МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ И ПРАВА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ И ПРАВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

О. А. Доманов

Онтология и феноменология Алена Бадью

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ И ПРАВА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ И ПРАВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

О. А. Доманов

Онтология и феноменология Алена Бадью

Учебное пособие

Новосибирск
2019

УДК 1(091)(101)
ББК 87.3
Д66

*Пособие издано по решению
Ученого совета ИФПР СО РАН и Ученого совета ИФП НГУ*

Рецензент:
д-р филос. наук, профессор Е. В. Борисов

Д66 **Онтология и феноменология Алена Бадью** / О. А. Доманов— Новосибирск: Офсет ТМ, 2019. — x, 194 с.

ISBN 978-5-85957-158-1

Учебное пособие знакомит с онтологией и феноменологией современного французского философа Алена Бадью. Рассматриваются основные понятия и теории, представленные в трактатах «Бытие и событие» и «Логики миров». Особый акцент сделан на использовании математики в философии Бадью, а также месте его концепции в широком математическом и философском контексте.

Пособие предназначено для студентов старших курсов высших учебных заведений, а также для всех, интересующихся современной онтологией, историей и текущим развитием французской философии.

Оглавление

Введение **vi**

Часть I Онтология

1. Первый тезис Бадью: математика как онтология **2**

Дополнительная литература 9

2. Второй тезис Бадью: теория множеств как онтология **10**

§ 2.1 «Единое не есть» 10
§ 2.2 Онтология как ситуация 12
§ 2.3 Предмет онтологии — неконсистентное многое 16
§ 2.4 Алгебраические системы и формальные языки 19
§ 2.5 Теория множеств в онтологии Бадью 22
§ 2.6 Парадоксы 24
Дополнительная литература 29

3. Онтология Бадью в контексте **30**

§ 3.1 Множества и классы 30
§ 3.2 Единое и многое как трансценденталии 32
§ 3.3 Счёт-за-одно: от «Парменида» к теориям множеств 38
  Чистое множество 39
  Онтология бесконечно делимых. Мереология 41
  Онтология неделимых 46
§ 3.4 Операции над классами 50
  Традиционное представление теории классов 52

§ 3.5 Классы как элементы 56
§ 3.6 Основные сведения из теории категорий 62
Примеры категорий 65
§ 3.7 Алгебраическая теория множеств 68
§ 3.8 От мереологии к теории множеств 71
Реестр онтологий и понятий счёта и неконсистентности 75
§ 3.9 Выводы об онтологии Бадью 80
Дополнительная литература 82

Часть II Субъект и событие

4. Теория субъекта **84**

§ 4.1 Форсинг и генерическое множество в первоначальном подходе Бадью 84
§ 4.2 Интерпретации форсинга 93
Семантика Крипке 93
Математика гейтинговых алгебр 96
Примеры гейтинговых и булевых алгебр 98
Введение в топологию 100
Семантика Крипке: продолжение 104
Расширение до языка первого порядка 106
Модель Крипке для «Бытия и события» 107
Гейтингозначные модели 111
Дополнительная литература 119

5. Теория события **121**

§ 5.1 Понятие события 122
§ 5.2 Нефундированные множества 125
§ 5.3 Событие как основание 131
Дополнительная литература 133

Часть III Феноменология

6. Общая характеристика феноменологии Бадью **135**

§ 6.1 Трансценденталь 137
§ 6.2 Теория объекта 140
Дополнительная литература 143

7. Математика феноменологии Бадью **144**

§ 7.1 Объект как Ω-множество 144

§ 7.2 Объект как пучок 146
Общее определение пучка 147
Расслоения 148
Примеры пучков 154
§ 7.3 Связь всех подходов 157
От гейтингозначных моделей к теории объекта 159
Связь пучков с Ω-множествами 161
Примеры объектов 166
Модели Крипке на языке теории пучков 168
Пучок для первоначального подхода Бадью 169
Дополнительная литература 170

8. Обновлённая теория субъекта **171**

§ 8.1 Теория изменений 171
§ 8.2 Математика изменения 173
§ 8.3 Точки 175
§ 8.4 Тело 179
§ 8.5 Пучки и топология 181
§ 8.6 Топологическая интерпретация теории изменений Бадью . . 184
Дополнительная литература 186

A. Используемые обозначения **187**

B. Таблица соответствия терминов Бадью математическим терминам **188**

Список литературы **189**

Введение

> Вполне естественно и
> благоразумно, что философы
> пытаются использовать
> некоторые методы,
> оправдавшие себя в научной
> области.
>
> Анри Лебег

Настоящее учебное пособие посвящено онтологии и феноменологии современного французского философа Алена Бадью. Философия Бадью существенным образом опирается на математику, поэтому значительную часть пособия занимает описание используемых им математических понятий и теорий, а также их связей с другими теориями, способствующих прояснению оснований и контекста философии Бадью. Использование им математики своеобразно. В определённом смысле, Бадью изобретает новый жанр философских текстов, в котором математика не столько используется, сколько, по его собственному замечанию, цитируется и интерпретируется. По этой причине эти тексты не следует относить ни к математике, ни к философии математики, хотя многие темы последней в них, несомненно, затрагиваются. Скорее, речь идёт об обнаружении и описании сходной структуры некоторых математических конструкций и определённой предметной области: в случае Бадью — понятий интуиционистской и конструктивистской математики и некоторых характеристик субъективности. Основной задачей пособия является демонстрация того, каким образом это происходит и к каким результатам приводит с точки зрения как самой философии Бадью, так и более широкого философского и математического контекста.

Математическое содержание философии Бадью концентрируется в двух томах его трактата «Бытие и событие»[1]. Важнейшей частью этой философии является теория субъекта, опирающаяся сначала на интерпретацию математического метода форсинга или вынуждения, а затем — на теорию топосов и пучков. В «Бытии и событии» субъект это тот, кто, решая, признаёт событие и реализует его следствия, несмотря на отсутствие эпистемологических оснований для своего решения. Субъективная процедура изменяет ситуацию, и Бадью в одном из интервью признаётся: «моим единственным философским вопросом является следующий: можем ли мы мыслить нечто новое именно в ситуации — не вне ситуации, и не где-либо ещё; можем ли мы продумать это новое и иметь с ним дело внутри ситуации?»[2]. В первом томе «Бытия и события» инструментом этого понимания служит метод форсинга, широко используемый в математике при работе с теоретико-множественными моделями. У Бадью форсинг задаёт форму субъективной процедуры. При этом всё рассмотрение происходит в рамках теории множеств, которая для него служит языком онтологии. Однако в «Логиках миров» — втором томе трактата, имеющем также подзаголовок «Бытие и событие, 2» — не только существенно изменяется математический аппарат, но и исчезает само понятие форсинга, а ключевой для Бадью термин «генерический» хотя и остаётся, но не играет уже центральной роли. При этом он сам признаёт[3], что связь новых понятий с понятием генерической процедуры имеется, но она неясна и требует отдельной проработки. Этот переход будет одной из наших основных тем.

Прежде чем мы перейдём к анализу математических теорий, на которые опирается онтология и феноменология Бадью, нужно сделать пояснения о способе использования в этом анализе математики. Конструкции, которые будут нами обсуждаться, не всегда просты, однако текст пособия не потребует, как я надеюсь, от читателя чрезмерной математической подготовки. Он ориентирован на нематематиков, то есть людей, желающих разобраться с философией Бадью, но не имеющих навыка работы со сложными математическими понятиями и конструкциями. Для чтения потребуется лишь знание основ теории множеств и логики первого порядка, например, в объёме, данном Бадью в «Бытии и событии», и готовность разбираться с порой довольно запутанными построениями. Хотя без этой сложности обойтись не удастся, моей основной целью является прояснение основных идей, стоящих за ней. Фокусом нашего непосредственного интереса будут структуры, что означает, что я буду опускать бóльшую часть доказательств, ссылаясь на соответствующие математические тексты, но буду подробно описывать, разбирать и интерпретировать детали

---

[1] *Badiou A.* L’être et l’événement. P. : Seuil, 1988. 560 p. (Collection « L’Ordre philosophique ») ; *Badiou A.* Logiques des mondes : L’être et l’événement, 2. P. : Seuil, 2006. 638 p. (Collection « L’Ordre philosophique »).

[2] *Bosteels B.* Can Change Be Thought?A Dialogue with Alain Badiou // Alain Badiou : philosophy and its conditions. Albany : SUNY Press, 2005. Pp. 252–253.

[3] *Badiou A.* Logiques des mondes. P. 48-49.

построения тех или иных понятий. При этом многие темы по необходимости останутся за рамками книги. В частности, я буду опускать некоторые детали, связанные с возможностью или невозможностью тех или иных построений в рамках моделей или за их пределами. Мы будем предполагать, что всё необходимое возможно — если не указано обратное — внутри рассматриваемых моделей, т. е. для «жителей» соответствующих «вселенных». В целом, следующий ниже текст не является в полном смысле слова математическим текстом или учебником по математике и ни в коем случае не претендует на это. Мы не будем «заниматься математикой» в смысле построения понятий, доказывания теорем, изобретения конструкций и т. д. Все математические результаты, которые нам понадобятся, уже получены, причём иногда очень давно. Поэтому чаще всего нам достаточно лишь сослаться на эти результаты в случае необходимости. Нашей задачей и предметом будет способ интерпретации этих результатов, метод их использования в онтологии, теории субъекта, феноменологии. Нас интересуют прежде всего конструкции — то, каким образом строятся и соотносятся друг с другом различные понятия, относящиеся к множествам, категориям, алгебрам и т. д. Как правило, я буду опускать подробности, которые могут быть существенны с точки зрения математической теории, но менее существенны для лучшего понимания онтологических деталей.

В том, что касается математики, основным языком книги служит алгебра и теория категорий. Причин для этого две. Во-первых, этот язык удобен для структуралистских по существу теорий самого Бадью. Во-вторых, сам Бадью в конечном итоге переходит на категорный язык во втором томе «Бытия и события». Тем не менее, пригодность именно этого языка для онтологических исследований остаётся под вопросом. Быть может, следует перейти к теории типов или чему-то иному? Подобные вопросы в основном остаются за рамками пособия.

* * *

В заключении введения следует сделать несколько терминологических замечаний. Язык Бадью не сложен для перевода. Его терминология большей частью имеет прямые эквиваленты в русском языке, в частности в русском математическом языке. Однако есть несколько моментов, которые требуют комментария.

Бадью подходит к построению онтологии, начиная с рассмотрения древней проблемы единого и многого. Он использует термины *l'un* для первого и *le multiple* для второго. Их непросто перевести. *Un* может означать «один», «единый», «неделимый», «единица», «единственный», «одно (целое)», а кроме того, является неопределённым артиклем и числом «один». Большинство из этих значений Бадью так или иначе имеет в виду. В контексте обсуждения античной философии удобнее говорить «единое», в контексте арифметики — «одно», в переводе термина «compte-pour-un» — «счёт-за-одно» или «принятие-за-единое». Вероятно, полностью подходящего русского эквивалента не существует.

