, М. Галавотти полагает, что концепция Рейхенбаха – слегка модифицированный вариант концепции Мизеса [5]. Б. Рассел считал, что теория, предложенная Рейхенбахом, – это развитие и усиление теории Мизеса [6]. Однако сам Рейхенбах в письме к Расселу отрицает, что его теория является развитием теории Мизеса. Во-первых, первые статьи Рейхенбаха, посвященные частотной концепции, появились раньше, чем публикации Мизеса, относящиеся к проблематике частотных концепций. Во-вторых, теории этих авторов весьма различаются начиная с мотивации изучения вероятностных рассуждений. Так, Мизес стремился создать вероятностную объективистскую концепцию, адекватную для исследования естественно-научных явлений. У Рейхенбаха мотивация исследования вероятностей была существенно иной. Интерес к вероятностной проблематике у Рейхенбаха имеет научно-исследовательскую и философскую мотивацию. Как философ он был убежден в том, что истина является недостижимым идеалом, поэтому знание имеет вероятностный характер. Научные интересы Рейхенбаха были связаны преимущественно с физикой, одной из его целей было исследование проблемы времени. Рейхенбах полагал, что анализ понятия «причина» служит средством познания проблемы времени, так как причинные и временные законы являются однонаправленными. Исследования причинно-вероятностных закономерностей связано у Рейхенбаха с исследованиями в области квантовой механики и в большой степени обусловливают его исследования, посвященные теории вероятностей.

По нашему мнению, вероятностная концепция Рейхенбаха существенно отличается от концепции Мизеса. Если концепция Мизеса чисто частотная, то концепция Рейхенбаха имеет более сложный логико-частотный характер, представляя собой синтез логической и частотной концепций. Концепция Рейхенбаха базируется на логической вероятности, так как вероятность – это отношение между суждениями. Однако определение логической вероятности основано на вычислении того, как часто одно суждение влечет другое. Другим принципиальным отличием концепции Мизеса от концепции Рейхенбаха является то, что в последней не используется принцип невозможности системы игры. Зная о сложностях корректного формального описания этого принципа, характеризующего независимость, Рейхенбах отказался использовать его формальным образом. Он объяснял свое решение рядом обстоятельств. Во-первых, использование Мизесом идеи независимости ограничивает применимость его теории, так как многие исследуемые положения дел являются в той или иной степени зависимыми. Во-вторых, Рейхенбах полагал, что для использования идей независимости и случайности соответствующие понятия будут описаны неформальным образом. В действительности замечание Рейхенбаха об ограниченной применимости мизесовской концепции вследствие использования свойства независимости не является корректным. Поскольку наиболее мощные результаты в стохастической математике получены при использовании свойства независимости, постольку отказ от использования формальной независимости принципиально уменьшает практическую значимость концепции Рейхенбаха.

Предполагает ли концепция Рейхенбаха практически направленные исследования и соответствующие результаты, которых нет в концепции Мизеса? К таким направлениям относятся определение сингулярной вероятности на основе разработанной Рейхенбахом идеи референтного класса, попытка определения вероятности на основе предложенного им решения проблемы индукции и принцип общей причины.

Впервые на проблему референтного класса обратил внимание Дж. Венн. Он писал: «Каждая индивидуальная вещь или событие имеет бесконечное множество свойств или атрибутов и поэтому может рассматриваться как принадлежащее к бесконечному множеству различных классов» [7]. Эта ситуация приводит к проблеме назначения вероятностей индивидуальным событиям, например назначения вероятности того, что Джон Смит, 50-летний англичанин, болеющий воспалением легких, доживет до 61 года. Проблема заключается в том, что надежные статистические данные одновременно по трем показателям: быть англичанином, быть 50 человеком, болеть воспалением легким – не являются доступными. Например, доступными являются данные по любым двум из этих показателей: быть 50-летним англичанином, быть больным воспалением легких в возрасте 50 лет, быть англичанином, болеющим воспалением легких.

Возникает вопрос, какой из двух доступных классов использовать для определения вероятности того, что событие принадлежит к третьему классу?

Прежде чем исследовать решение этой задачи, рассмотрим проблему референтного класса в общем случае. Пусть событие E принадлежит к разным классам событий: A, B, C. Вероятность возникновения события E при условии, что оно принадлежит к классу A, равняется $P(E/A)$, вероятность этого же события при условии, что оно принадлежит к классу B, равняется $P(E/B)$, и, наконец, вероятность события E, если оно принадлежит к классу C, равняется $P(E/C)$. В зависимости от выбора класса событие E имеет различную вероятность. Но вероятность события не должна зависеть от того, как мы его описали. Отсюда возникает эпистемологический вопрос: какова истинная вероятность события E?

