ПРОСТОТА КАК ОТНОШЕНИЕ НА КЛАССАХ ОБЪЕКТОВ

Е.М.Черепанов

Определены классы сравнимых теорий, а также основные разновидности отношений простоты/сложности на этих классах. Рассмотрены некоторые из свойств этих отношений на заданных классах. Показано влияние выбора численной характеристики сложности теории на отношение сложности на классе сравнимых по сложности теорий.

Ключевые слова: логика, теория, простота, классы объектов

О значении простоты как об одном из важнейших факторов научного исследования говорят уже со времен греческой цивилизации, и история активного изучения этого чрезвычайно сложного и запутанного вопроса насчитывает уже не одно десятилетие. Причем достижение понимания тех или иных аспектов этой проблемы всегда порождало новые вопросы. Понятие простоты оказалось сложным и запутанным настолько, что некоторые авторы говорили о «мифе простоты» (М. Бунге [1]).Тем не менее многие современные авторы отмечают важность критерия простоты в научных исследованиях. О значимости критерия простоты и важности исследований в этой области наиболее точно (и это мнение разделяется большинством специалистов в данной области) высказался автор самого продвинутого метода измерения простоты – Н. Гудмен. Считаем целесообразным еще раз напомнить читателям его взгляд на природу проблемы.

В статье «The test of simplicity» [2] Гудмен пишет: «Вся научная деятельность состоит в придумывании и выборе систем и гипотез. Одним из основных соображений, направляющих этот процесс, является требование простоты. ...Мы соприкасаемся с простотой всегда, как только вообще соприкасаемся с системой... Более того, при выборе одной из альтернативных систем простота и истинность не всегда различаются. Еще чаще простота служит одним из критериев истинности (выбор одной из альтернативных гипотез обусловливает и выбор истинных утверждений. – *Е.Ч.*). ...Мы хотим выделить систему понятий, которые не только согласуются с установленными данными, но также правильно предсказывают исходы будущих наблюдений. Это выделение теории должно всегда осуществляться раньше, чем определение некоторых фактов, на которые она распространяется, и, естественно, должен быть применен некий другой критерий, отличный от критерия согласованности с фактами, для осуществления этой селекции. ...Таким образом, простота здесь является не соображением, применимым после установления истинности, а одним из эталонов обоснованности, применяемых в попытке открыть истину» [3].

Эти рассуждения приводят Гудмена к самому важному вопросу в исследовании проблемы простоты: «Но если простота есть критерий истинности, тогда что служит критерием простоты?». Именно этот вопрос и оказался самым обсуждаемым среди специалистов в данной области. Причем зачастую в дискуссиях, посвященных этому вопросу, наблюдалась некритичность обсуждений размытых понятий. Хорошей иллюстрацией этому служит одна из первых попыток классификации видов простоты, предпринятая Бунге. Он начинает с различения двух типов простоты в соответствии с двумя типами объектов, к которым эти виды простоты относятся. С одной стороны, это материальные объекты – вещи, события, процессы и их свойства. С другой стороны, это объекты идеальные – понятия, суждения, теории и их свойства. Простоту материальных объектов Бунге называет *онтологической*, а идеальных – *семиотической*. Он совершенно верно полагает, что поскольку о мире мы можем что-то узнать лишь с помощью науки, постольку прежде чем станет возможным говорить что-то о простоте онтологической, необходимы исследования семиотической простоты. В области семиотической простоты Бунге выделяет четыре разновидности простоты: 1) синтаксическую, или логическую, простоту, т.е. экономию форм; 2) семантическую простоту – экономию предпосылок; 3) эпистемологическую простоту – экономию трансцедентных понятий; 4) прагматическую простоту – экономию труда.

Из приведенной классификации разновидностей простоты, предложенной Бунге, видно, что понятие *онтологической* простоты не является независимым понятием, так как целиком определяется избранным подходом к определению семиотической простоты, т.е. этот вид простоты есть также разновидность семиотической простоты. О разновидностях же смеиотической простоты говорить тоже сложно, до тех пор пока не эксплицированы эти разновидности простоты. Однако возникает подозрение, что и эти четыре разновидности простоты не являются независимыми и что второй, третий и четвертый виды простоты зависят от простоты синтаксической. В этом отношении более приемлемым взглядом на классификацию видов простоты нам кажется классификация Р. Харре. В ходе дискуссии о простоте Харре ввел различение понятий *формальной* и *концептуальной* простоты [4]. Г. Кайберг комментирует это различение следующим образом: «Это могло бы помочь в понимании и объяснении некоторых противоречий, связанных с понятием простоты. Но и это полезное различение двух видов простоты не сделало дискуссию более конструктивной и информативной. Как отметил сам же Р. Харре (здесь Кайберг ссылается на вышеупомянутую работу. – *Е.Ч.*), формальная и концептуальная простота не являются независимыми» [5].

Исследования автора данной статьи также показывают, что это действительно так. Если концептуальную простоту понимать как простоту *содержательную*, а формальную – как *дескриптивную*, то после введения формального различения этих видов простоты [6] было установлено, что содержательная простота зависит от простоты дескриптивной.