Я буду передавать *l'un* как «единое», «одно» или «единица», в зависимости от контекста. Что же касается «многого», то Бадью использует термины *le multiple* и *la multiplicité* для множества в общем смысле. Я буду переводить их как, соответственно, «многое» и «множественность», оставив слово «множество» для перевода более точного и специфического термина *l'ensemble*, как это принято в теории множеств — *la théorie des ensembles* (нужно заметить, однако, что в словаре терминов, который Бадью составляет для «Бытия и события», *le multiple* и *la multiplicité* не различаются[1]). Я не буду пользоваться термином «многообразие», который можно встретить в математических текстах (например, *la multiplicité vectorielle* — векторное многообразие).

Ещё один термин, который встречается с самого начала, и который также трудно перевести, это глагол *(se) présenter*. Он может переводиться как «представлять(ся)», «предъявлять(ся)», «показывать(ся)», «являть(ся)», «выражать(ся)» и пр. Естественное желание — перевести его как «представлять(ся)», а соответствующее существительное *la présentation* — как «представление». Однако Бадью использует также термины *représenter/représentation*, которые являются лучшими кандидатами на этот перевод. Дело осложняется тем, что второй том «Бытия и события» посвящен преимущественно феноменологии или теории явления, которое называется здесь *l'apparaître* или *l'être-là* (бытие-здесь). Всё же, я буду переводить *(se) présenter/présentation* как «представлять(ся)/представление», а représenter/représentation — как «репрезентировать/репрезентация», теряя тем самым единый корень.

Ещё один важный термин — *inconsistant*. Бадью заимствует его у Кантора (нем., *inkonsistent* — противоречивый, несогласованный), который использует его для обозначения специфических множеств, приводящих к парадоксам. Однако смысл, придаваемый ему Бадью, отличается от канторовского, а также не сводится к простой противоречивости. По этой причине я перевожу его как «неконсистентный».

* * *

Пособие разделено на три части. Первая посвящена онтологии Бадью, как она представлена в первом томе «Бытия и события». Это онтология многого, опирающаяся на теорию множеств Цермело—Френкеля. Вторая описывает теорию субъекта Бадью. Её основными категориями являются событие и генерическое множество. Наконец, третья посвящена феноменологии или теории объекта Бадью, развиваемой им в «Логиках миров», втором томе «Бытия и события». Требуемые математические понятия вводятся по мере необходимости.

---

[1] *Badiou A.* L'être et l'événement. P. 550.

Часть I

Онтология

1

Первый тезис Бадью: математика как онтология

В построении онтологии Бадью опирается на два основных тезиса: 1) «математика и есть онтология» (mathématiques = ontologie), 2) «единого нет» или «единое не есть» (l'Un n'est pas). В этой главе мы рассмотрим первый из них, а в следующей — второй. Изложение в первой части будет опираться, в основном, на первый том «Бытия и события»[2], поэтому ссылки на него будут даваться просто в виде страниц в скобках.

В качестве своих предшественников Бадью называет три ориентации мысли (8):

- Вместе с Хайдеггером мы будем утверждать, что именно на пути онтологии происходит перестройка философии как таковой.
- Вместе с аналитической философией мы будем полагать, что математико-логическая революция Фреге—Кантора определяет для мышления новые ориентации.
- Наконец, мы согласны, что никакой концептуальный аппарат не может считаться приемлемым, если он не совпадает с теоретико-практическими ориентациями современной доктрины субъекта, которая сама находится внутри практических (клинических или политических) процессов.

Эти ориентации — на иной взгляд, противоречащие друг другу, — обозначают завершение нескольких эпох, которые мы, согласно Бадью, в настоящее время переживаем (9):

1. Мы являемся современниками *третьей эпохи* науки, после греческой и галилеевской. Видимая цезура, открывающая эту третью эпоху, не

---

[2] *Badiou A.* L'être et l'événement. P. : Seuil, 1988. 560 p. (Collection « L'Ordre philosophique »).

состоит ни (как для греков) в изобретении — посредством доказательной математики — ни (как для галилеевской науки) в разрыве, который математизирует дискурс физики. Это перестройка, изменяющая как природу математического фундамента рациональности, так и характер решения мышления, которое его учреждает.

2. Мы также являемся современниками *второй эпохи* доктрины Субъекта, который не является более субъектом основания, центрированным и рефлексивным — тема, продолжающаяся от Декарта до Гегеля и всё ещё различимая вплоть до Маркса и Фрейда (и даже Гуссерля и Сартра). Современный Субъект пуст, расколот, а-субстанциален, иррефлексивен. Он лишь предполагается в особых процессах со строгими условиями.
3. Наконец, мы — современники *начала* того, что касается доктрины истины, после того, как она потеряла свою органическую связь со знанием. Мы понимаем задним числом, что до сих пор безраздельно царило то, что я буду называть достоверностью (la véridicité), и что, как бы странно это не могло выглядеть, следует сказать, что истина является словом для Европы (и других мест) новым. Эта тема истины, впрочем, пересекается с Хайдеггером (кто первым отделил её от знания), с математикой (которая порвала в конце прошлого века с объектом, также как и с понятием адекватности) и с современными теориями субъекта (которые сместили центр истины прочь от субъективного высказывания).

Синтез этих трёх движений и трёх эпох, который предлагает Бадью, опирается, во-первых, на признание математики онтологией и, во-вторых, на отказ онтологии выступать центром философии как таковой. Первое означает: «наука сущего-поскольку-оно-сущее (l'être-en-tant-qu'être) *существует* со времён греков, поскольку таков статус и смысл математики. Но только сегодня мы обладаем средствами это *знать*» (9). Второе же признаёт, что другим важнейшим компонентом философии, помимо онтологии, является теория субъекта. Западное мышление, математика, психоанализ, а также искусство и политика составляют условия философии, но не совпадают с ней. Философия предоставляет «концептуальную рамку», обеспечивающую их сосуществование, причём делает это, указывая на онтологию в форме математики как на одно из своих условий. В этом, в конечном итоге, Бадью видит свою задачу в «Бытии и событии»: предоставить категории, которые могут быть использованы — практически, как он подчёркивает, — в процедурах науки, анализа и политики (10).

Таким образом, будучи одной из ключевых дисциплин философии, онтология не совпадает с ней. Отвечая тем, кто считает теорию множеств законченной наукой, в которой уже нечего делать, кроме как изощряться до бесконечности, жонглирую малоинтересными проблемами (18), кто призывает философов становиться математиками, чтобы не быть всегда позади действительного математического знания, Бадью говорит: требование становиться математиками было бы обоснованным, если бы философия сводилась к онтологии. Но «философия с самого начала отделена от онтологии» (20). Поэтому цель «Бытия и события» — не онтологический трактат, поскольку такой трактат должен был бы быть математическим, а обоснование тезиса о том, что история математики есть история дискурса о сущем-поскольку-оно-сущее. Математика здесь *цитируется* с целью продемонстрировать её онтологическую сущность (25).

Математика, таким образом, играет ключевую роль в этом предприятии, хотя последнее ей и не ограничивается. Но философия Бадью это не философия математики, а, скорее, математическая философия, если под последней понимать использование математических методов в философии. Это, как формулирует Франсуа Ларюэль[1], попытка «переобучить» философию с помощью математики. Для Бадью это означает, прежде всего, использование математики для формализации теории субъекта, использование математических структур для построения философской теории. Речь при этом не идёт об уравнениях, логике или пресловутой математической точности, а скорее о строгости в смысле гуссерлевской «Строгой науки» (хотя отличие от Гуссерля здесь существенно). С этой точки зрения, математика это наука о структурах, и именно это позволяет понять её как онтологию, т. е. как описание способов бытия, а не того, что есть, т. е. сущего. Эта структуралистская тенденция становится, как мы увидим, особенно явной при переходе к теории категорий. «Бытие и событие» начинается с тезиса о тождестве математики и онтологии: математика описывает не что иное, как способы бытия сущего или «сущее, поскольку оно сущее». Так понятая, математика содержит огромное количество конструкций, порой очень сложных, описывающих способы бытия и способных оказаться полезными в теории и онтологии субъекта. В этом состоит убеждение, стоящее за «Бытием и событием»: понятие субъекта достаточно сложно для того, чтобы для его определения и описания начать использовать такие понятия как форсинг, топос, пучок и т. д. Математика используется Бадью как язык, позволяющий точно описать структуры, которые его интересуют. Сама возможность такого описания возникает в истории не одномоментно, а по мере переосмысления математикой собственных оснований, начиная с конца 19 века. Как мы увидим, имеется глубокое родство между теориями субъекта и объекта Бадью и интуиционистской и, шире, конструктивистской математикой. Вовсе не случайно Бадью, с одной стороны, переходит в конечном итоге к теории топосов, а основатель интуиционизма Брауэр, с другой, обращается к субъективности.

Если мы хотим говорить строго, то так или иначе приходим к математике, и если предмет, о котором мы говорим, сложен (а в случае Бадью речь идёт, прежде всего, о теории субъекта), то её средства экспликации могут оказаться неоценимыми. С точки зрения Бадью, подобная работа относится к области онтологии, и сам по себе такой подход совсем не нов. Гуссерль прямо называет

---

[1] *Laruelle F.* Anti-Badiou : Sur l’introduction du maoisme dans la philosophie. Paris : Kime, 2011.

математику формальной онтологией, а истоки идеи можно проследить вплоть до Лейбница и далее до Плотина[1]. Это, в частности, означает, что хотя Бадью опирается в своих построениях прежде всего на теорию множеств, его тезис о математике как онтологии не зависит от этой теории. По этой причине, когда Бадью переходит от теоретико-множественного языка к теоретико-категорному, ему нет необходимости отказываться от тезиса о математике как онтологии. Напротив, привязка к теории множеств, скорее, создаёт проблемы и порождает неясности. Тем не менее, он начинает с теории множеств, и мы в первых главах рассмотрим, насколько эти его намерения онтологически обоснованы.

Бадью определяет онтологию вслед за Аристотелем как учение о сущем, поскольку оно сущее, или о том, что представляет собой, какими свойствами обладает всякое сущее уже потому, что оно — сущее. Онтология есть наука «всего того, что есть, *поскольку оно есть*» (13). Математика оказывается именно таким учением. Математические сущности, такие как число или треугольник, являются не объектами-сущими, а способами бытия объектов — математика описывает не столько числа или треугольники, сколько то, что означает быть числом или треугольником. При этом у тезиса Бадью о тождестве математики и онтологии можно выделить узкий и широкий смысл. В узком смысле математика совпадает с онтологией, поскольку фундаментальной формой сущего является многое, а именно математика имеет в своём арсенале наиболее строгую теорию множества. Быть означает, прежде всего, быть многим или во множестве. Фундаментальность множества проявляется и в самой математике:

> каково бы ни было колоссальное разнообразие «объектов» и «структур» математики, они все могут быть описаны как чистые множественности, построенные определённым способом из одного только пустого множества. Вопрос точной природы отношения математики к сущему, следовательно, полностью сосредоточен — *для эпохи, в которой мы находимся* (курсив мой—ОД), — на аксиоматическом решении, делающем возможной теорию множеств. (12)

С точки зрения современной математики этот тезис, как минимум, спорен. Свéдение математики к теории множеств сталкивается с трудностями, не последней из которых является многообразие теорий множеств. Даже если математические объекты могут быть закодированы теоретико-множественными конструкциями (что само по себе трудно проверяемо для *всех* объектов), то означает ли это, что они тем самым «сводятся» к множествам? Бенасерраф в своей знаменитой статье[2] указывает на проблемы подобного кодирования математических понятий множествами. Действительно, существуют, например, два

---

[1] См. подробнее: *Черняков А. Г.* Онтология как математика: Гуссерль, Бадью, Плотин // Сущность и слово : Сб. науч. ст. к юбилею проф. Н. В. Мотрошиловой. М. : Феноменология-герменевтика, 2009. С. 420—441.