Раньше было принято считать, что проблема референтного класса является специфической проблемой частотной концепции. Однако в работах А. Хайека показано, что эта проблема универсальная. Она возникает в том случае, когда базовым понятием вероятностной концепции выступает условная вероятность. Так как в общем случае знание является контекстуальным, проблема референтного класса – универсальная [8].

Проблема референтного класса в подходе Рейхенбаха возникает при оценивании вероятностей сингулярных событий. Рейхенбах предложил прагматичный вариант решения этой проблемы с помощью понятия минимального референтного класса. Минимальный референтный класс – это минимальный класс, на основе которого осуществляются надежные статистические оценки. В работах Рейхенбаха не содержится детально описанной методологии определения минимального референтного класса. Требование определения вероятностей для сингулярных событий при использовании частотной концепции на основе наименьшего референтного класса включено Рейхенбахом в систему прагматических правил, регулирующих применение частотной концепции.

Г. Кайберг [9] приводит пример, иллюстрирующий использование понятия наименьшего референтного класса. Пусть имеются основания для уверенности в том, что относительная частота наступления смерти на 39-м году жизни среди американских мужчин равна 0,012, а среди белых американских рабочих – 0,009. В то же время отсутствует убедительная статистика в отношении учителей американских школ. В рассматриваемом примере предлагается для определения вероятности смерти 39-летнего учителя использовать частоту 0,009. Принятие этого решения основано на концепции минимального референтного класса, так как объем класса белых американских рабочих у́же класса американских мужчин.

Основания для выбора референтного класса, минимального по объему, имеют прагматический характер: в определенный момент времени никакие известные данные при их включении в искомый класс не улучшают вероятностные оценки изучаемого положения дел, поэтому нет необходимости в их использовании. Однако при всей привлекательности принципа минимального референтного класса он не является обоснованным, так как не учитывает, в какой степени исследуемое сингулярное событие подобно событиям, составляющим референтный класс. По нашему мнению, выбор референтного класса должен определяться в первую очередь близостью изучаемого события к событиям выбираемого референтного класса. Очевидно, что учет степени близости, или учет степени вхождения события в определенный класс, относится к области распознавания образов. Подобный подход к пониманию и решению проблемы референтного класса предлагается в работе Е.В. Луценко [10].

Кроме определения вероятности сингулярного события Рейхенбахом предложен прагматический подход к оправданию проблемы индукции с учетом скептических аргументов Юма. Последний полагал, что решение проблемы индукции возможно только при условии единообразия природы. По Рейхенбаху, неизвестно, является ли природа единообразной или нет, а также неизвестно, в какой степени она единообразна. Однако это незнание не является препятствием к решению проблем индуктивными методами. Рейхенбах полагал, что индуктивные методы решают задачи не хуже, чем неиндуктивные. Предположим, что природа единообразна, тогда применение индуктивных методов в не меньшей степени оправданно, чем применение методов неиндуктивных. Если при решении задачи по определению предела последовательности на основании известных частот окажется, что последовательность не упорядочена и предела не существует, то он не будет найден ни индуктивными методами, ни иными неиндуктивными подходами. Если неиндуктивный метод решает задачу на основе найденной закономерности, то эта закономерность будет обнаружена и на основе индуктивного подхода.

Поиск закономерностей в концепции Рейхенбаха осуществляется на основе понятия «posit», которое означает предположение, временно принимаемое как обоснованное, пока оно не будет опровергнуто. Найденная на основе данных частота составляет posit о равенстве этой частоты искомой вероятности. Индуктивная концепция Рейхенбаха, по сути, базируется на методе разумного перебора. С помощью этого подхода вполне успешно решаются задачи небольшой размерности. Однако метод перебора неадекватен для определения предела бесконечной последовательности. Рейхенбах считал, что проблемы «проклятья размерности» будут разрешены на основе принципов индуктивной и дескриптивной полноты. Принцип индуктивной простоты обеспечивает выбор более простого правила из двух одинаково предсказывающих правил. Принцип дескриптивной полноты приводит к выбору правила на основании эстетических или интеллектуальных соображений. Действительно, эти принципы упрощают решение задач конечной мощности, но их применение для задач бесконечной мощности не гарантирует получение решения. Многие логики и философы, в частности Салмон, пытались усилить индуктивные подходы Рейхенбаха, однако эти попытки не увенчались успехом [11]. В последние годы в связи с конкретизацией проблемы индукции на основе игрового подхода, предложенного Г. Шурцем, получены некоторые обнадеживающие результаты [12].

