Проблемы логики и методологии науки

ФИЛОСОФСКИЙ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АДЕКВАТНОСТИ МАРТИНГАЛОВ*

В.М. Резников

Предложен методологический анализ адекватности мартингалов для чистой и прикладной математики, а также обоснована их значимость для философии науки в контексте анализа эффективности прикладных и абстрактных теорий. Наибольшее внимание уделено анализу взаимного влияния исследований мизесовской статистической концепции и исследований в области мартингалов. Показано, что попытки корректного описания второго постулата частотной теории Мизеса инициировали исследования в области мартингалов. В результате этих исследований было уточнено понятие коллектива. На языке мартингалов мизесовский коллектив – это неотрицательный, ограниченный мартингал. Широкое применение мартингалов в современной практике научных исследований приводит к необходимости пересмотра устоявшихся методологических воззрений на отношения эффективности прикладных и абстрактных теорий в статистической науке.

Ключевые слова: статистическая интерпретация, частотная концепция, коллектив, мартингал, философия науки

«Мартингал» – это весьма удобный термин для словаря вероятностной математики, так как данное слово не имеет известных ассоциаций, и этим термин «мартингал» выгодно отличается от многих понятий вероятностной математики. В качестве неудачных понятий отметим такие, как «вероятность», «случайность», которые имели устоявшиеся значения задолго до возникновения теории вероятностей [1]. Среди значений слова «мартингал» наиболее часто используется такое, как «элемент упряжи». Другое значение слова «мартингал» связано с азартными играми. Раньше стратегия игры, при которой игрок пытался сразу отыграть все ранее проигранное, называлась мартингалом. Затем мартингалом стали называть

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-07-00272-а) и в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 47.

стратегию игры, при которой один из игроков удваивал ставку. Другие значения слова «мартингал» даны в интересной статье Мансюи [2].

Мартингалы определяются как слабозависимые случайные величины (точные формулировки будут даны ниже), и раньше их значимость ограничивалась сферой чистой математики и анализом некоторых азартных игр. Широкий интерес к мартингалам связан с их адекватностью для приложений в самых широких областях исследований, в том числе и в финансовой математике [3]. Современные исследования мартингалов и их широкое практическое применение относятся к началу XXI в. Интерес к мартингалам в прикладной математике связан с тем обстоятельством, что начиная с 70-х годов прошлого столетия и вплоть до использования теории мартингалов в практике научных исследований роль теоретических подходов в статистических приложениях была ограниченной. Доминирование эмпирических подходов и методов моделирования в прикладных статистических исследованиях связано с неадекватностью теоретической статистики, со сложностями проверки условий применимости теоретической статистики, с неробастностью методов статистики и другими причинами [4]. Адекватность статистической теории, базирующейся на мартингалах, приводит к необходимости методологического анализа оснований мартингалов, осмысления причин значимости и успешности применения аппарата мартингалов.

В чем состоят причины интереса к исследованию мартингалов?

Первая причина – это расширение теории вероятностей на область зависимых событий. Исторически первые результаты в теории вероятностей связаны с анализом независимых экспериментов.

Наиболее значимые теоретические результаты в теории вероятностей получили название фундаментальных теорем. В этих теоремах исследовались условия появления событий с единичной вероятностью для независимых экспериментов. Попытки обобщения фундаментальных теорем связаны с развитием этих теорем на случай зависимых наблюдений. Прежде всего поиски обобщений охватывали малозависимые случайные величины. К ним, например, относятся популярные марковские цепи и существенно менее популярные мартингалы.

В марковских цепях вероятность исследуемой переменной зависит от значений другой, управляющей переменной, которые эта управляющая переменная принимает начиная с некоторого момента времени t, и, быть может, от значений управляющей переменной и в последующие моменты времени, но управляемая переменная не зависит от значений управляющей переменной, которые последняя принимала до момента времени t. Мартингалы – это другой вид слабой зависимости, структурно похожий на марковские цепи. В мартингалах математическое ожидание изучаемой переменной в момент времени t зависит от значений независимых переменных, которые они принимали до этого момента времени t, но не зависит от значений переменных в момент времени t. В марковских связях при описании вероятностей абстрагируются от прошлого, в мартингальных же зависимостях при описании математических ожиданий абстрагируются от знания первых значений управляющих переменных.