[2] *Benacerraf P.* What Numbers Could Not be // The Philosophical Review. 1965. Jan. Vol. 74, no. 1. Pp. 47–73.

часто используемых способа представления натуральных чисел множествами. В одном из них, принадлежащем фон Нейману, числа предстают как последовательность, начинающаяся с пустого множества, в которой каждый следующий член является множеством всех предыдущих:

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots$$

В другом каждое следующее число имеет единственным элементом предыдущее:

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$$

Та и другая последовательность прекрасно справляются с представлением натуральных чисел в том смысле, что позволяют продемонстрировать истинность аксиом Пеано, определить операции на числах, понятие кардинального числа и т. д. Есть, однако, проблема. Какое из этих представлений корректно? Какими множествами *на самом деле* являются числа? Мы можем, например, спросить: принадлежит ли число 3 числу 17? Согласно первому представлению — да, согласно второму — нет. Если числа являются определёнными объектами, то подобные вопросы должны иметь определённые ответы. Мы их, однако, не имеем.

Кроме того, при кодировании чисел множествами они получают свойства, изначально им не присущие. Например, становится осмысленно спрашивать о принадлежности друг другу таких объектов как число π и корень из минус единицы. Бенасерраф, однако, приходит к выводу, что подобные вопросы некорректны. Числа вообще не могут быть объектами. Они являются абстрактными структурами, системой отношений, в которых могут находиться самые разные объекты:

> *Быть* числом 3 значит не более и не менее, чем идти после чисел 2, 1 и, возможно, 0 и перед числами 4, 5 и так далее. А *быть* числом 4 значит не более и не менее, чем идти после чисел 3, 2, 1 и, возможно, 0 и перед… *Любой* объект может *играть роль* числа 3; то есть любой объект может быть третьим элементом некоторой последовательности.[1]

С этой точки зрения число задаётся как множество объектов, удовлетворяющих некоторым аксиомам, без дальнейшей конкретизации природы этих объектов. Чаще всего, в качестве списка таких аксиом выступает аксиоматика Пеано. Она требует два основных понятия — первое число (обычно, единица) и функция $S(n)$, значением которой является число, следующее за n. Тогда аксиомы выглядят следующим образом:

P1 1 — натуральное число;

---

[1] *Benacerraf P.* What Numbers Could Not be. P. 70.

P2 если n — натуральное число, то $S(n)$ — также натуральное число;
P3 1 не является следующим ни для какого натурального числа;
P4 если $S(i) = n$ и $S(j) = n$, то $i = j$;
P5 аксиома индукции.

С точки зрения онтологии, как и замечает Бенасерраф, аксиомы описывают, что означает *быть* натуральным числом. В частности, ничто не может быть числом «в одиночку». Натуральные числа всегда существуют как множество, причём бесконечное. Эта, восходящая к Гильберту, идея представления математических объектов как структур положила начало структуралистскому направлению в понимании сущности математики, в частности, к появлению структурных теорий множеств. В последних числа обладают в точности теми свойствами, которые требуются для арифметики, то есть для выполнения аксиом Пеано. Хотя множеств натуральных чисел в такой теории может быть много, все они изоморфны и, главное, обладают одними и теми же свойствами[1]. Обращаясь во втором томе «Бытия и события» к топосам, Бадью явным образом переходит к подобного рода теориям, делая ещё более понятной структуралистскую тенденцию своей онтологии (хотя, нужно заметить, о топосах он упоминает уже в первом томе (17)).

Таким образом, помимо узкого смысла сведения онтологии к теории множеств, тезис о тождестве онтологии и математики имеет и широкий смысл. Решение опираться на теорию множеств характерно для определённого времени, и, если выделенное мной замечание Бадью («для эпохи, в которой мы находимся») верно, то в нашу эпоху, спустя тридцать лет, это решение может быть иным. В частности, оно может зависеть от нашего представления о математике и о том, что именно мы полагаем её основанием в смысле базовых структур. Если таковыми считаются, например, категории или типы, то онтологические решения Бадью, касающиеся многого, могут быть заменены иными. Бадью полностью отдаёт себе в этом отчёт. Немного позже, говоря о теории множеств, он поясняет:

> Попробуем рассеять недопонимание. Я ни в коей мере не хочу сказать, что области математики, которые я упомянул, являются наиболее «интересными» или наиболее значимыми для современного состояния математики. Что онтология следует своим путём далеко от них, это очевидно. Я не говорю также, что эти области служат фундаментом математического дискурса, даже если обычно их помещают в начало всякого систематического трактата. Начинать не значит фундировать. Моя проблема, как я сказал, не в том, чтобы фундировать, поскольку это означало бы углубиться во внутреннюю архитектуру онтологии, тогда как мой предмет состоит в том, чтобы очертить место. Я утверждаю, однако, что эти области исторически являются

---

[1] См. подробнее *McLarty C.* Numbers Can be Just What They Have to // Noûs. 1993. Vol. 27, no. 4. Pp. 487–498. DOI: `10.2307/2215789`. JSTOR: `2215789`.

> *симптомами*, интерпретация которых подтверждает, что математика становится уверена в своей истине лишь постольку, поскольку она организует то, что возможно записать о сущем-поскольку-оно-сущее. (21)

Тождество математики и онтологии широком смысле не зависит от теории множеств и связано, скорее, с идеей формальной онтологии. С этой точки зрения математика не имеет своего предмета, она описывает не объекты, а то, что значит быть тем или иным объектом. Такого рода формальная онтология, в частности, решает проблему природы математических объектов:

> *нет никаких* математических объектов. Математика, в строгом смысле слова, *не представляет ничего*, не будучи, тем не менее, пустой игрой, поскольку не имея ничего для представления помимо самого представления, т. е. Многого, и не сводясь тем самым никогда к форме об-екта, она является условием всякого дискурса о сущем, *поскольку оно сущее*. (13)

Тем не менее, несмотря на широкий смысл тезиса, в этой цитате явно выражено убеждение Бадью в том, что именно множество является базисом математики и, следовательно, онтологии. В другом месте он также говорит: «Всё, что мы знаем и когда либо можем узнать о сущем-поскольку-оно-сущее, располагается, *благодаря посредству теории чистого множества* (курсив мой—ОД), в дискурсивной историчности математики» (15). Эта неопределённость характерна для «Бытия и события», и нам следует её учитывать. Как мы увидим ниже, теоретико-множественное представление онтологии, предлагаемое Бадью, проблематично. Однако тезис о тождестве онтологии и математики идёт гораздо дальше и не зависит от обращения к теории множеств. Математика является универсальной наукой, описывающей бытие сущего вне зависимости от природы этого самого сущего:

> Тезис, который я отстаиваю, ни в коей мере не утверждает, что сущее математично, то есть составлено из математических объективностей. Это тезис не о мире, а о дискурсе. Он утверждает, что математика во всём её историческом развитии высказывает то, что может быть выражено о сущем-поскольку-оно-сущее. Далёкая от того, чтобы сводиться к тавтологиям (сущее есть то, что оно есть) или к мистериям (вечного приближения, всегда отличного от Присутствия), онтология это богатая наука, сложная, незаконченная, подчинённая жёсткому ограничению верности (в данном случае, верности дедуктивной), так, что оказывается, что только организуя дискурс о том, что избегает всякого представления, мы можем поставить перед собой некую бесконечную и строгую задачу. (14)

Мы видим здесь гуссерлевский мотив из «Начала геометрии» и «Кризиса европейских наук». Онтология, понятая как математика, это *доказательная* дисциплина. Доказательство как её характеристическое свойство противостоит поэтичности хайдеггеровской онтологии (16–17). Последняя это онтология открытости, дара, близости. Бадью противопоставляет ей бытие как исключённое не только из репрезентации, но и из всякого представления. Сущее, поскольку оно сущее, это не то, что может быть достигнуто, оно может быть лишь дедуктивно[1] выведено. Онтологию следует искать скорее у Кантора, Гёделя или Коэна, чем у Гёльдерлина, Тракля или Селана. Она родилась в Греции, но не в поэтических и полупоэтических текстах первых философов, а в математических текстах, вместе с дедуктивной математикой, имеющей форму обязывающего дискурса.

В итоге, тезис о математике как онтологии имеет узкий и широкий смысл. В широком смысле это тезис структуралистский, сближающий математику и онтологию на том основании, что обе они занимаются прежде всего структурами, понятыми как способ бытия, как «то, что означает быть». В узком смысле математика является онтологией, поскольку в той и другой предельной структурой сущего оказывается многое. Перейдём к анализу этого последнего тезиса.

Дополнительная литература

Гуссерль Э. Кризис европейских наук и феноменология / пер. с нем. В. И. Молчанова // Избранные работы. М. : Территория будущего, 2005. С. 443—459.

Черняков А. Г. Онтология как математика: Гуссерль, Бадью, Плотин // Сущность и слово : Сб. науч. ст. к юбилею проф. Н. В. Мотрошиловой / Отв. ред.: М. А. Солопова, М. Ф. Быкова. М. : Феноменология-герменевтика, 2009. С. 420—441. URL: `http://srph.1gb.ru/text`.

Benacerraf P. What Numbers Could Not be // The Philosophical Review. 1965. Jan. Vol. 74, no. 1. Pp. 47–73.

---

[1] Нужно понимать, что дедукция у Бадью является одним из видов верности, см. § 4.1.

2

Второй тезис Бадью: теория множеств как онтология

§ 2.1. «Единое не есть»

Второй основной тезис Бадью формулируется следующим образом: «Единое не есть». В этой главе мы рассмотрим, что это означает для него самого, а в последующих поместим это тезис в более широкий философский и математический контекст.