Отечественные исследователи Е.А. Мамчур, Н.Ф. Овчинников и А.И. Уемов отмечают: «...Научное знание имеет очевидную тенденцию усложняться. Увеличивается абстрактность его понятийного аппарата, а это значит, увеличивается число терминов и предложений, необходимых для того, чтобы специфицировать его смысл. В науке все в большей степени оперируют формальными и математическими методами, используя понятия, весьма далекие от непосредственно наблюдаемых явлений. Так, в современных концепциях физики элементарных частиц фигурируют “странности”, “кварки”, “очарования”, “цвета кварков” и т.п., для которых оказывается отнюдь не просто указать даже на опосредованную связь с опытом. Научное знание несомненно усложняется и в прагматическом плане. Оно становится все более далеким от обыденного “здравого смысла”, все менее очевидным и все более трудным для понимания и усвоения. Применяемые в нем вычисления нередко оказываются трудоемкими, а решение задач требует существенных затрат времени» [7].

В этом смысле, несомненно, представляет интерес и простота прагматическая как вид простоты, который определяется соображениями экономии труда и мышления. В научной практике он имеет также большое значение. Хорошей иллюстрацией этому является поиск в какой-либо теории простейшего доказательства, так как простое доказательство легче проверить, т.е. убедиться в истинности доказанного утверждения либо в возможности опровергнуть его. Доказательство теоремы Ферма – убедительный тому пример, так как в научной среде вполне обоснованно существуют сомнения в корректности проведенных рассуждений. Как уже говорилось, более простое доказательство легче проверить. И в этом случае можно увидеть, что истинность и простота порой тесно связаны между собой. Любое доказательство требует верификации, но не всегда это сделать легко, если мы имеем дело со сложным доказательством, которое характеризуется большой длиной и сложными конструкциями формул. В этом случае достаточно затруднительно убедиться как в истинности доказанного утверждения, так и в его ложности. Таким образом, более простое доказательство является и более убедительным.

Аргументы в защиту прагматического аспекта простоты приводит также Гудмен в одной из последних своих работ, посвященных проблеме простоты. Эти аргументы указывают на смысловую двойственность данного понятия. Гудмен пишет: «Достигается ли подлинное упрощение выведения математики из нескольких логических понятий ценой трех больших томов сложных формул? Мы можем уверенно сказать “да” на том основании, что принимаем во внимание простоту базисных понятий и постулатов и что это выведение должно быть сложным в той степени, в какой базис является простым. По-видимому, мы вынуждены становиться на противоположную точку зрения, когда расцениваем описание движения астрономических тел в терминах эллипсов как более простое, чем описание в терминах окружностей; аргумент в пользу эпициклов может состоять в том, что более сложные конструкции и более сложные требуемые вычисления системы эпициклов являются признаками большей простоты элементарных понятий» [8].

Эти соображения еще раз подталкивают нас к выводу, что простота – понятие многогранное и разные аспекты этого понятия посвоему важны и играют свою роль. Приведенная аргументация показывает, что ориентация на выбор простейших базисных понятий не всегда влечет за собой выбор простейшей теории, так как понятие простоты относительно элементарных понятий имеет несколько другой смысл, чем тот, когда мы говорим о простоте теории. По-видимому, решением этой проблемы является сравнение конкурирующих гипотез по степени их сложности в их «сравнимом» виде. Термин «сравнимые» требует уточнения, что и будет сделано далее, и тогда мы получим возможность сравнивать утверждения конкурирующих гипотез, говорящие нам об одном и том же. И видимо, простейшей теорией в этом случае будет та, утверждения которой имеют более простой вид. Это объясняет нам, почему теория, описывающая движение небесных тел с использованием понятия «эллипс» в качестве базисного понятия, оказалась предпочтительнее, чем теория, в которой принято более простое понятие «круг». Здесь мы опять же будем иметь дело с прагматическим аспектом сложности (простота использования). В этом отношении весьма спорным является предложение К. Поппера [9], состоящее в том, что следует устранить из рассмотрения стандарт простоты, имеющий прагматический характер, и сосредоточить усилия исследователей только на эпистемологическом понятии простоты. Прагматическая простота, по нашему мнению, имеет отношение и к эпистемологии.

* * *

Таким образом, большинство исследователей, заинтересовавшихся данной проблемой, сосредоточили свое внимание на эпистомологической простоте. Пожалуй, самыми значимыми в этой области стали исследования Н. Гудмена. В 1961 г. в книге «The structure of appearance» [10] он опубликовал окончательную версию своего подхода к измерению простоты внелогических терминов первопорядковых теорий. В более ранней статье «The test of simplicity» Гудмен подчеркивал: «… Мы должны начать, ограничившись очень малой частью проблемы, привлекающей внимание. Теория есть система утверждений. Я буду касаться здесь исключительно проблемы простоты множества понятий (т.е. словаря системы), используемых в этих утверждениях» [11].

Определяя понятие структурных характеристик внелогического термина, а к таким характеристикам Гудмен относит местность каждого термина, некоторые возможные специальные свойства каждого из терминов (различные виды рефлексивности, симметричности и сильной транзитивности) и называет эти характеристики релевантными, он предлагает числовую функцию, описывающую структурные характеристики терминов релевантного вида, которые и предлагается считать эталонами измерения простоты/сложности для внелогических терминов теории. Сложность «словаря системы» Гудмен определяет с помощью созданных им «эталонов» измерения.