Первые успешные попытки обобщения фундаментальных теорем на случай мартингальных зависимостей были осуществлены П. Леви, С.Н. Бернштейном и А.Н. Колмогоровым. Хотя в их подходах использовались мартингалы, само понятие мартингала в этих подходах не было выделено. Как отмечал один из основателей современной теории случайных процессов Дж. Дуб, мартингалы были известны всегда, но они были выделены в специальный класс математических объектов и были основательно описаны благодаря Ж. Вилли.

Вторая причина интереса к исследованию мартингалов состоит в том, что с их помощью адекватно описываются многие вероятностные процессы. Оказалось, что имеется много вероятностных процессов, адекватно формализуемых с помощью мартингалов в стандартной вероятностной теории. Вилли разработал два варианта описания мартингальных связей как для стандартной теории вероятностей, так и для игрового подхода вероятной теории. Здесь рассматриваются процессы, адекватные мартингалам стандартной теории вероятностей. Поэтому для начала нам потребуется простое в техническом отношении, формальное определение мартингальной зависимости. Введем обозначения. Пусть Y_1, Y_2, Y_3, …, Y_{n-1}, Y_n последовательность ограниченных случайных переменных, связанных следующим образом:

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}/\ Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n-1}, Y_n) = Y_n \tag{1}$$

где $\mathbb{E}$ – символ математического ожидания.

Приведем некоторые примеры зависимостей и проверим, являются ли эти зависимости мартингальными.

Пример 1. При бросании правильной монеты игрок получает один доллар, если выпадает герб, и теряет один доллар, если выпадает решка. Пусть X_n – выигрыш игрока после n бросков правильной монеты. Тогда X_n является мартингалом. Проверим выполнимость формулы (1). Исходя из определения математического ожидания имеем: $\mathbb{E}X_{n+1} = (X_n+1) \cdot 0{,}5 + (X_n - 1) \cdot 0{,}5 = X_n$. В литературе эта система называется д'Аламберовой системой игры.

Пример 2. В отличие от предыдущего примера производится n бросаний неправильной монеты. В остальном правила игры совпадают. X_n – это выигрыш игрока после n бросаний монеты. $X_{n+1} = X_n + 1$, если выпадает герб, и $X_{n+1} = X_n - 1$, если выпадает решка. Тогда $Y_n = (q/p)^{Xn}$ является мартингалом относительно $\{X_n, n = 1, 2, 3 \ldots\}$. Здесь р-вероятность выпадения герба, $q = 1 - $ р – вероятность выпадения решки. Проверим выполнение требования к мартингалам. Имеем: $\mathbb{E}Y_{n+1} = (Y_n + 1) \cdot p + (Y_n - 1) \cdot q = (q/p)^{Xn}$ $(q/p) \cdot p + (q/p)^{Xn}/(q/p) \cdot q = (q/p)^{Xn} \cdot (q + \text{р}) = (q/p)^{Xn} = Y_n$. Описанная система игры известна под названием системы де Муавра.

Пример 3. В комбинаторике он получил название урны Полиа. В урне первоначально находится r красных и b голубых мраморных шариков. Случайно вытаскивается шарик из урны, и какого бы цвета он ни был, он возвращается в урну вместе с дополнительным шариком того же цвета. Пусть Xn – число красных шариков после n этапов игры. Переменная Y_n определяется следующим образом $Y_n = X_n/(n + r + b)$. Проверим, является ли Y_n мартингалом? $\mathbb{E}Y_{n+1} = Y_{n+1} \cdot p(Y_{n+1}) = (X_n + 1)/(n + r + b + 1) \cdot (X_n)/(n + r + b) + (X_n)/(n + r + b + 1) \cdot (n + r + b - X_n)/(n + r + b) = X_n(1 + n + r + b)/(1 + n + r + b) \cdot (n + r + b) = X_n/(n + r + b) = Y_n$.

Третья причина интереса к мартингалам – это их значимость для развития частотной теории вероятностей. История открытия и введения в математику мартингалов связана с исследованиями и попытками усовершенствования частотной вероятностной теории Р. Мизеса в 20-е и 30-е годы XX в. В 30-е годы наиболее популярными были две вероятностные теории – теория А.Н. Колмогорова и теория Р. Мизеса, претендующие быть принятыми математическим сообществом в качестве универсальной теории. В 1933 г. на основе последних достижений в области теории меры и интегрирования А.Н. Колмогоровым была создана первая аксиоматическая теория вероятностей, в итоге признанная математиками в качестве основной теории [5]. До этого, в 1919 г., Р. Мизесом был разработан первый вариант частотной вероятностной теории, и в расширенном виде теория Мизеса была опубликована в работе «Вероятность и статистика» [6]. Эта теория обладала своими достоинствами, в ней впервые была предложена формализация случайности, она была ориентирована на приложения в области естественных наук.