Бадью начинает с двух традиционных утверждений, одно из которых принадлежит Лейбницу: «То, что *представлено*, есть существенным образом многое; *то*, что представлено, есть существенным образом единое (Ce qui se *présente* est essentiellement multiple ; *ce* qui se présente est essentiellement un)» и «То, что не есть *единое* сущее, не есть (какое-либо) *сущее* (Ce qui n'est pas *un* être n'est pas un *être*)»[2]. После этого он воспроизводит рассуждение из платоновского «Парменида»:

> если сущее это единое, то нужно далее положить, что то, что не есть единое — то есть многое — не есть. Что приводит мысль к противоречию, поскольку то, что представлено, есть многое, и мы не видим, каким образом можно получить доступ к сущему помимо всякого представления. Если представление не есть, то имеет ли ещё смысл обозначать как сущее то, что представляет(ся)? И наоборот, если представление есть, то и многое должно быть, откуда следует, что сущее более не взаимозаменимо с единым, и что последнее не требуется, чтобы удержать за единое то, что представляется, поскольку оно есть. Что ведёт мысль к противоречию, так как представление есть это многое, лишь поскольку то, что оно представляет, поддаётся счёту за единицу. И так далее. (31)

---

[2] «...ce qui n'est pas véritablement *un* être n'est pas non plus véritablement un *être*» *Leibniz G. W.* Discours de métaphysique et correspondance avec Arnauld. P. : J. Vrin, 1993. P. 165.

Решение, которое в ситуации этого тупика следует, согласно Бадью, принять, состоит в следующем: единое *не есть* (l'un *n'est pas*). Радикальность этого шага мы оценим, если вспомним, что единое относится к трансценденталиям. Единое взаимозаменяемо с сущим, как утверждает уже Аристотель. Бадью, следовательно, ставит на место трансценденталии многое вместо единого. Он не единственный, кто предпринимает такой шаг, и мы рассмотрим этот сюжет ниже (§ 3.2), теперь же продолжим разбираться с рассуждением Бадью.

Тезис «единого нет» означает, что единое существует лишь как *операция*: нет единого, есть лишь принятие-за-единое или счёт-за-одно (il n'y a pas d'un, il n'y a que le compte-pour-un) (32). Будучи операцией, единое никогда не совпадает с представлением. При этом, строго говоря, сущее не есть также и многое, поскольку оно может быть многим, лишь когда представлено (advient à la présentation (32)). Бадью подводит итог:

> В целом: многое есть режим представления; по отношению к представлению единое есть результат операции; сущее есть то, что представляет (себя), не будучи поэтому ни единым (поскольку только само представление относится к счёту-за-одно), ни многим (поскольку многое есть *только* режим представления). (32)

Таким образом, сущее представлено в форме многого, но прежде представления мы не можем сказать о сущем ни то, что оно многое, ни то, что оно единое.

Ситуацией Бадью называет всякую представленную множественность (32). Всякая ситуация обладает своим собственным оператором счёта-за-одно. *Структура* есть то, что для данной представленной множественности предписывает режим счёта-за-одно (32). Ситуация, таким образом, есть структурированное представление (558). Кроме того, как мы увидим, ситуация это консистентная множественность, то есть, множественность, всегда уже посчитанная за единое (557). При этом: «Когда в ситуации что бы то ни было посчитано как единое, это означает только его принадлежность ситуации способом, относящимся к эффектам структуры» (32). Таким образом, всякая ситуация структурирована, то есть оказывается результатом. Единое мы всегда уже застаём, многое же лишь предполагается как «предшествующее» единому, как область действия операции:

> Тот факт, что единое есть операция, позволяет нам говорить, что область действия операции не есть единое (так как единое *не есть*), и что, следовательно, она есть многое, поскольку *в представлении* то, что не есть единое, необходимо есть многое. Счёт-за-одно (структура) устанавливает вездесущность пары единое/многое для всякой ситуации. (32)

И далее: «То, что будет посчитано за единое, поскольку оно таковым не было, оказывается многим» (32). Более того, «единое, которое не есть, не может представляться (se présenter), оно может только действовать (opérer)» (33).

Хотя представление можно мыслить только как многое, то, что ситуация мыслится как многое, также является эффектом счёта (32–33). Единое, таким образом, это то, что возникает из гипотетического многого в результате операции. Другими словами, эта операция мыслится Бадью как объединение — многого в единое.

В этом рассуждении мы встречаем два смысла множественности:

> Понятно, что многое здесь оказывается расщеплённым. «Многое» говорится о представлении, задним числом схваченном как не-единое, коль скоро сущее-единое есть результат. Но «многое» также говорится о композиции счёта, то есть о многом «нескольких-единых» («plusieurs-uns»), посчитанных действием структуры. Имеется множественность инертности, множественность представления и множественность композиции, которая есть множественность числа и эффекта структуры.
>
> Условимся называть *неконсистентной множественностью* первую и *консистентной множественностью* вторую. (33)

Таким образом, счёт есть операция перевода из неконсистентной множественности в консистентную.[1] Многое, с одной стороны, предшествует счёту как некоторое инертное «многое без единого», а с другой стороны, является результатом счёта как «многое, составленное из единых». Счёт как операция действует на неконсистентное многое, переводя его в консистентное: «неконсистентность на входе, консистентность на выходе» (33). Представление относится к неконсистентной множественности, а единое — к консистентной.

При этом *в ситуации* сущее тождественно представляемому, и неконсистентного многого в ней нет. Ситуация, в этом смысле, оборачивает тезис «Единого нет»; в ней, напротив, всё, что есть, едино и представляемо, неконсистентное же многое не представлено и не есть (65). В ситуации, таким образом, тезис Лейбница верен.

§ 2.2. Онтология как ситуация

Как возможна онтология? Этому вопросу посвящено несколько очень насыщенных страниц «Бытия и события». На них Бадью предлагает свой проект онтологии как науки о «многом, поскольку оно многое». Его решения, однако, зачастую проблематичны, поэтому мы рассмотрим их внимательно.

Прежде всего, онтология, то есть дискурс о сущем, поскольку оно сущее, является ситуацией — просто потому, что имеют место только ситуации (Il n'y a que des situations) (33). Этот тезис противопоставлен убеждению — отвергаемому Бадью — в том, что бытие невыразимо и требует для своего познания некоторой инициации, а также чего-либо подобного негативной теологии.

---

[1] О связи неконсистентного многого с парадоксами см. ниже § 2.6.

Такие онтологии утверждают Единое или Присутствие (с большой буквы) вне опыта и представления; однако «присутствие (présence) есть полная противоположность представления (présentation)» (35). Такое Присутствие как раз будет в точности не-сущим (34). Напротив, Бадью подчёркивает: «Я утверждаю, и это пари всей этой книги, что *онтология есть ситуация*» (35). Это означает прежде всего, то, что онтология предполагает некоторый счёт-за-одно, некоторый режим счёта. Это, однако, не значит, что сущее структурировано — «у сущего нет структуры (il n'y a pas de structure de l'être)» (34). Мы имеем здесь проблему, которая требует разрешения: как возможна онтология, которая одновременно будет ситуацией, то есть будет предполагать некоторый счёт-за-одно, и сможет быть совместимой с тезисом о том, что единого нет.

Бадью предлагает здесь два взаимосвязанных решения.

Прежде всего, то, что онтологическая ситуация представляет, это не какое-либо сущее, а само представление. Онтология, тем самым, есть представление представления (36). Это означает, что она должна быть теорией единственной характеристики представления — его множественности: «всё, что представлено в онтологической ситуации, есть многое без всякого иного предиката, кроме множественности» (36). В этом смысле, онтология должна быть наукой о многом, поскольку оно многое. Её задача — отвечать на вопрос о том, что значит быть многим. Если быть многим это фундаментальный способ бытия, то онтология оказывается наукой об этом способе. Будучи таковой, она имеет своим предметом не какое бы то ни было сущее, а способ бытия, относящийся ко всякому сущему вообще.

Возможна ли такая наука? И если она возможна, то как? Пытаясь ответить на эти вопросы, Бадью движется по двум путям.

Во-первых, такая наука возможна, если всякое многое в ней будет составлено не из единиц, а снова из многих. В результате Бадью формулирует первый тезис, «делающий возможной всякую онтологию» (37):

1. Многое онтологической ситуации составлено только из множественностей. Единого нет (Il n'y a pas d'un). Или: всякое многое есть многое многих.

Бадью предвосхищает здесь своё дальнейшее обращение к теории множеств Цермело—Френкеля (обозначаемой обычно ZF), в которой имеется только один тип объектов — множества, и всякое множество составлено из других множеств. Мы рассмотрим это решение подробно ниже (Гл. 3), сейчас же заметим, что оно предполагает взаимное исключение единого и многого: если многое составлено из многого, то единое не присутствует здесь ни в каком виде — многое не может быть в то же самое время единым. Таким образом, это решение зависит от возможности построить теорию, из которой единое будет полностью исключено. Оставим пока вопрос об этой возможности открытым (см. подробнее § 3.3).

Другое свойство теории множеств Цермело—Френкеля, которое Бадью здесь фактически предвосхищает, состоит в том, что в ней отсутствуют атомы, то есть неделимые. В результате всё, что встречается в этой теории, делимо, то есть множественно. Однако — и это нам предстоит рассмотреть отдельно — отсутствие неделимых в этой теории небесспорно. Проблема состоит в том, что пустое множество, будучи множеством, удовлетворяет определению неделимого, поскольку не имеет других частей, помимо себя самого. С точки зрения ZF, пустое множество, как кажется, неотличимо от атома.

Во-вторых, онтология как наука о многом без единого возможна, если она понимается как аксиоматическая теория. Это формулируется Бадью как второй тезис, делающий возможной онтологию (37):

2. Счёт-за-одно есть лишь система условий, посредством которых многое позволяет себя распознать как многое.

Далее Бадью поясняет:

> Требуется, чтобы эффективная структура онтологии различала (discerne) многое без того, чтобы делать из него единое, и, следовательно, без того, чтобы располагать каким-то *определением многого* (курсив мой—ОД). Счёт-за-одно должен здесь предписывать, чтобы всё, над чем он осуществляет свою власть, было бы множественностью множественностей, и запрещать, чтобы всё то, что является «другим», чем чистое множество — будь то многое того или этого, или многое единиц, или форма самого единого — возникало в представлении, которое он структурирует. (37)

При этом предписание и запрет не должны быть явными, не должно быть критериев или определений того, что считается за единое. Эта неявность обеспечивается аксиоматикой, которая не определяет термины, но «предписывает правила манипулирования ими» (38). Аксиоматика считает за одно, но «то, что онтология считает за одно, не есть „Одно“ многое, в том смысле, что она предписывает некоторый *явный оператор собирания многого в единое* (курсив мой—ОД), некоторое определение многого-поскольку-оно-единое» (37). Что это за единое, которое не является в полном смысле слова единым? Как кажется, Бадью здесь различает, не говоря об этом явно, два понимания единого. С одной стороны, мы имеем «в полном смысле» единое как неделимое или составленное из неделимых, как собирание многого в единое. Но с другой стороны, имеется единое, выделяемое аксиоматикой, единицы, о которых формулируются аксиомы, которые фигурируют в аксиомах в качестве терминов. Последнее и есть «различённое без определения». Оно составляет специфический тип счёта, характерный для онтологии. Онтологическая ситуация как режим счёта различает термины, но не предполагает их как неделимые.