Напрашивается вполне естественный шаг в этом направлении, который состоит в следующем. Для всякой формулы некоторого фиксированного языка можно определить ее структурные характереристики. К *структурным характеристикам формулы* будем относить количество вхождений в эту формулу предикатов (под количеством вхождений предикатов в формулу здесь будем понимать возможное количество использований каждого предиката), а также структурные характеристики каждого из этих предикатов. Автором данной статьи предложен метод измерения структурной сложности формул [12]. Заключается он в следующем.

Самый простой и наиболее естественный способ приписать значение структурной сложности формуле заданного исчисления предикатов – способ, аналогичный оценке сложности множества внелогических терминов по Гудмену. Согласно этому способу мы получим, что если задан язык L и $\Omega =< P_1^{m_1}, ..., P_n^{m_n} >$ суть сигнатурные термины этого языка, тогда если $\{P_{i_1}^{j_1}, ..., P_{i_m}^{j_m}\}$ есть множество всех вхождений предикатов в формулу j, то значение структурной сложности формулы j, можно определить следующим образом: $v_f(j) = \sum_{i_1}^{j_m} v_G(P_{i_k}^{j_k})$, где $v_G(P_{i_k}^{j_k})$ есть значение сложности термина по Гудмену.

Этот способ измерения сложности формул дает нам как возможность измерить сложность индуктивного аппарата теорий первого порядка, так и возможность сравнить сложности логически эквивалентных формул, т.е. из двух формул j и y, таких что "x(j « y), можно выбрать простейшую. Сравнение по степени сложности сравнимых между собой теорий обеспечивается методом измерения сложности индуктивного аппарата этих теорий. Так, если T есть теория первого порядка и A есть конъюнкция конечного набора ее аксиом, то значение *дескриптивной сложности этой теории* будем определять как $v_d(T) = v_f(A)$. Для прочих объектов мы получаем возможность сравнивать сложность их описания. К тому же мы получаем возможность экспликации понятия «содержательная простота». Содержательность каждого утверждения теории определяется его дедуктивным замыканием. Так, если j есть формула языка L, то будем обозначать через Th(j) множество формул, являющихся дедуктивным замыканием формулы j. Две логически эквивалентные формулы имеют одно и то же содержание, но разную форму записи и различаются по своей структурной сложности. Каким же образом можно определить содержательную сложность?

Естественно, что правильным кажется принять в качестве значения сложности всех логически эквивалентных формул значение сложности наименее структурно сложной формулы, что и было предложено нами в статье «О сложности утверждений и содержательной сложности аксиоматической теории». Значение содержательной сложности на множестве логически эквивалентных формул было определено следующим образом. Пусть F есть конечное множество логически эквивалентных формул. Тогда значение содержательной сложности каждой формулы j этого множества определим так:

$$v_c(j) = \min\{\, v_f(j_i) \ \&\ j_i \ \hat{I}\ F\}.$$

Введение понятия содержательной сложности является необходимым для нас прежде всего в качестве ориентира при выборе дескриптивно простейшей из всех логически эквивалентных гипотез, так как это понятие простоты не зависит от переопределения терминов теории. Логически эквивалентные теории имеют одно и то же значение содержательной сложности. Логически более сильная теория будет и более сложной в содержательном смысле.

Понятие содержательной сложности имеет также и прагматический смысл, поскольку наименее структурно сложная формула (из логически эквивалентных) легче воспринимается и более удобна в прагматическом смысле, т.е. является и прагматически более простой. В основе прагматической сложности лежат также психологические аспекты восприятия. Назовем такого рода прагматическую сложность *сложностью восприятия*. Этот аспект сложности тоже касается всей сферы научной деятельности и относится преимущественно к эквивалентным способам представления одного и того же объекта. Во всякой теории аксиоматика обычно представлена списком аксиом, а не одной, являющейся конъюнкцией списка аксиом, поскольку легче и восприятие, и использование таким образом представленного индуктивного аппарата. Хороший пример этому – представление паролей к программным продуктам. Несомненной трудностью будет запоминание пароля вида 11111111111111111111. Однако если этот пароль представить в виде 11111-11111-11111-11111, то проблем в восприятии и запоминании не возникает. Это же касается восприятия и верификации доказательств, а также построения систем, позволяющих решать ту или иную проблему.

Автором настоящей статьи предложен методологический подход к измерению такого рода прагматической сложности [13], и базируется он на следующем принципе: прагматическая сложность формулы должна быть больше либо равна сумме прагматических сложностей, входящих в нее подформул. То есть если, к примеру, формула j имеет вид y_1 & y_2, тогда если обозначить через v_p(j) значение прагматической сложности формулы j, то для стандарта прагматической простоты должно быть выполнено условие: *vp*(j) ³ ³ *vp*(y_1) + *vp*(y_2). Численное значение прагматической сложности определяется следующим образом. Каждой формуле j с помощью выбранного отображения *f* ставится в соответствие *n*-местная атомарная формула *R* и значение прагматической сложности формулы j определяется как v_p(j) = v_G(*f*(j)) = v_G (*R*), где v_G(*R*) есть значение сложности термина по Гудмену.