Объектом теории Мизеса является понятие коллектива. Коллектив – это бесконечная последовательность членов коллектива, обладающих общим признаком, как то: цвет, вес, заряд и т.д. Мизесовский коллектив определялся рядом аксиом, две из них были наиболее важными.

Первая аксиома имеет название *аксиомы сходимости последовательности*. Введем необходимые обозначения. Пусть n обозначает общее число проведенных экспериментов, m – число успешных экспериментов, а p – теоретическую вероятность успешного события. Тогда формальное описание первой аксиомы имеет следующий вид:

$$\lim_{n \to \infty} m/n = p. \tag{2}$$

На первый взгляд непонятно, какое отношение имеет это вполне обычное определение предела из области математического анализа (за исключением того факта, что следуя эмпирической традиции, Мизес полагал, что нам неизвестен закон образования последовательности (2)) к исследованиям в стохастической математике. Даже обычной теоремы закона больших чисел (иногда ее называют теоремой Бернулли) недостаточно для того, чтобы можно было говорить об обычной сходимости частоты к вероятности. Как справедливо замечает Б.В. Гнеденко, «нередко из теоремы Бернулли делают совершенно необоснованный вывод, что частота события A при безграничном числе испытаний стремится к вероятности события A» [7]. Однако доказанная Э. Борелем усиленная теорема закона больших чисел и еще более общий результат Ф. Кантелли делают аксиому сходимости вполне легитимной. Пусть ε требуемая точность вычислений, тогда, используя введенные обозначения, сформулируем теорему Кантелли [8]:

$$\text{Пусть } |m/n - p| < \varepsilon,\ |m + 1/n + 1 - p| < \varepsilon,$$
$$|m + 2/n + 2 - p| < \varepsilon \text{ и т.д. до бесконечности.} \tag{3}$$

Пусть P вероятность события, заключающегося в выполнимости условий (3).

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon \wedge |m + 1/n + 1 - p| < \varepsilon \wedge |m + 2/n + 2 - p| < \varepsilon$ и т.д. до бесконечности) = 1.

Вторая введенная Мизесом аксиома получила название *аксиомы выбора*. Именно на основе этой аксиомы вводится случайность. Случайность определяется как инвариантность частот бесконечных подпоследовательностей, выбранных из исходного коллектива некоторым рациональным образом. К условиям выбора предъявляется единственное требование, а именно: каждый элемент выбирается по его номеру, например выбираем все члены исходной последовательности, имеющие нечетные номера, при этом значение выбираемого элемента в момент выбора неизвестно, выбор основывается на значениях ранее выбранных элементов. Мизес не формализовал операцию выделения подпоследовательностей, продемонстрировав выбор на нескольких примерах. Фактически он допускал анализ континуальной мощности.

Однако во всех известных логических системах мощность множества ограничена счетной мощностью, поэтому А. Вальд справедливо ограничил мощность операций выбора счетной мощностью. Все способы выбора элементов в формируемую последовательность, которые были предложены А. Черчем, А. Вальдом, К. Поппером, А.Н. Колмогоровым и другими математиками, были примерно одинаковыми и основанными на понятии нормального числа, введенном Э. Борелем: «Число $0 \le x \le 1$ называется нормальным по базису d, если частота появления каждой цифры числа x в d-ичном разложении числа x одна и та же. Число x называется нормальным, если оно является нормальным по любому базису» [9].

Для формируемых на основе выборов коллективов возникает принципиальный вопрос: обеспечивают ли эти коллективы представимость всех известных законов теории вероятностей? Для обоснования представимости всех известных законов теории вероятностей, т.е. утверждений, осуществляемых с единичной вероятностью, необходимо гарантировать, что используемые способы отбрасывания множеств меры нуль гарантируют отбраковку всех множеств меры нуль.

Однако, как показал Ж. Вилли, известные способы выбора элементов не могут обеспечить отбрасывание всех множеств меры нуль. Если говорить более строго, то было показано, что при любом известном способе формирования коллективов по крайней мере одно множество меры нуль не будет отброшено [10]. В действительности весьма абстрактный результат Вилли относительно принципиальной непредставимости всех законов теории вероятностей на основе коллективов был полностью подтвержден. Оказалось, что на основе коллективов не имеет места закон повторного логарифма. Согласно этому закону теории вероятностей колебание частот вокруг теоретической вероятности происходит в определенной области, при этом сходимость частот к вероятности является двухсторонней как со стороны значений частот, меньших вероятности, так и со стороны больших значений. Однако при всех способах формирования подпоследовательностей наблюдалась исключительно односторонняя сходимость частот к вероятности.