Здесь Бадью также предвосхищает обращение к теории множеств Цермело—Френкеля. Последняя фиксирует условия, которым должны удовлетворять множества, но не фиксирует их «номенклатуру». В точной формулировке это означает, что ZF является некатегоричной теорией, то есть допускает неизоморфные друг другу модели (категоричной называется теория, все модели которой изоморфны). Таким образом, невозможно говорить о (едином) универсуме теории множеств — количество таких универсумов, неизоморфных друг другу, бесконечно (таковы, например, универсумы Гротендика[1]). Таким образом, и Бадью на этом настаивает, аксиоматический метод не является в данном случае случайным: «Аксиоматизация требуется для того, чтобы, предоставленное неявности своего правила счёта, многое было выявлено *помимо понятия*, то есть *без предположения о бытии-единого*» (55), «Явное определение *того, что* аксиоматика считает за одно, считает за объекты-единицы, никогда не встречается» (38). Сама же аксиоматика состоит лишь в фиксации использования отношения принадлежности $\in$.

Мы видим здесь явную структуралистскую тенденцию у Бадью. Множество определяется через отношения с другими множествами. Невозможно существование единственного множества, они всегда имеются «во множестве». Вообще говоря, это условие онтологии слабо связано с первым. Хотя и здесь, и там утверждается тезис «Единого нет», но происходит это различным образом. Если там мы требуем делимости всякого сущего, то здесь — зависимости его определения от определения других сущих. При этом структурализм вовсе не обязательно предполагает делимость. Бадью неявно имеет здесь в виду ZF, которая подчиняется этим двум условиям, но существуют аксиоматические теории множеств с атомами (то есть неделимыми), для которых выполнено второе, но не выполнено первое. Таким образом, требование «Единого нет» оказывается двусмысленным, что делает выбор удовлетворяющих ему теорий неоднозначным. Бадью, тем не менее, выбирает ZF. Мы могли бы считать, что кажется естественным, что ZF и есть определение множества. Подобные определения встречаются в математике повсеместно. Однако Бадью здесь этого не предполагает. Для него определение значит нечто иное. Речь здесь идёт о «составлении» определяемого из предварительно определённого, другими словами — о едином, составленном из других единых[2]. С точки зрения математики, трудно понять, против чего здесь возражает Бадью, что означает отвергаемое им «определённое понятие многого». Тем не менее, можно определённо сказать, что речь здесь идёт о структуралистской тенденции в его мышлении.

В результате, делает вывод Бадью, только аксиоматика может описать структуру ситуации, в которой представляется представление. Аксиоматика устанавливает структуру, не фиксируя природу объектов, вступающих в эту структуру. Структура, которую имеет в виду онтология Бадью, это структура множества

---

[1] *Bourbaki N.* Univers // Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie – 1963–64. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). T. 1. Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1972. P. 185-217.

[2] См. подробнее § 3.2

как такового, которое Бадью называет чистым множеством, а также многим, поскольку оно многое (36). Если многое это режим представления, то оно относится не к «что» сущего, а к его «как». Подобно тому как числом может быть любое сущее, если оно помещено в последовательность, подчинённую аксиомам Пеано, многим — а лучше сказать, *как* многое, — может быть любое сущее, если оно подчинено соответствующим аксиомам. Для Бадью этими аксиомами являются аксиомы Цермело—Френкеля, но мы не обязаны ему в этом следовать. Мы в настоящий момент оставим это под вопросом, заметим лишь, что от того, какова эта теория, зависит ответ на вопрос «что означает *быть* многим?» (см. далее Гл. 3).

В итоге, общая характеристика онтологии выглядит следующим образом:

> С точки зрения *понятия*, именно в позитивном режиме предикации и даже формализации я буду говорить, что онтология существует; *опытом* будет выступать дедуктивное изобретение, в котором результат, далёкий от абсолютной уникальности святости, будет целиком передаваться в знании; наконец, *язык*, отвергающий всякую поэзию, будет содержаться в способности того, что Фреге называл идеографией. (35)

Идеография, на которую ссылается здесь Бадью, является переводом термина Фреге Begriffsschrift, «запись понятий» или «исчисление понятий». Согласно Фреге, это специальная нотация, позволяющая записывать понятия непосредственно, и освобождённая от других, посторонних и мешающих аспектов языка. Как поясняет Фреге,

> это исчисление предназначалось прежде всего для того, чтобы самым надежным способом проверять связи в цепочках умозаключений и выявлять каждое предположение, могущее прокрасться незамеченным с тем, чтобы можно было обнаружить его источник. Поэтому пришлось отказаться от выражения всего того, что не имеет значения для *процесса вывода*.[1]

Этот акцент на процесс уже указывает на важность субъекта. Далее мы увидим, как эта процессуальность лежит в основании подхода Бадью вообще и как она связывает его с интуиционистской и конструктивистской математикой.

§ 2.3. Предмет онтологии — неконсистентное многое

Онтология, согласно Бадью, обладает ещё одним важным свойством: её основным предметом оказывается неконсистентное многое. Бадью рассуждает следующим образом (36). Единственным предикатом многого в онтологии должна быть множественность. Многое здесь не должно быть *этим* многим, то

---

[1] *Фреге Г.* Исчисление понятий, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического // Логика и логическая семантика : Сборник трудов. М. : Аспект Пресс, 2000. С. 66.

есть тем, что структура позволяет посчитать. Многое онтологии должно быть многим «вообще» (en général), а таким многим служит то, что в каждом представлении содержится как область применения счёта, то есть неконсистентное многое. Отсюда следует решающий для Бадью тезис:

> если онтология, то есть представление представления, возможна, то она есть ситуация чистого многого, многого «в себе». Более точно: онтология может быть только *теорией неконсистентных множественностей, поскольку они таковы*. «Поскольку они таковы» означает: то, что представлено в онтологической ситуации, есть *многое без какого-либо иного предиката, кроме множественности* (курсив мой—ОД). Онтология, в той мере, в какой она существует, будет с необходимостью наукой *многого поскольку оно многое* (курсив мой—ОД). (36)

Задача ставится здесь предельно ясно: следует построить онтологию, в которой сущее будет обладать единственным свойством — множественности. Формулируя иначе: эта онтология должна описывать характеристики сущего, которыми оно обладает лишь потому, что оно — многое, без каких-либо ссылок на его единство. Однако одновременно здесь смешиваются две тезиса. С одной стороны, это утверждение об онтологии как теории чистого многого, но с другой — о том, что она должна строится как теория неконсистентного многого, причём неконсистентного, понятого как «многое вообще», многое, присутствующее во всякой ситуации (не обязательно явно). Если мы, вслед за Бадью, считаем этим многим область действия операции счёта, то построение теории зависит от возможности многого-без-единого, то есть многого, ни в каком смысле не предполагающего единого. В какой мере это возможно, мы рассмотрим ниже, сейчас же замечу, что «многое вообще» не обязательно предполагает схему «операция — область применения операции». Аксиоматический подход, который Бадью принимает, позволяет иначе понимать отношение между «этим многим» и «многим вообще»: мы можем понимать «многое вообще» как теорию, а «это многое» — как модели этой теории. Неконсистентное при таком понимании имеет отношение к заданному аксиоматически, а не предшествующему операции. Бадью смешивает здесь счёт как операцию и счёт как аксиоматизацию. Эти два понятия счёта тесно связаны. В более точной формулировке первый соответствует построению свободной алгебры на некотором заранее данном множестве, а второй — заданию аксиоматики без указания домена. Мы рассмотрим свободные алгебры ниже, в § 3.7, сейчас же достаточно сказать, что свободная алгебра есть множество, получающееся из заданного множества с помощью определённого набора операций и только этих операций. Например, это может быть некоторое множество чисел и все числа, полученные из них с помощью операции сложения. Мы увидим далее, что теория множеств может быть построена любым из этих двух способов — как свободная алгебра или как аксиоматическая система. Но в данном случае нас интересует понятие неконсистентного многого, которое для них различается. В первом случае многое-без-единого это многое, к которому применяется операция единого. Оно требует теории, в которой это единое отсутствует, поскольку оно появляется лишь позднее как результат операции. Во втором же случае многое-без-единого можно понимать как совокупность всех моделей данной аксиоматической теории. Для ZF эта совокупность, как можно показать, сама не является множеством. Она, таким образом, неконсистентна в том смысле, что сама не описывается теорией ZF, не относится к её *объектам*. Неконсистентность в этом смысле не зависит от возможности теории, в которой отсутствует единое. Счёт, как переход от неконсистентного к консистентному, совпадает с переходом от теории к модели (или интерпретации), фиксирующим «номенклатуру» имеющихся множеств. Мы вернёмся к обсуждению двух типов неконсистентности и счёта ниже, после обсуждения парадоксов (§ 3.8), однако уже сейчас можно указать на это другое понятие неконсистентного у Бадью. Действительно:

> Осевой темой доктрины бытия, как я уже заметил, является неконсистентная множественность. Но аксиоматика эквивалентна тому, что делает её консистентной в качестве записанного развёртывания, как угодно неявного, чистой множественности, представления представления. Это аксиоматическое приведение к консистентности избегает композиции согласно единому, оно абсолютно специфично. Но оно остаётся обязывающим. В начале его действия то, что оно запрещает, — не именуя и не встречая — неконсистентно (in-consiste). Но то, что здесь неконсистентно (in-consiste), есть не что иное как нечистая множественность, то есть та, что, будучи составленной из единиц или индивидуальностей (свиньи, звёзды, боги,...), во всяком неонтологическом представлении, то есть во всяком представлении, в котором представлено не само представление, консистентна (consiste) в соответствие с определённой структурой. Эти консистентные множественности индивидуальных представлений, поскольку они очищены от всякой индивидуальности — следовательно, схваченные прежде счёта-за-одно ситуации, в которой они представлены — для того, чтобы аксиоматически прийти к представления их представления, не имеют никакой другой консистентности, кроме их чистой множественности, то есть их режима неконсистентности в ситуациях. Таким образом, понятно, что их исходная консистентность запрещена аксиоматикой, то есть онтологически неконсистентна, но однако, разрешено, что их неконсистентность (их чистая представленная множественность) онтологически консистентна. (38)

Этот фрагмент показывает, что означает для Бадью консистентность и единство. Неконсистентность здесь оказывается дополнительно — помимо чистой множественности — связанной с запретом и разрешением. Аксиоматика разрешает неконсистентность чистой множественности, но запрещает консистентность множественности посчитанной. Аксиоматика, таким образом, оказывается вариантом счёта, хоть и «абсолютно специфического».

* * *

Итак, мы видим, что рассуждение Бадью многое оставляет неясным. Прежде всего, неясными остаются понятия единого и неконсистентного, а также возможность построения онтологии как теории сущего, поскольку оно многое. Нашей дальнейшей задачей будет прояснение этих понятий с целью разобраться, в каком смысле эта последняя возможна и возможна ли вообще.

Основные вопросы, на которые мы будем искать ответы, таковы:

- Как конкретно следует понимать единое и многое у Бадью?
- Как следует понимать консистентное и неконсистентное?
- Возможна ли, и если возможна, то как, теория «многого без единого»?