* * *

Понятие простоты/сложности требуется нам для сравнения необходимых для нас объектов, и это сравнение обусловлено прагматическими соображениями. Понятие сложности в этом смысле есть двуместное отношение на классе сравнимых объектов.

По сути, всегда, когда мы сталкиваемся со сложностью, мы измеряем не «сложность», а некоторую численную характеристику объекта, которую сравниваем с такой же численной характеристикой другого объекта и делаем заключение, что относительно принятых нами численных характеристик один из объектов проще или сложнее другого. В этом смысле понятие простоты/сложности является понятием конвенциональным и зависит от принятого нами соглашения о численной характеристике, которую мы склонны соотносить со сложностью того или иного объекта. В рассматриваемом случае мы принимаем во внимание структурные характеристики объектов и выбираем численную характеристику, которая, как нам кажется, согласуется с нашей интуицией относительно сложности.

Первым, кто обратил свое внимание на понятие сложности как двуместного отношения на классе объектов был П. Суппес [14]. Кроме того, Суппес, один из основоположников теории измерения, сформулировал минимальную схему аксиом, которым должно удовлетворять отношение сложности для теорий. Эти схема аксиом такова.

Пусть *T* = <Ω, *A*> есть теория, где Ω – конечная сигнатура и *A* – конечный набор аксиом теории. Тогда отношение Simp(*x*, *y*) есть отношение сложности на классе такого вида теорий, если и только если для любых теорий T_1 = <Ω_1, A_1>, T_2 = <Ω_2, A_2>, и T_3 = <Ω_3, A_3> оно удовлетворяет следующей схеме из семи аксиом:

S1. Simp(T_1, T_2) & Simp(T_2, T_3) Þ Simp(T_1, T_3);

S2. Simp(T_1, T_2) Ú Simp(T_2, T_1);

S3. Если $A_1 = A_2$ и Ω_1 Ì Ω_2, то Simp(T_1, T_2). Это естественное требование, которое состоит в том, что теория, использующая большее количество терминов (возможно, лишних), должна считаться более сложной;

S4. Если $\Omega_1 = \Omega_2$ и A_1 Ì A_2, то Simp(T_2, T_1); Данная аксиома отражает следующий принцип: из двух альтернативных теорий, сформулированных в одном языке, следует предпочесть логически более сильную, и она будет считаться более простой. Эта аксиома отражает методологический принцип К. Поппера, связывающий простоту с фальсифицирумостью и состоящий в том, что более сильную теорию проще опровергнуть, а потому более сильная теория (в одной и той же сигнатуре) является и более простой;

S5. Если Ω_1 Ç Ω_2 = Ω_2 Ç Ω_3 = Æ и Simp(T_1, T_2), то Simp(T_1 Ç T_3, T_2 Ç T_3);

S6. Для всякой произвольной теории T – Simp(<Æ,Æ>, T);

S7. Для всякой произвольной теории T невозможно, чтобы Simp(T, <Æ,Æ>).

Также Суппес сформулировал следующую проблему: если T_1 и T_2 – две теории, такие что Ω_1 Ç Ω_2 = Æ, тогда верно ли, что для всякой числовой характеристики сложности $v(x)$ выполняется v(T_1 È T_2) = = $v(T_1) + v(T_2)$? И если $v(T_1)$ £ $v(T_2)$, то следует ли, что Simp(T_1, T_2)?

Кроме этого, вполне естественными кажутся и другие вопросы, касающиеся влияния выбора численной характеристики сложности на отношение сложности. Для схемы аксиом S2. Simp(T_1, T_2) Ú Simp(T_2, T_1) вполне естественным является требование, согласно которому Simp(T_1, T_2) & Simp(T_2, T_1), то равенство $v(T_1) = v(T_2)$ должно быть выполнено для любой численной характеристики, но, как будет показано ниже, обратное соотношение не будет верным для произвольной численной характеристики.

В аксиоматической теории простоты Гудмена в качестве первого приближения предлагается оценивать значение сложности теории через значение сложности ее базисных терминов, т.е. если теория

$T = \langle\Omega, A\rangle$ и $\Omega = \langle P_1^{m_1}, ..., P_n^{m_n} \rangle$, то значение сложности по Гудмену определяется как $v_G(T) = \sum_{k=1}^{n} v(P_k^{m_k})$. Здесь выбор численной характеристики таков, что ответ на первый поставленный Суппесом вопрос является положительным, а на второй – отрицательным. В общем же случае ответ на поставленные вопросы будет отрицательным и будет зависеть от рассматриваемой разновидности простоты и, соответственно, от выбора численной характеристики применительно к этой разновидности простоты. К примеру, если сложность теории оценивать через значение сложности внелогических терминов, то приведенный выше пример с теориями движения небесных тел показывает относительно второго вопроса, что такого следования нет. Соответствующий выбор численной характеристики может обеспечить это следование. Попутно нужно отметить, что для произвольной теории T справедливо соотношение $v_G(T)$ £ $v_d(T)$, которое вытекает из определения численных характеристик v_G и v_s.

Возникают сразу следующие вопросы. Вопрос первый: на каких классах объектов определены различные стандарты простоты? Вопрос второй: одними ли свойствами обладают различные стандарты отношения сложности и какой из способов сравнения этих объектов информативен, т.е. позволяет нам сделать обоснованный выбор одного из объектов?