Прежде чем исследовать предложения А. Вальда и Ж. Вилли по спасению концепции Мизеса, уделим некоторое внимание творческой биографии Вилли, так как известность этого математика, внесшего огромный вклад в разработку мартингалов, оказалась несоизмеримо меньше, чем он заслуживает с учетом его научных достижений.

Незадолго до начала второй мировой войны Ж. Вилли был аспирантом знаменитого математика М. Фреше. Тот полагал, что на первых этапах своей карьеры молодые талантливые математики, к каковым он, несомненно, относил своего аспиранта, должны заниматься проблемами чистой классической математики, предпочтительно задачами анализа и топологии. Однако Вилли с самого начала увлекся основаниями вероятностной математики. В это время в международном математическом сообществе были популярны исследования концепции Мизеса. Учитывая интерес Вилли к анализу мизесовской концепции, Фреше предложил ему стажировку у Мизеса в Берлине. Но к тому времени, а это был 1935 г., Мизес уже не жил в Германии, он эмигрировал в Турцию, а потом в США. Тем не менее поездка Вилли была весьма плодотворной. Вначале в берлинском отделении Венского кружка и затем в Австрии он встретился со многими математиками и философами, занимавшимися вероятностными концепциями, в частности анализом мизевской концепции. Именно там Вилли обнаружил слабости концепции Мизеса и наметил стратегию по ее усовершенствованию на основе мартингалов.

По прибытии в Париж Вилли обратился к Фреше с предложением, что представит диссертационное исследование, базирующееся на переформулировании частотной концепции Мизеса на основе игровых мартингалов. Однако у Фреше к работе Вилли было сложное отношение. С одной стороны, он оценил сформулированные Вилли контраргументы к понятию мизесовского коллектива и использовал их для критики концепции Мизеса. С другой стороны, он не был заинтересован в усилении мизесовской концепции, так как стал сторонником колмогоровской аксиоматики. Поэтому предложение Вилли было отклонено. Вилли понял, что на основании разработанного им аппарата может быть получено обобщение многих известных результатов классической теории вероятностей и теории случайных процессов. Фреше не допустил работу Вили к защите и предложил ему дополнить ее развитием теории непрерывных случайных процессов на основе мартингалов. Вилли закончил аспирантуру без защиты диссертации и начал преподавать математику в лицее. Здесь ему повезло: он стал ассистентом знаменитого математика Э. Бореля. Борель разобрался с работой Вилли, оценив ее как выдающееся исследование, и под его влиянием Фреше назначил защиту. Вилли получил докторскую степень в 1939 г., накануне вторжения Германии во Францию. После войны он практически не возвращался к диссертационной тематике, за исключением случаев, когда было необходимо использовать мартингалы в практических работах.

Вернемся к попыткам усовершенствования мизесовских коллективов. Неудача с идентификацией всех множеств меры нуль привела А. Вальда к мысли не использовать множества меры нуль вообще. Операции, приводящие к выделению бесконечных множеств меры нуль, Вальд называл сингулярными. Так как мощность множеств, не содержащих множеств меры нуль, имеет континуальную мощность, вполне можно ограничиться множествами, не содержащими множеств меры нуль. Их Вальд назвал строгими множествами. Фреше идею со строгими множествами счел гениальной, но он полагал, что технические средства Вальда слишком сложные и что они не вполне адекватны для реализации понятных в содержательном плане конструкций Мизеса. Фреше был сильным и весьма авторитетным математиком. Он часто оказывался «законодателем» в использовании математической терминологии. Например, термин «постулат Курно» закрепился после того, как Фреше так назвал предложение А. Курно считать маловероятные события физически невозможными; до этого времени предложение Курно имело название «лемма Курно». Весьма значима роль Фреше в признании математическим сообществом аксиоматической теории вероятностей Колмогорова в качестве стандартной вероятностной теории. Фреше полагал, что теория Мизеса в целом уступает концепции Колмогорова. На математическом конгрессе в Женеве он использовал критические результаты Вилли для критики конструкции мизесовских коллективов и не разрешил Вилли реализовать стратегию формирования коллективов на основе мартингалов.