Прежде чем мы к этому перейдём, нам нужно ввести основные математические понятия и формальный аппарат, которые понадобятся в дальнейшем. Сам Бадью в первом томе «Бытия и события» использует язык логики первого порядка, на котором формулируются аксиомы ZF и описывается метод форсинга. Нам требуется несколько расширить этот арсенал. Я предполагаю, что читатель знаком с основными обозначениями логики первого порядка и теории множеств. Для напоминания они представлены в Прил. A.

§ 2.4. Алгебраические системы и формальные языки

В дополнение к теории множеств, которую использует Бадью, мы будем использовать два более общих подхода к описанию онтологии — алгебраические системы и категории. О категориях речь пойдёт ниже, а в этом разделе мы рассмотрим основные сведения из общей алгебры, касающиеся алгебраических систем и языков их описания. Их появление в нашем исследовании не случайно. Единое у Бадью является операцией, а алгебраический язык является естественным языком для описания множеств с операциями на них.

Итак, рассмотрим основные определения[1]. Для n объектов $x_1, \dots, x_n$ упорядоченным набором или *кортежем* длины n называется упорядоченная последовательность $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. При $n = 0$ будем говорить, что кортеж пуст. *Функцией* $f : A \to B$ из множества A в множество B называется отображение, которое *каждому* элементу A ставит в соответствие некоторый элемент множества B (при этом в последнем допустимы элементы, в которые не отображается ни один из элементов A). Пусть A^n — множество всех кортежей длины n, состоящих из

---

[1] *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Физматлит, 1970. 392 с. ; *Burris S., Sankappanavar H. P.* A Course in Universal Algebra. 2012. См., например:

объектов множества A. Тогда n-местной операцией (или функцией) называется функция $f^{(n)} : A^n \to A$. При этом n называется *местностью функции*. При $n = 0$ функции вида $f^{(0)}$ являются *константами* или элементами множества A. Подмножество кортежей $R^{(n)} \subseteq A^n$ называется *отношением* на A. Число n называется *местностью отношения*. При $n = 0$ отношения вида $R^{(0)}$ называются *пропозициональными константами* или атомарными пропозициями. Они, как видно, соответствуют различным подмножествам A.

Множество A вместе с определёнными на нём функциями и отношениями называется *алгебраической системой*. В этом случае множество A называется *носителем* алгебраической системы. При отсутствии отношений система называется просто *алгеброй*.

Для описания алгебраических систем используется язык первого порядка. Определим его основные понятия. *Сигнатурой* Σ (языка первого порядка) называется пара, состоящая из:

- Множества функциональных символов $f_i^{(n)}$, каждому из которых назначена местность n.
- Множества символов отношений $R_i^{(n)}$, каждому из которых назначена местность n.

Помимо сигнатуры язык содержит переменные, которые мы будем обозначать буквами x, y, возможно с индексами, логические символы $\top$, $\bot$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, а также скобки, которые мы будем расставлять неформально по мере необходимости.

Словами языка являются термы и формулы.

Термы сигнатуры Σ определяются рекурсивно следующим образом.

- переменные, то есть слова вида x_i, являются термами;
- если $t_1, \dots, t_n$ — термы, то слово $f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — тоже терм;
- других термов нет.

Термы будут обозначать объекты онтологии. Константы, то есть слова вида $f^{(0)}$ обозначают простые объекты, а остальные слова местности $n > 0$ — производные от них соответственно операциям $f^{(n)}$.

Формулы определяются также рекурсивно. Вначале определяются *атомарные формулы*:

- если $t_1, \dots, t_n$ — терм, то $R_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — формула;
- $\top$ и $\bot$ — формулы («истина» и «ложь»);

а затем — производные от них:

- если φ — формула, то $\neg\varphi$ — тоже формула;
- если φ и ψ — формулы, то $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ — формулы;

- если $\varphi(x)$ — формула, то $\forall x \varphi(x)$ и $\exists x \varphi(x)$ — формулы;
- других формул нет.

Формулы будут обозначать свойства объектов онтологии, а также классы объектов. В частности, формулы $\bot$ и $\top$ обозначают классы, соответсвенно, не содержащие объектов и содержащие все объекты.

Для каждого терма t определим множество его свободных переменных $FV(t)$:

- для терма, равного переменной $t = x$ положим $FV(t) = \{x\}$;
- для $t = f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — $FV(t)$ равно объединению всех $FV(t_i)$.

Для каждой формулы φ определим множество её свободных переменных $FV(\varphi)$:

- для $\varphi = R_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — $FV(\varphi)$ равно объединению всех $FV(t_i)$;
- $FV(\top) = \varnothing$ и $FV(\bot) = \varnothing$;
- $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$;
- $FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$,
- $FV(\varphi \vee \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$,
- $FV(\varphi \Rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$,
- $FV(\forall x \varphi(x)) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$,
- $FV(\exists x \varphi(x)) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

Формула φ называется замкнутой, если $FV(\varphi) = \varnothing$.

Язык интерпретируется на алгебраических системах очевидным образом: переменные обозначают объекты, функциональные символы — функции, а символы отношений — отношения. Знаки $\top, \bot, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \forall$ и $\exists$ интерпретируются как, соответственно, «истина», «ложь», «не» (отрицание), «или», «и», «если, то» (импликация), «для всех» и «некоторое» (см. Прил. A). Не во всякой онтологии, как мы увидим, потребуются все из перечисленных термов и формул. В частности, для нас важны *алгебраические теории*, в которых из символов отношений есть только равенство, то есть определены только формулы с отношениями вида $t_1 = t_2$. Они описывают алгебры. Другим важным для нас классом теорий являются *пропозициональные теории*, в которых носитель пуст. В них нет функций и есть только атомарные пропозиции.

Операции и отношения, принадлежащие сигнатуре, называются *главными*. На их основе в алгебраической системе могут быть определены другие, производные операции и отношения.

Пусть имеется две алгебраические системы $\mathsf{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ и $\mathsf{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ с разными носителями, но с одной и той же сигнатурой. *Гомоморфизмом* алгебраических систем называется отображение носителей этих систем, сохраняющее главные операции и отношения. Формально, обозначим гомоморфизм как $h : A \to B$, тогда по определению:

- Для любой операции $f^{(n)}$ и объектов $a_1, \dots, a_n$ алгебраической системы A верно
$$f^{(n)}\,(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h\big(f^{(n)}(a_1, \dots, a_n)\big)\,.$$
- Для любого отношения $R^{(n)}$ и объектов $a_1, \dots, a_n$ алгебраической системы A
$$\text{если } R^{(n)}(a_1, \dots, a_n),\ \text{то } R^{(n)}\,(h(a_1), \dots, h(a_n))\,.$$

Как мы увидим ниже (§ 3.7), алгебраический подход не только удобен для построения моделей теории множеств, то есть онтологий, но и оказывается близок к понятиям Бадью, таким как счёт. Но прежде чем мы к этому подойдём, рассмотрим как теория множеств используется в самом «Бытии и событии».

§ 2.5. Теория множеств в онтологии Бадью

Бадью использует для формализации аксиоматику Цермело—Френкеля. Она содержит 9 аксиом[1]:

ZF1 (Объёмности) $(\forall\gamma)[(\gamma \in \alpha)$ тттк $(\gamma \in \beta)] \Rightarrow (\alpha = \beta)$.
ZF2 (Степени или подмножеств) Для любого множества α существует множество $\mathcal{P}(\alpha)$, элементами которого являются подмножества α.
ZF3 (Объединения) $(\forall\alpha)(\exists\beta)[(\delta \in \beta)$ тттк $\exists\gamma[(\gamma \in \alpha) \wedge (\delta \in \gamma)]]$.
ZF4 (Выделения) $(\forall\alpha)(\exists\beta)(\forall\gamma)[[(\gamma \in \alpha) \wedge \lambda(\gamma)] \Rightarrow (\gamma \in \beta)]$
ZF5 (Подстановки) Если существует множество α, то существует также множество полученное заменой элементов α другими существующими множествами.
ZF6 (Пустоты или пустого множества) $(\exists\beta)[\neg(\exists\alpha)(\alpha \in \beta)]$.
ZF7 (Фундирования или регулярности) $(\forall\alpha)[(\alpha \neq \varnothing) \Rightarrow (\exists\beta)[(\beta \in \alpha) \wedge (\beta \cap \alpha = \varnothing)]]$.
ZF8 (Бесконечности) Существует предельный ординал.
ZF9 (Выбора) $(\forall\alpha)(\exists f)[(\beta \in \alpha) \Rightarrow f(\beta) \in \beta]$.

В этот список иногда включают аксиому пары[2], но она выводима из других аксиом. Она присутствовала в списке Цермело, но после модификаций Френкеля оказалась излишней. Кроме того, аксиому подстановки часто формулируют как утверждение о существовании образа всякой функции f:

$$(\forall\alpha)(\exists\beta)(\forall\gamma)[\gamma \in \beta \text{ тттк } \exists\delta(\delta \in \alpha \wedge f(\delta) = \gamma)].$$

Теория без последней аксиомы обозначается как ZF, со всеми аксиомами — как ZFC. В большинстве случаев для нас важна именно первая, поэтому, как правило, я буду ссылаться на неё, хотя часто те же утверждения будут справедливы и для ZFC.

---

[1] Здесь и далее тттк означает «тогда и только тогда, когда» или «если и только если».

[2] См., например, *Jech T.* Set Theory. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2006. P. 3.

Аксиоматическая теория множеств в версии Цермело—Френкеля оказывается для Бадью наиболее подходящей по нескольким причинам. Во-первых, она имеет только одно отношение — принадлежность, которую Бадью интерпретирует онтологически как представление:

> Первая важная характеристика формальной системы Цермело—Френкеля (системы ZF) состоит в том, что её словарь содержит только одно отношение $\in$ и, следовательно, не имеет никакого унарного предиката, никакого свойства в строгом смысле слова. В частности, система исключает построение любого символа, смысл которого сводился бы к «быть множеством». Многое здесь неявно обозначено в форме логики принадлежности, т. е. способа, каким «нечто $= \alpha$» вообще представлено согласно множественности β (est présenté selon une multiplicité β), что мы будем обозначать как $\alpha \in \beta$, α есть элемент β. То, что здесь посчитано за *одно*, не есть понятие многого; нет никакой идеи, которую можно было бы отнести к многому-*единому* (*un*-multiple). Единое относится только лишь к знаку $\in$, т. е. к оператору, обозначающему отношение между «нечто» вообще и многим. Знак $\in$, лишённый (désêtre) всякого единства, определяет унифицированным образом представление этого «нечто» как индексированного во многом. (55)

Здесь конкретизируется связь представления и принадлежности. Многое β состоит из элементов α, о которых не сказано, являются ли они единым или многим. О них, однако, сказано, что они «представлены согласно β». Таким образом, знак $\in$ обозначает лишь, что нечто образует множество, но никак не фиксирует, природу этого «нечто», оставляя, в частности, для него возможность самому быть множеством. Мы опять встречаемся здесь со смешением. Если многое обозначает не сущее, а способ бытия, то о чём нам говорит тот факт, что множество само состоит из множеств? Лишь о том, что сущие, составляющие множество, сами обладают способом бытия многого. Но следует ли отсюда какой-либо вывод о едином? Можем ли мы тем самым утверждать, что «единого нет»? Только в том случае, если многое и единое как способы бытия взаимно исключают друг друга. Если сущее может быть одновременно как многим, так и единым (т. е. обладать одновременно способом бытия как многого, так и единого), то такого вывода сделать нельзя. Мы увидим ниже, что в теориях типа ZF реализуется именно этот случай: сущее способно быть одновременно и как многое, и как единое. Это ставит данный тезис Бадью под вопрос.