Первое, что нам необходимо сделать, чтобы определить свойства отношения сложности, – это задать классы сравнимых по степени сложности объектов. Интуитивно понятно, что сравнимым по степени сложности будет то, что вообще может быть сравнимым. Примем это соображение за методологический принцип. Этот принцип имеет два существенных аспекта. Один аспект – чисто прагматический, который опирается на прагматику научной деятельности: не всякое сравнение информативно. Никто не сравнивает по сложности объекты, относящиеся к разным областям знания. К примеру, не имеет смысла сравнивать сложность теорий предсказания погоды и теорий элементарных частиц. Это сравнение будет носить чисто умозрительный характер. Второй аспект имеет уже чисто логический характер. Необходимо определить критерии для сравнения объектов.

Определим теперь некоторые из критериев для сравнения объектов, в данном случае – теорий первого порядка. Проанализированные методы сравнения теорий первого порядка дают нам общее представление о способе сравнения этих теорий по степени их сложности. Детальный разбор методов сравнения теорий первого порядка дан в книге В.А. Смирнова «Логические методы анализа научного знания» [15]. Приведем необходимые для наших рассуждений выдержки из этого текста и определения.

* * *

Для начала сделаем некоторые общие замечания об определениях. На основе результатов относительно определимости предикатных терминов в первопорядковых теориях можно рассмотреть и некоторые аспекты учения об определениях. Ограничимся только определениями предикатных терминов в первопорядковых теориях. Целесообразно выделить три подхода к определениям, или три точки зрения на определения.

В рамках первого подхода определения рассматриваются как процедуры, вводящие новый термин. Во втором подходе определения понимаются как процедуры установления значения уже имеющегося термина через другие термины. При третьем подходе определения понимаются как процедуры перевода («определения суть правила перевода с одного языка на другой» [16]). Так, если имеется теория T_1, словарь которой не содержит термина P, и теория T_2, которая дополнительно к словарю теории T_1 содержит термин P, то определение при третьем подходе трактуется как перевод выражений теории T_2, содержащих термин P, в выражения теории T_1.

Первый подход. Пусть имеется теория T и ее словарь $[T]$ не содержит термина P. Пусть множество предложений сформулировано в терминах словаря $[T] \cup P$. Множество предложений Δ *играет роль определения* n-местного термина P в теории T тогда и только тогда, когда существует формула ψ, сформированная в терминах не содержащих P, ровно с n различными свободными переменными, такая, что $Th(T \cup \Delta) = Th(T \cup \{\forall x(P(x) \leftrightarrow \psi)\})$.

Очевидно, что $Th(T \cup \Delta)$ есть консервативное расширение теории T, так как оно не содержит новых теорем по сравнению с теорией T. Легко видеть, что из определимости термина P в $Th(T \cup \Delta)$ следует, что Δ удовлетворяет условию переводимости.

Второй подход. Будем считать, что термин P задан только на объектах, удовлетворяющих условию φ, а на остальных не задан. С формальной точки зрения при рассмотрении условных определений удобно использовать технику ограниченных кванторов, в частности вместо $\forall x(\varphi(x) \to P(x) \to \psi(x)))$ писать $\forall x_{\varphi(x)}(P(x) \to \psi(x))$.

Таким образом, n-местный термин P явно условно определим в терминах предложений D тогда и только тогда, когда существуют условие j и формула y, содержащая ровно n различных свободных переменных и не содержащая термина P такая, что Δ **a** $\forall x_{j\,(x)}(P(x) \leftrightarrow y\,(x))$.

Сравнение теорий в одном языке. Рассмотрим отношения между теориями, сформулированными в одном и том же языке, т.е. с одними и теми же правилами образования выражений и с одним и тем же словарем внелогических терминов.

Две теории T_1 и T_2 будем называть *несовместимыми*, если и только если теория $Th(T_1$ È $T_2)$ противоречива.

Две теории T_1 и T_2 будем называть *независимыми*, если и только если T_1 Ç $T_2 = Th$ (Æ). Независимые теории не имеют общего нелогического содержания. Из этого определения следует, что T (Æ) независима от любой теории, в том числе и от самой себя.

Возможны следующие взаимоисключающие отношения между двумя теориями (сформулироваными в одном и том же языке с одним и тем же словарем нелогических терминов):

1) T_1 эквивалентна T_2, т.е. $T_1 = T_2$;

2) T_1 является собственной подтеорией T_2, т.е. T_1 Ì T_2;

3) T_2 является собственной подтеорией T_1, т.е. T_2 Ì T_1;

4) ни одна из теорий не является подтеорией другой – $ j $ y(j Î T_1 & j Î T_2 & y Ï T_1 & y Ï T_2, т.е. T_1 ^ T_2.

Нетрудно видеть, что если T_1 и T_2 несовместимы, то $T_1 = T_2$ тогда и только тогда, когда T_1 и T_2 противоречивы; T_1 Ì T_2 тогда и только тогда, когда T_1 непротиворечива и T_2 противоречива; T_1 ^ T_2 тогда и только тогда, когда T_1 и T_2 непротиворечивы.