Первым математиком, понявшим значимость неигровых мартингалов для развития случайных процессов, был Дж. Дуб. В своей монографии, посвященной случайным процессам, он ссылается на Вили [11]. Значимость игровых мартингалов была оценена в работах Г. Шафера и В. Вовка [12]. Шафер и Вовк показали, что все фундаментальные теоремы теории вероятностей, доказанные с помощью неигровых мартингалов, будут верными и для игровых мартингалов, но обратное неверно. Строгое доказательство соотношения эффективности игровых и неигровых мартингалов дано в их работе «Вероятность и финансовая математика – это лишь игра!» [13]. Однако легко получить вывод неигровых мартингалов на основе игровых с помощью несложных рассуждений. Вначале дадим краткое описание схемы игрового мартингала.

Концепция игровых мартингалов вводится Вилли в контексте простой игры двух коалиций с нулевой суммой. В простейшем случае каждая коалиция состоит из одного игрока. Одного игрока назовем Скептиком, он пытается угадать результат игры соперника. Соперником является Реальность, определяющая результат хода Скептика. Игра заключается в угадывании Скептиком результата бросания монеты. Игровой мартингал описывает изменение капитала Скептика.

Введем необходимые обозначения. K_n и K_{n-1} – соответственно сумма капитала на n–*м* и (n–1)-м этапах игры; S_n ставка на n-м шаге игры (количество купленных билетов); Y_n – результат игры на n-м шаге; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ результаты игры на предыдущих ее этапах; $P(Y_n/Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})$ – известная заранее условная вероятность выигрыша на последнем шаге при условии, что известны результаты игры на всех предыдущих шагах. Результаты игры «герб» и «решка» кодируются соответственно единицей и нулем. С учетом введенных обозначений игровой мартингал описывает схему изменения капитала следующим образом:

$$K_n = K_{n-1} + S_n \cdot (Y_n - P(Y_n/Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})) \tag{4}$$

Для того чтобы от формулы изменения капитала перейти к стандартной формуле неигрового мартингала, нужно от формулы изменения капитала перейти к формуле математического ожидания. Для этого умножим формулу (4) вначале на P, потом на $(1 - P)$ и наконец сложим полученные произведения. Имеем:

$$\mathbb{E}Kn = K_{n-1} \cdot P + S_n \cdot (1 - P(Y_n/Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}) \cdot P + K_{n-1}$$
$$(1 - P) + S_n \cdot (0 - P(Y_n/Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})$$
$$(1 - P) = K_{n-1} + S_n \cdot (1 - P(Y_n/Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1})(P - P) = 0 = K_{n-1.}$$

По мнению Ю. Неймана, одного из создателей современной математической статистики, в XX столетии частотной подход не может считаться универсальным.

Во-первых, концепция Мизеса не обеспечивает вычисление индивидуальных вероятностей, для их вычисления требуются иные подходы.

Во-вторых, как мы показали, ни сам Мизес, ни его последователи, ни критики его подхода не реализовали корректный способ формирования коллективов.

В-третьих, уже в классической теории вероятностей известны результаты, описывающие связь частотных и вероятностных характеристик, при этом не существует прагматического подхода для корректного вычисления вероятностей на основе частот. Классический результат такого рода представляет собой теорема закона больших чисел в форме С. Пуассона. Пуассон обнаружил связь частоты события и его вероятности, причем вероятность события не является постоянной величиной, а некоторым образом изменяется.

Приведем описание теоремы. В последовательности независимых испытаний наблюдается событие A, вероятность появления события A в испытании k равна P_k. Было проведено N испытаний, и событие A произошло m раз. Тогда при бесконечном увеличении числа экспериментов N имеет место следующее соотношение [14]:

$$\lim_{N \to \infty} P((m/N - (P_1 + P_2 + \ldots + P_N)/N) < \varepsilon) = 1.$$

В данном случае частота появления результата соответствует не единственной вероятности, а усредненной сумме разных вероятностей.