Вторая причина, по которой аксиоматика ZF оказывается наиболее подходящей для Бадью, состоит в том, что она содержит только один тип переменных, и этим типом является множество (l'ensemble) — всё, о чем говорит теория, всё, что обозначается её переменными, относится к одному и тому же типу, и этот тип есть множество. Она, в частности, не даёт определения элемента, он поэтому не обладает никаким «внутренним свойством», а определяется исключительно на основании отношения «быть элементом _». Таким образом, α в выражении $\alpha \in \beta$ также является множеством как и β. Следовательно, делает вывод Бадью,

> то-что-есть есть во всех своих формах чистая множественность. […] Единообразием своих переменных *теория указывает (без того, чтобы давать определение), что она не говорит о едином*, что всё *то*, что она неявным образом представляет в своих правилах, является многим. (56)

Теория множеств, таким образом, есть искомая теория многого, состоящего из многого. Понимание многого, которого здесь придерживается Бадью, основано на неделимости: многое это то, что имеет элементы, единое — то, что их не имеет. Проблематичным исключением является пустое множество, которое не имеет элементов, но одновременно является множеством. Заметим, насколько понимание Бадью зависит от решений, принятых теорией Цермело—Френкеля: определение множества через отношение принадлежности, введение пустого множества как множества и пр. Мы увидим далее, что некоторые из этих решений спорны, а понятия многого и единого, на которых они основываются, не вполне ясны, но сейчас продолжим рассмотрение аргументации «Бытия и события».

§ 2.6. Парадоксы

Мы видим, что принадлежность является для Бадью основным онтологическим отношением. Однако понятие принадлежности не является простым и подвержено парадоксам. Парадоксы, которые важны для Бадью и которые мы будем рассматривать, основаны на так называемом диагональном аргументе Кантора. Исторически первым и, вероятно, самым известным теоретико-множественным парадоксом является парадокс Рассела. Если мы попытаемся определить множество всех множеств, не принадлежащих себе, то не сможем решить, принадлежит ли себе оно само. Формально, это множество определяется как

$$R = \{\, x \mid x \notin x \,\}. \tag{2.1}$$

Тогда по определению $R \in R$ тогда и только тогда, когда $R \notin R$ — противоречие. Было предложено множество способов справиться с парадоксом, однако так или иначе парадокс указывает на некоторое ограничение. С точки зрения ZF, ограничение состоит в том, что множество R не может существовать, однако возможно и другое решение. Рассмотрим множество A и множество *его* элементов, не принадлежащих самим себе. Другими словами, вместо (2.1) определим множество Рассела как

$$R = \{\, x \in A \mid x \notin x \,\} = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin x \,\}.$$

Тогда $R \in R$ тогда и только тогда, когда $R \in A \wedge R \notin R$, и мы избегаем противоречия, если R не принадлежит A. Таким образом, из парадокса возможны как минимум два выхода[1]: 1) либо считать, что множество R невозможно, и тогда запретить его на уровне аксиоматики, 2) либо считать, что оно возможно, но при этом происходит выход за пределы данного множества A. В последнем случае парадокс возникает, если мы считаем, что A содержит все множества вообще. Эту структуру мы найдём в большинстве популярных парадоксов. Уильям Ловер в рамках теории категорий предлагает общую схему парадоксов[2], которую, однако, можно изложить и без упоминания категорий. Рассмотрим упрощённую версию его аргумента.

Предположим, что имеется функция $f : X \to Y^X$. Вместо неё мы можем рассмотреть функцию вида $h : X \times X \to Y$. Они связаны следующим образом: если $f(x_0) = g$, то $h(x_0, x) = g(x) = f(x_0)(x)$. Иначе говоря, x_0 соответствует функции g или конкретной функции из Y^X. Функция g называется *представимой* с помощью h, если существует x_0, такое, что $g(-) = h(x_0, -)$. В терминах функции f это означает, что существует такое x_0, что $g = f(x_0)$. Пусть теперь имеется функция $\alpha : Y \to Y$ без неподвижных точек, то есть такая, что ни для какого y не верно, что $\alpha(y) = y$ (такая функция всегда существует, если Y имеет больше одного элемента). Тогда существует функция g, не представимая с помощью h, что означает, что для любого x

$$g(-) \neq h(x, -).$$

Для доказательства построим эту функцию. Рассмотрим $g(x) = \alpha(h(x, x))$. Если она представима, то существует некоторое x_0, такое, что $f(x_0) = g$. Чему равно значение g в точке x_0? С одной стороны, оно равно $h(x_0, x_0)$, но с другой — $\alpha(h(x_0, x_0))$. Это, однако, противоречит предположению об отсутствии неподвижных точек у функции α. Мы, таким образом, доказали (пользуясь, фактически, диагональным аргументом Кантора), что для любой функции f существует $g \in Y^X$, у которой нет прообраза $f^{-1}(g)$. В частности, это означает, что f не может быть взаимно однозначной (биекцией).

Пусть теперь Y состоит из двух элементов — скажем, «истина» и «ложь», — а в качестве α выбирается «отрицание», то есть функция, переводящая «истину» в «ложь» и наоборот. Тогда функции Y^X можно рассматривать как характеристические функции, соответствующие подмножествам X. Тогда f не может быть биекцией между множеством и его степенью, и доказательство выше воспроизводит канторовское доказательство того, что мощность степени множества больше мощности его самого.

---

[1] Помимо, разумеется, разработки логик, в которых $a \leftrightarrow \neg a$ не обязательно является противоречием. см., например, *Kripke S.* Outline of a Theory of Truth // The Journal of Philosophy. 1975. Nov. 6. Vol. 72, no. 19. Pp. 690–716.

[2] *Lawvere F. W.* Diagonal arguments and cartesian closed categories with author commentary // Category Theory, Homology Theory and their Applications II. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969. Pp. 134–145. DOI: `10.1007/BFb0080769` ; см. также *Yanofsky N. S.* A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points // The Bulletin of Symbolic Logic. 2003. Vol. 9, no. 3. Pp. 362–386. DOI: `10.2178/bsl/1058448677`. arXiv: `math/0305282 [math.LO]`.

В частности, если $h(x_0, x)$ соответствует характеристической функции отношения $x \in x_0$, т. е.

$$h(x_0, x) = \begin{cases} \top & \text{если } x \in x_0, \\ \bot & \text{если } x \notin x_0, \end{cases}$$

то $\alpha(h(x, x))$ будет характеристической функцией расселовского множества $\{\, x \mid x \notin x \,\}$. При этом $f(x)$ равно характеристической функции x, то есть самому же x, представленному как подмножество. Тогда аргумент доказывает невозможность биекции между множеством X и множеством характеристических функций на X, то есть подмножеств X. Всегда найдётся подмножество, которому не может соответствовать никакой элемент множества X, и парадокс Рассела описывает метод построения такого подмножества. Иначе говоря, каково бы ни было множество X, мы всегда можем построить такое его подмножество, которое не может быть его элементом.

Это свойство всегда возможного выхода за пределы, вероятно, наиболее ясно видно в парадоксе с множеством ординалов (парадокс Бурали-Форти). *Ординалом* (фон Неймана) называется строго вполне упорядоченное отношением принадлежности транзитивное множество. Другими словами, для всяких двух элементов a и b этого множества либо $a \in b$, либо $b \in a$, и всякий элемент ординала является также его подмножеством (другими словами, его элементы также являются элементами ординала). Это, в частности, означает, что всякий элемент ординала также является ординалом. Ординалы фон Неймана выстраиваются последовательно, начиная с пустого множества; каждый ординал является множеством всех предыдущих (это касается и первого ординала — пустого множества). Если множество всех ординалов существует, то, исходя из этого определения, оно будет транзитивным и вполне упорядоченным принадлежностью, то есть само будет ординалом. Но это означает, что оно будет собственным элементом, что невозможно по определению. Мы получаем парадокс. Его устройство аналогично предыдущим. Если множество всех ординалов существует, то оно является множеством всей последовательности ординалов, то есть следующим ординалом, превосходящим все имеющиеся. Операция «собирания» ординалов в одно множество (некоторый счёт-за-одно) является *одновременно* операцией построения нового ординала, не входящего в это множество.

Перепишем это в терминах общей схемы парадоксов. Тогда X является начальным сегментом последовательности ординалов, $f(x) \in 2^X$ — подмножеством (характеристической функцией), соответствующим x. Функция $g(x) = \alpha(h(x, x))$ есть характеристическая функция следующего ординала. Действительно, для них всех верно, что $x \notin x$, поэтому $g(x)$ соответствует множеству всех ординалов из X, то есть следующему ординалу. Диагональный аргумент показывает тогда, что X не может быть множеством всех ординалов, поскольку $g(x)$ предоставляет пример ординала, который в него не входит.

Майкл Дамметт называет понятия, соответствующие таким множествам, понятиями с неопределённо расширяющимся объёмом (indefinitely extensible concepts)[1]. Они устроены таким образом, что всякая фиксация их объёма делает возможным построение нового объекта, подпадающего под понятие, то есть расширение объёма; что и делает этот объём неопределённым. *Одним и тем же действием* мы объём фиксируем и изменяем (расширяем).

Таким образом, парадоксы указывают на невозможность построения определённым образом устроенных функций или множеств. Причина этого в том, что они не могут быть «посчитаны-за-одно» — само предположение о том, что это возможно, приводит к противоречию. Мы видим, что невозможность «полного» множества или множества *всех* множеств, удовлетворяющих некоторому свойству, связана с тем, что само действие по отнесению тех или иных совокупностей к такому множеству является выходом за его пределы. Формирование такого множества само является частью построения отображения f и, поскольку последнее требует выхода за пределы множества, не может быть завершено.

Бадью в разрешении парадоксов опирается на способ, предложенный Цермело и состоящий в том, что допустимым считается применение формул только к уже существующим множествам. Парадоксы показывают, что первоначальная убеждённость некоторых математиков (прежде всего, Фреге) в том, что всякому правильно сформулированному свойству соответствует множество объектов, удовлетворяющих этому свойству, оказалась иллюзией. Это решение зафиксировано в аксиоме отделения теории множеств Цермело—Френкеля. Оно приводит к тому, что парадоксальные множества просто не появляются в теории (в явном виде; они, конечно же, присутствуют в ней как подмножества, см. ниже).