Аналогично если T_1 и T_2 независимы, то $T_1 = T_2$ тогда и только тогда, когда $T_1 = Th$ (Æ) и $T_2 = Th$ (Æ); T_1 Ì T_2 тогда и только тогда, когда $T_1 = Th$ (Æ) и $T_2 =$ ØTh (Æ); T_1 ^ T_2 тогда и только тогда, когда $T_1 =$ ØTh (Æ) и $T_2 =$ ØTh (Æ).

Сравнение теорий с помощью определений. До сих пор мы сравнивали теории, имеющие один и тот же язык. Теперь мы имеем возможность сравнивать теории, сформулированные с одной и той же грамматикой, но с разными словарями. Прежде всего введем понятие дефинициального расширения.

T_2 есть *дефинициальное расширение* T_1, если и только если существует множество D определений терминов теории T_1, отсутствующих в T_2, в терминах теории T_2, такое что $T_2 = Th(T_1 \cup D)$.

Будем говорить, что теория T_1 *дефинициально эквивалентна* теории T_2, если и только если существуют определения D_{T1} терминов теории T_2 в терминах теории T_1 и определения D_{T1} терминов теории T_1 в терминах теории T_2, такие, что $Th(T_1 \cup D_{T2})$ эквивалентна $Th(T_2 \cup D_{T1})$.

Очевидно, что теория T_1 дефинициально эквивалентна теории T_2, если и только если существуют дефинициальные расширения этих теорий, эквивалентные друг другу.

Если $T_1 \subseteq T_2 + D_{T1}$, то будем говорить, что T_1 *дефинициально интерпретируема* в T_2. Встает вопрос: если T_1 дефинициально интерпретируема в T_2 и T_2 дефинициально интерпретируема в T_1, то следует ли отсюда, что T_1 дефинициально эквивалентна T_2? Ответ отрицательный (теории дефинициально сравнимы).

Будем говорить, что T_1 дефинициально вложима в T_2, если и только если существует система определений D_{T1} терминов теории T_1 в терминах теории T_2, такая что $T_2 + D_{T1}$ является консервативным расширением теории T_1.

* * *

После установления способов сравнения теорий можно установить интересующие нас классы теорий и определить отношение сложности для этих классов. Таких классов в рассмотренных способах сравнений теорий будет четыре:

а) класс всех дефинициально эквивалентных теорий *CDE*. Теории этого класса будут иметь различные структурные характеристики, а следовательно, и различную структурную сложность. Вместе с тем очевидно, что теории этого класса имеют одну и ту же содержательную сложность;

б) класс всех дефинициально сравнимых теорий *CDA*. Согласно определению этого класса, различные его объекты могут иметь различную и структурную и содержательную сложность;

в) класс всех дефинициально вложимых друг в друга теорий *CDS*;

г) класс всех теорий первого порядка *C*, для которых существует численная характеристика их структурной сложности. Это наиболее широкий класс.

Рассмотрим теперь различные виды сложности на этих классах теорий.

Класс *CDE* является наиболее узким и наиболее важным в научной практике. На этом классе объектов определены все разновидности рассматриваемых стандартов сложности: дескриптивная, содержательная и прагматическая сложность. Относительно предложенного метода измерения дескриптивной сложности справедлива схема аксиом, представленная П. Суппесом, за исключением аксиомы S4. Все объекты этого класса будут иметь (согласно определению) одно и то же значение содержательной сложности. Прагматическая сложность определена на каждом из объектов этого класса и на классе в целом. В каждой теории этого класса структурно менее сложная из двух эквивалентных формул будет и менее сложной в прагматическом смысле. Для класса же в целом прагматическая сложность и дескриптивная сложность будут находиться, как показано нами ранее [17], в обратно пропорциональном отношении, т.е. если T_2 есть консервативное расширение теории T_1, а j Î T_1 и y Î T_2 суть логически эквивалентные формулы, причем формула j не содержит терминов теории T_2, то согласно способу измерения дескриптивной сложности дедуктивного аппарата теории $v_d(T_1)$ £ $v_d(T_2)$, но v_p(j) £ v_p(y). Это соотношение основывается на доказательстве того факта, что если *P* есть определяемый термин и "*x* (*P*(*x*) Û j(*x*)), то $v_p(P)$ £ v_p(j), т.е. чем сложнее теория этого класса дескриптивно, тем проще утверждения этой теории в прагматическом смысле [18]. Это объясняет важность в научной практике дефинициальных определений. Отношение прагматической сложности на классе *CDE* задает линейный порядок.

Следует отметить также, что данный класс теорий не представляет интереса с точки зрения селекции по критерию простоты одной из альтернативных гипотез. Это тот самый случай, относительно которого Н. Гудмен предостерегает – «Ничего не может быть более ошибочным, чем стандартная идея о том, что мы сначала находим истинную систему, а затем, только ради элегантности, упрощаем ее» [19].

Класс всех дефинициально сравнимых теорий *CDA* интересен с точки зрения сравнения теорий по критерию простоты и последующего выбора простейшей из них. Остается открытым вопрос: каким образом сравнивать теории этого класса, для того чтобы выбрать простейшую в прагматическом плане (помним по случаю теорий о движении планет, что выбор теории лишь по критерию более простых терминов не гарантирует нам, что будет выбрана более простая)? Решением этой проблемы представляется сравнение сложности индуктивного аппарата этих теорий (здесь учитывается и сложность их терминов) в их сравнимой форме.