В контексте проблемы корректного применения стохастической математики в практике научных исследований концепция Мизеса получила признание у прикладников. Это связано с важными идеями, имеющими практическую значимость: ограничением применяемой математики объектами специального вида, обязательным учетом случайного характера объектов стохастической математики и учетом независимости, так как в последнем случае математика является эффективной. Для решения проблемы определения соответствия эмпирических и теоретических объектов концепция Рейхенбаха оказалась неадекватной. В этой концепции используются объекты самого общего характера, не учитывается формальным образом случайный характер явлений и не учитывается независимость, ведущая к эффективным приложениям. В то же время разработки Рейхенбаха по определению референтного класса, решению проблемы индукции остались незавершенными. Но необходимо отметить, что некоторые идеи Рейхенбаха получили дальнейшее развитие. К ним относятся идея универсализации референтного класса в связи с первичным характером условных вероятностей во многих вероятностных концепциях, развиваемые Салмоном идеи по проблеме индукции и разрабатываемый в связи с формализацией причинных отношений и развитием экспертных систем принцип общей причины.

Примечания

1. См.: *Резников В.М.* Методологические проблемы применения статистических критериев // Вест. Новосиб. ун-та. Сер. Философия. – Новосибирск. – 2009. – Т. 7, вып. 3. – С. 18–23.

2. См.: *Shafer G., Vovk V.* The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – V. 21, No. 1. – P. 70–98.; *Id*. Probability and finance it is only a game! – N.Y.: Wiley-Interscience, 2001; *Gillies D*. Philosophical theories of probability. – London and New-York.: Routledge, 2003; *Reznikov V.* On Kolmogorov's analysis of applicability of probability theory // Международная конференция «Мальцевские чтения» Институт математики СО РАН, Новосибирск, 24–28 августа 2009: Тез. докл. – С. 221. – URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/09/Abstracts/abstracts-09; *Резников В.М.* Методологический анализ приложений теории вероятностей у Колмогорова // Вест. Новосиб. ун-та. Сер. Философия. – 2009. – Т. 7, вып. 1. – С. 26–31.

3. См.: *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.

4. См.: *Резников В.М.* Вероятностные концепции: анализ оснований и приложений. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006.

5. См.: *Galavotti M.* Philosophical introduction to probability. – Stanford: CSLI Publications, 2005.

6. См.: *Рассел Б.* Человеческое познание. – Киев: Ника-Центр, 1997.

7. См.: *Venn J.* The logic of chance. – N.Y.: Macmillian and Co, 1876. – P. 194.

8. См.: *Hajek A.* Conditional probability is the very good of life // Probability Is the Very Good of Life. – Chicago: La Salle, 2003. – P. 183–203; *Id*. What conditional probability could not be // Syntheses. – 2003. – P. 273–323.

9. См.: *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. – М.: Прогресс, 1978.

10. См.: *Луценко Е.В.* Проблема референтного класса и ее концептуальное, математическое и инструментальное решение в системно-когнитивном анализе // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2008. – Вып. 43. – С. 73–120. – URL: ej.kubagro.ru.

11. См.: *Salmon W.* On vindicating induction // Philosophy of Science. – 1963. – V. 30, No. 3. – P. 252–261.

12. См.: *Schurz G.* The meta-inductivist's winning strategy in the prediction game: a new approach to Hume's problem // Philosophy of Science. – 2008. – V. 75, No. 3. – P. 278–305.

Дата поступления 05.02.2011 г.
Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
rvm@philosophy.nsc.ru

Reznikov, V.M. **Frequency concepts and stochastic working mathematics**

The paper shows the influence of Mises's frequency concept on the development of stochastic working mathematics, particularly on the study of correspondence between theoretical and empirical statistical objects. The effect of Reihenbach's frequency theory on the development of standard statistical mathematics is not significant. However, the notion of a referent class in Reihenbach's theory influenced the development of those probabilistic interpretations which are based on conditional probability. In addition, Reihenbach's theory influenced the development of the causal probability theory and expert systems (the principle of common cause) as well as philosophy of science (the problem of induction).

Keywords: frequency concepts, theoretical and empirical objects, singular probability, referent class, problem of induction