В-четвертых, усовершенствованная Дж. Дубом теория меры для случайных процессов и применение случайных процессов для зависимых величин в практике научных исследований, в частности марковских цепей и мартингалов, несколько уменьшили значимость исследования независимости. Нейман говорил, что в XX в. вектор интересов в стохастическом анализе смещается в сторону анализа динамики случайных процессов. С позиций эмпиризма в обычном статистическом анализе устойчивость значений случайной величины и вероятностей каждого значения определяется с помощью многократных повторных экспериментов. В случае динамических, изменяющихся во времени стохастических процессов экспериментально невозможно многократно измерять одно и то же значение случайной величины и частоту, с которой это значение имеет место. Дело в том, что возможные значения динамических процессов и их вероятностные параметры составляют множества большой мощности. Поэтому подход, связанный с тщательным определением каждого значения случайного процесса оказывается невозможным. Объективность в этом случае обосновывается корректным формализованным описанием динамического процесса. Корректность формализованных описаний доказывается прагматически. Практически значимые случайные процессы обеспечивают предсказание текущих значений случайного процесса и верификацию предсказанных значений.

Игровые мартингалы вполне удовлетворяют требованиям Неймана, представляя собой модель интеллектуального состязания. Скептик на основе ряда наблюдений делает предсказание, Реальность определяет то, что фактически происходит. Верификация правильности предсказаний Скептика основана на сумме его выигрыша. Так как в честной безрисковой игре Скептик делает ставку только на часть своего капитала, его выигрыш не может быть ни чрезвычайно большим, ни, тем более, бесконечным.

В данной работе обоснована методологическая значимость неигровых и игровых мартингалов для чистой и прикладной математики, а также показана значимость мартингалов для философии науки в контексте анализа эффективностей прикладных и абстрактных теорий. Наибольшее внимание уделено анализу взаимного влияния исследований мизесовской концепции и исследований в области мартингалов. Показано, что попытки корректного описания второго постулата частотной теории Мизеса инициировали исследования в области мартингалов. В результате этих исследований было уточнено понятие коллектива. На языке мартингалов мизесовский коллектив – это неотрицательный, ограниченный мартингал. Широкое применение мартингалов в современной практике научных исследований приводит к необходимости пересмотра устоявшихся методологических воззрений на отношения эффективности прикладных и абстрактных теорий в статистической науке, потому что наблюдавшееся в недавнем прошлом полное доминирование прикладных теорий не имеет места.

Примечания

1. См.: *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. – М.: Знание, 1980.

2. См.: *Mansuy R.* The origin of the word «Martingale» // Electronic Journal for History of Probability and Statistic. – 2009. – V. 5/1 [Эл. ресурс]. – Режим доступа: http://www.jehps.net/juin2009.html (дата обращения 18.12.2009).

3. См.: *Shafer G., Vovk V.* Probability and finance it is only a game! – N.Y.: Wiley-Interscience, 2001.

4. Подробнее см.: *Резников В.М.* Вероятностные концепции: анализ оснований и приложений. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2005.

5. См.: *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.

6. См.: *Мизес Р.* Вероятность и статистика. – М.: Либроком, 2009.

7. См.: *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – С. 195.

8. См.: *Ville J.* Summary of the scientific work of Mr. Jean Ville (May 1955) // Electronic Journal for History of Hrobability and Statistic. – 2009. – V. 5/1 [Эл. ресурс]. – Режим доступа: http://www.jehps.net/juin2009/Ville_notice.pdf.

9. См.: *Лампетри Дж.* Вероятность. – М.: Наука, 1973. – С. 39.

10. См.: *Ville J.* Etude critique de la notion de collectif. – P.: Gauthier-Villars, 1939. – P. 55–63 [Эл. ресурс]. – Режим доступа: www.glennshafer.com. Перевод на английский и введение Г. Шафера.

11. См.: *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. – М.: Иностр. Лит-ра, 1956.

12. См.: *Shafer G., Vovk V.* Probability and finance it is only a game!

13. Ibid.

14 . См.: *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей.

Дата поступления 25.10.2009

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
rvm@philosophy.nsc.ru

***Reznikov, V.M.* Validity of martingales: its philosophical and methodological analysis**

The paper presents methodological analysis of martingale validity for pure and applied mathematics. Also, it proves the relevancy of martingales for philosophy of science in the context of the analysis of efficiency of applied and abstract theories. The main attention is paid to the analysis of mutual influence of research relating to Mises' statistical conception and that of martingales. Shown that attempts to characterize Mises' second postulate correctly initiated studies in the field of martingales. These studies resulted in improvement of the notion of collective introduced in Mises' conception. In terms of martingales, Mises' collective is a nonnegative, bounded martingale. Since martingales are widely adopted in modern scientific research, it is necessary to revise existing methodological views on relation between efficiency of applied theories and that of abstract ones in statistics.

Keywords: statistical interpretation, frequency conception, collective, martingale, philosophy of science