Согласно определению дефинициальной сравнимости теорий T_1 и T_2 имеем, что $T_1 \subseteq T_2 + D_{T_1}$ и $T_2 \subseteq T_1 + D_{T_2}$. На наш взгляд, следует выбирать простейшую из теорий $T_1 + D_{T_2}$ и $T_2 + D_{T_1}$.

Класс дефинициально вложимых друг в друга теорий *CDS*, так же как и класс *CDA*, интересен с точки зрения селекции теорий по критерию простоты. Согласно определению дефинициальной вложимости для произвольных теорий T_1 и T_2 этого класса теория T_1 дефинициально вложима в теорию T_2, если и только если существует система определений D_{T_1} терминов теории T_1 в терминах теории T_2, такая что $T_1 + D_{T_2}$ является консервативным расширением теории T_1. Ровно так же и T_2 дефинициально вложима в теорию T_1, если и только если существует система определений D_{T_1} терминов теории T_2 в терминах теории T_1, такая что $T_1 + D_{T_2}$ является консервативным расширением теории T_2.

Пусть T_1 дефинициально вложима в теорию T_2. Единственно ли такое вложение? Может оказаться, что существуют система определений D_1, такая что $T_2 + D_{T_1}$ есть консервативное расширение T_1, и система определений D_2, такая что $T_2 + D_2$ есть также консервативное расширение T_1. Возникает вопрос: какое вложение является «правильным»? Ответ Куайна: нет привилегированного перевода, привилегированного способа вложения. Но можно показать, что существуют способы перехода от одного вложения к другому.

Сформулируем это более точно. Пусть T_1 – некоторая теория и T_1* – ее переформулировка в других терминах, отличных от терминов теории T_1. Пусть $T_2 + D_1$ есть консервативное расширение T_1 и $T_2 + D_2$ есть консервативное расширение T_1*. Тогда $T_2 + D_2$ дефинициально эквивалентна $T_2 + D_1$. Ситуация аналогична ситуации с системами измерений. Можно измерять в футах, метрах, аршинах, но ни одна из систем сама по себе не имеет привилегированного положения. Однако мы можем переходить от одной системы к другой. То же самое имеет место относительно вложения одной теории в другую с помощью определений. В связи с обсуждаемой проблемой стоит отметить, что каждый раз следует пользоваться только одной системой определений, как и одной системой измерений. Существование различных систем определений, с помощью которых одна теория вкладывается в другую, не приводит ни к каким противоречиям.

Класс всех теорий первого порядка C, для которых существует численная характеристика их структурной сложности, – наиболее широкий. Однако сравнение объектов этого класса во многих случаях не будет для нас осмысленным, пока не определены синтаксические или содержательные критерии сравнения.

* * *

Рассмотрим теперь примеры приведенных выше классов теорий и определим отношение сложности на этих классах, а также рассмотрим на них соотношения различных видов сложности. Обозначим через $\mathrm{Simp}_d(x, y)$ отношение дескриптивной сложности, через $\mathrm{Simp}_c(x, y)$ – отношение содержательной сложности и через $\mathrm{Simp}_p(x, y)$ – отношение прагматической сложности. Для всех отношений указанных видов простоты справедлива схема аксиом, предложенная П. Суппесом, за исключением аксиомы S4, состоящей в требовании, согласно которому если $W_1 = W_2$ и $A_1 \subset A_2$, то $\mathrm{Simp}_d(T_2, T_1)$. Невыполнение аксиомы S4 обусловлено выбором числовых функций, характеризующих указанные разновидности сложности/простоты. С учетом всего вышесказанного соотношение этих видов простоты на указанных классах будет следующим.

Для класса *CDE* отношение дескриптивной сложности определим таким образом: $\mathrm{Simp}_d(T_1, T_2) \Leftrightarrow v_d(T_1) \le v(T_2)$. Поскольку этот класс является классом дефинициально эквивалентных теорий, постольку для произвольных T_1 и T_2 выполняется $v_c(T_1) = v_c(T_2)$. И наконец, $\mathrm{Simp}_p(T_1, T_2) \Leftrightarrow v_p(T_1) \le v_p(T_2)$. В соответствии с этими определениями на классе *CDE* будут справедливы следующие соотношения.

E1. Для произвольных теорий этого класса T_1 и T_2 отношения дескриптивной и содержательной сложности будут удовлетворять соотношению $\mathrm{Simp}_d(T_1, T_2) \Rightarrow \mathrm{Simp}_c(T_1, T_2) \,\&\, \mathrm{Simp}_c(T_2, T_1)$.

E2. Для произвольных теорий этого класса T_1 и T_2 отношения дескриптивной и прагматической сложности будут удовлетворять соотношению $\mathrm{Simp}_d(T_1, T_2) \Rightarrow \mathrm{Simp}_p(T_2, T_1)$.

Применительно к классу всех дефинициально сравнимых теорий *CDA* определения отношений сложности произвольной пары теорий в их сравнимом виде будут выглядеть следующим образом. Для отношения дескриптивной сложности – $\mathrm{Simp}_d(T_1, T_2) \Leftrightarrow v_d(T_1 + D_{T_2}) \le v_d(T_2 + D_{T_1})$.

Аналогично для отношений содержательной и прагматической сложности – $\mathrm{Simp}_c(T_1, T_2)$ Û $v_c(T_1 + D_{T_2}) \leq v_c(T_2 + D_{T_1})$ и $\mathrm{Simp}_p(T_1, T_2)$ Û $v_p(T_1 + D_{T_2}) \leq v_p(T_2 + D_{T_1})$. В этом случае будут справедливы следующие соотношения.

А1. Для произвольных теорий этого класса T_1 и T_2 справедливо будет соотношение $\mathrm{Simp}_c(T_1, T_2)$ Ú $\mathrm{Simp}_c(T_2, T_1)$.

А2. Для произвольных теорий этого класса T_1 и T_2 справедливо будет соотношение $\mathrm{Simp}_c(T_1, T_2)$ & $\mathrm{Simp}_d(T_1, T_2)$ Þ $\mathrm{Simp}_p(T_1, T_2)$.

Для класса дефинициально вложимых друг в друга теорий *CDE* определения отношений сложности выглядят аналогично. Пусть T_1 и T_2 – дефинициально вложимые друг в друга теории. Тогда отношения сложности для таких теорий определяются следующим образом: для дескриптивной сложности – $\mathrm{Simp}_d(T_1, T_2)$ Û $v_d(T_1 + D_{T_2})$ £ $v_d(T_2 + D_{T_1})$, для содержательной – $\mathrm{Simp}_c(T_1, T_2)$ Û $v_c(T_1 + D_{T_2})$ £ $v_c(T_2 + D_{T_1})$ и для прагматической – $\mathrm{Simp}_p(T_1, T_2)$ Û $v_p(T_1 + D_{T_2})$ £ $v_p(T_2 + D_{T_1})$.

На классе всех теорий первого порядка *C*, как уже было сказано выше, различные виды отношений сложности в общем случае не определены. Можно сравнивать лишь численные характеристики этих объектов, но в общем случае это сравнение не является информативным.

* * *

Резюмируя все вышесказанное, следует отметить, что нами предложен корректный способ сравнения конкурирующих между собой гипотез. В статье определены различные виды отношений сложности на классах сравнимых теорий. Показана важность выбора числовой функции, характеризующей сложность теорий и влияющей на отношение сложности на классах сравнимых объектов. Предложена числовая функция, характеризующая численное значение сложности, которая позволяет ответить на второй вопрос П. Суппеса: верно ли, что для всякой числовой характеристики сложности $v(x)$ если $v(T_1)$ £ $v(T_2)$, то и $\mathrm{Simp}(T_1, T_2)$? В рамках представленного подхода к определению отношения сложности такое следствие верно, а в общем случае – нет, так как уже было сказано, что если оценивать сложность теории через сложность теоретических терминов, то пример сравнения теорий, описывающих движения небесных тел в терминах круга или эллипса показывает, что численная характеристика теории с теоретическим термином «круг» меньше численной характеристики теории с теоретическим термином «эллипс», но отношение сложности обратное.

Примечания

1. См.: *Bunge M.* The myth of simplicity. – Englewood Cliffs, 1983.
2. См.: *Goodman N.* The test of simplicity // Sience. – 1958. – V. 128, No. 3331. – P. 1064–1069.
3. Ibid.
4. См.: *Harre R.* Simplicity as a criterion of induction // Philosophy. – 1959. – No. 34. – P. 229–234.
5. См.: *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. – М.: Прогресс, 1978. – С. 233.
6. См.: *Черепанов Е.М.* О сложности утверждений и содержательной сложности аксиоматической теории // Вычислительные системы. – 2004. – Вып. 173. – С. 152–166.
7. См.: *Мамчур Е.А., Овчинников Н.Ф., Уемов А.И.* Принцип простоты и меры сложности. – М., Наука, 1998. – С. 5–6.
8. См.: *Goodman N.* The test of simplicity.
9. См.: *Поппер К.* Логика и рост научного знания // Поппер К. Избранные работы. – М., 1983. – С. 179–191.
10. См.: *Goodman N.* The structure of appearance. – Harward University Press, 1961.
11. *Goodman N.* The test of simplicity.
12. См.: *Черепанов Е.М.* О сложности утверждений и содержательной сложности аксиоматической теории.
13. См.: *Черепанов Е.М.* Содержательность, информативность, простота // Философия науки. – 2006. – № 2 (29). – С. 52–64.
14. См.: *Suppes P.* Nelson Goodman on the concept of logical simplicity // The Journal of Philosophy. – 1955. – V. XII, No. 24.
15. См.: *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. – М.: Наука, 1987.
16. См.: *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. – М., 1958. – С. 43
17. См.: *Черепанов Е.М.* Содержательность, информативность, простота.
18. Там же.
19. *Goodman N.* The test of simplicity.

Институт математики СО РАН,
г. Новосибирск.

***Cherepanov, E.M.* Simplicity as a relation in classes of objects**

The paper defines classes of comparable theories and main kinds of simplicity/complexity relations in these classes. Some characteristics of such relations in given classes are considered. Influence of the choice of numerical measure of theory complexity on complexity relation in the class of theories of comparable complexity is shown.

Keywords: logic, theory, simplicity, classes of objects