В «Бытии и событии» Бадью посвящает парадоксам отдельную главу — медитацию 3 (49-60). Он начинает с программы логицизма Фреге и Рассела, которые намеревались определить множество посредством логики: множество есть то, что задаётся формулой языка первого порядка. В терминах Бадью, множество есть то, что считает-за-одно объекты, удовлетворяющие формуле. Если это всегда возможно, то, как выражается Бадью, «господин слов является одновременно господином множеств» (51). Но именно невозможность этого господства демонстрируется парадоксами. Бытие многого не регулируется только языком: «У меня нет власти считать за единое, как „множество“ (ensemble), всё то, что подходит под некоторое свойство» (51). Чистое многое, в этом смысле, избегает определения. Расселово множество, как говорит Бадью, избыточно (en excès) по отношению к выразительным возможностям формального языка (52). Как часто говорят математики, оно «слишком велико», чтобы быть посчитано за

---

[1] *Dummett M.* What is Mathematics About? // The Seas of Language. Oxford : Clarendon Press, 1996. DOI: 10.1093/0198236212.003.0018. P. 26.

множество. Именно такие множественности Кантор называет неконсистентными или, имея в виду теологические коннотации, абсолютно бесконечными. В этом смысле, они выходят за пределы сущего, относятся к не-сущему. С точки зрения Бадью, мы встречаемся здесь с «онтологиями» Присутствия, которые полагают, что единое есть, пусть и по ту сторону многого, в рамках метафоры «неконсистентной величины». Бадью пишет здесь «онтологии» в кавычках и называет их нематематическими. Для него, напротив, парадоксы подтверждают основной тезис его онтологии — что единого нет.

При этом Бадью возражает против того, что задача аксиомы отделения состоит в том, чтобы запретить «слишком большие» множества. Действительно, вместо утверждения Фреге для формул φ

$$\exists\beta\forall\alpha\,[\varphi(\alpha) \to (\alpha \in \beta)],$$

которое начинает с полагания существования некоторого множества, Цермело предлагает аксиому

$$\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma\,\big[[(\gamma \in \alpha) \land \varphi(\gamma)] \to (\gamma \in \beta)\big].$$

Эта аксиома не полагает существование, а предполагает его заранее: лишь для всякого *уже имеющегося* α существует множество его элементов, удовлетворяющих условию φ. Аксиома, таким образом, не полагает некоторое сущее, а выделяет его из уже имеющегося:

> Связь [языка, существования и множества — ОД], предлагаемая Цермело, более не предписывает языку выводить существование многого; но язык выделяет в предположительно данном существовании (в уже представленном многом) существование под-множества. (58)

Это противопоставлено «идеалингвистерии» — убеждению в способности вывести из правильно построенного языка существование множеств. Аксиома Цермело ограничивает онтологические претензии языка — он вступает в действие, лишь когда многое уже представлено. Избыток, на который указывают парадоксы, это, с точки зрения Бадью, избыток языка, его способность формулировать свойства, для которых не существует соответствующего множества. Соответственно, теория многого не должна претендовать на то, что может формулировать свойства множеств, не принимая во внимание их возможное существование:

> Нужно, чтобы сущее было уже-здесь, чтобы чистое многое, как многое многих, было уже представлено; тогда правило может отделить его от консистентного многого, самого представленного во вторую очередь жестом первого представления. (59)

Парадоксы, согласно Бадью, заставляют сделать два вывода:

> a. Следует оставить всякую надежду определить явно понятие множества. Ни интуиция, ни язык не в состоянии обеспечить, чтобы чистое многое, которое фундируется единственно отношением «принадлежать к», обозначаемым $\in$, было посчитано за одно в однозначном понятии. Следовательно, к сущности теории множеств относится то, что её «объекты» (множественности, множества) ухватываются лишь неявно, в рамках аксиоматики, в которой свойство «быть множеством» не фигурирует.
>
> b. Следует запретить парадоксальные множественности (иначе говоря, не-сущее), знаком онтологической неконсистентности которых выступает разрушение языка. Следовательно, аксиоматика должна быть такова, чтобы то, что она разрешает, рассматривать как множество, то есть всё то, о чём она говорит, [...] *не* приводило к формулам вида $\neg(\alpha \in \alpha)$, ведущим к противоречиям. (54)

Определение множества в этом отрывке означает определение через задание свойств. Мы не имеем, таким образом, никакого набора свойств, позволяющего нам выделить множества из всех имеющихся объектов. Такой набор, если мы попытаемся его выделить, приводит к парадоксам. Но, согласно Бадью, это означает не то, что «множество всех множеств» не существует, а то, что оно существует, но неконсистентно — сущее это неконсистентное многое. Таким образом, языка самого по себе недостаточно, чтобы описать набор доступных множеств — онтология предшествует языку. Проблема, однако, заключается в том, что это утверждение неточно. Подход Цермело, будучи важным, далеко не единственен. Существуют аксиоматики, в которых совокупности существуют для любой формулы, включая парадоксальные. Эти совокупности (называемые классами) отличаются от множеств терминологически, но прежде всего — своими свойствами. Мы увидим ниже, что так понятая неконсистентность совпадает с понятием класса, которого, однако, нет в арсенале Бадью. Для того, чтобы рассмотреть это подробно, нам нужно приостановить следование тексту Бадью и обратиться к более широкому математическому и историческому контексту.

Дополнительная литература

Мальцев А. И. Алгебраические системы. М. : Физматлит, 1970. 392 с. (Современная алгебра).

Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М. : Мир, 1966. 556 с.

Jech T. Set Theory. 3rd Millennium ed, rev. and expanded. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2006. (Springer Monographs in Mathematics).

Yanofsky N. S. A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points // The Bulletin of Symbolic Logic. 2003. Vol. 9, no. 3. Pp. 362–386. DOI: `10.2178/bsl/1058448677`. arXiv: `math/0305282 [math.LO]`.

3

Онтология Бадью в контексте

§ 3.1. Множества и классы

Существует два основных способа введения классов в теорию[2]. В первом случае определяется язык первого порядка и класс вводится как формальное обозначение для объектов, удовлетворяющих формулам этого языка: $A = \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$. После этого возможно определить операции на классах и отношения между ними. Например, для классов $A = \{\, x \mid \varphi(x) \,\}$ и $B = \{\, x \mid \psi(x) \,\}$ мы можем определить[3]:

$$\begin{aligned} A = B &:= \forall x\,(\varphi(x)\ \text{тттк}\ \psi(x)) \\ A \subseteq B &:= \forall x\,(\text{если}\ \varphi(x),\ \text{то}\ \psi(x)) \\ A \cap B &:= \{\, x \mid \varphi(x) \wedge \psi(x) \,\} \\ A \cup B &:= \{\, x \mid \varphi(x) \vee \psi(x) \,\} \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Классы здесь выступают как фиктивные объекты, как удобный способ выражения того, что могло бы быть выражено и без них. Выражение $x \in A$, фактически, совпадает с $\varphi(x)$. Вместо классов объектов, удовлетворяющих формулам, мы могли бы говорить только о формулах, хотя это и было бы более громоздко. Таков, например, подход Томаса Йеха[4]. Важно, что здесь операции на классах хотя и выглядят как операции на множествах, но не совпадают с ними. Не всё, что можно делать с множествами, можно делать с классами. Например, при

---

[2] См. обзор различных подходов в книге *Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A.* Foundations of set theory. Noord-Hollandsche U.M, 1973. Pp. 119–153.

[3] Здесь и далее знак $:=$ означает «равно по определению».

[4] *Jech T.* Set Theory. P. 5.

таком подходе не определено понятие принадлежности класса другому классу или множеству, что блокирует парадоксы типа рассмотренных выше.

Во втором случае классы полагаются самостоятельными объектами, специфика которых фиксируется аксиомами. При этом множества также являются классами, но особого рода. Таков подход фон Неймана, определяющего множества как классы, которые могут служить элементами других классов. Основными теориями здесь являются теории фон Неймана—Бернайса—Гёделя (NBG), Морзе—Келли (MK) и Аккермана. Для наших целей более пригодна первая, поэтому рассмотрим её более подробно.

Ключевым отличием аксиоматики фон Неймана—Бернайса—Гёделя от ZF является различение переменных двух типов — множеств и классов. Поскольку Бадью принимает в качестве аксиоматики ZF, он не различает их явно. Основное различие между ними состоит в том, что не всякий класс может выступать элементом другого класса. Классы, являющиеся элементами хотя бы одного класса, называются множествами. Остальные классы называются *собственными классами*. Аксиомы ZF запрещают появление собственных классов и составляют, таким образом, теорию множеств, то есть классов особого рода. Всякий объект ZF может служить элементом, то есть является множеством в смысле NBG. Как оказывается, NBG является консервативным расширением ZFC, что означает, что, во-первых, всякая теорема ZFC является теоремой NBG, и, во-вторых, всякая теорема NBG, говорящая только о множествах, является теоремой ZFC. Другими словами, NBG расширяет язык ZFC и набор её утверждений, но так, что, будучи ограничена терминами ZFC, не формулирует никаких новых утверждений.

Онтологически, классы являются обычными объектами. Это подклассы универсума (который сам, разумеется, является классом). Способность быть элементом приводит к разнице в поведении множеств и собственных классов. Это различие, однако, лишь косвенно можно понимать как количественное — между «большими» и «малыми» классами. Лишь особое свойство собственных классов приводить к «самовозрастанию» при допущении их принадлежности универсуму позволяет — скорее метафорически — называть их «большими».

Таким образом, в NBG классы считаются существующими, хотя и иным способом, чем множества. Но здесь также возможен другой подход. Пётр Вопенка, следуя своей интерпретации Больцано, принимает, что универсум всех множеств не может быть актуализирован. Это означает, например, что для бесконечных множеств множество всех их подмножеств не может быть создано. Но это не означает, что оно вообще не может быть создано. Обсуждая предполагаемую способность Бога создать множества, о которых идёт речь в парадоксах, Вопенка говорит: «Всемогущество не заключается в возможности сотворить сразу вообще всё, а в возможности сотворить когда угодно нечто новое, причем всё, что угодно, чего не запрещает закон противоречия»[1]. Таким образом, множества типа расселовского могут быть «завершены», но такое завершение приводит к тому, что мы можем построить новое множество, удовлетворяющее тому же условию, причём парадоксы дают нам методы построения таких множеств[2]. Универсум, таким образом, никогда не завершён. В нём всегда имеются подмножества, которые могут послужить новыми элементами, расширяющими универсум. Это приводит к тому, что собственные классы, вообще говоря, перестают быть противоречивыми. Их особенность состоит в описанной характерной для них структуре «самовозрастания». Подобно классу всех ординалов, они всегда могут быть расширены. Если в классической теории нужно различать непосчитанные подмножества и подмножества, которые не могут быть посчитаны (собственные классы), то для Вопенки собственными классами оказываются те, чей счёт позволяет построить ещё одно множество, отсутствующее в универсуме. В этом смысле, нет множеств, которые нельзя было бы посчитать, но в то же время всегда есть (ещё) не посчитанные множества.

Таким образом, существуют различные способы обращения с парадоксальными множествами и введения их в теорию. Их преимущества по отношению к ZF состоят в том, что они предоставляют более явные инструменты для разговора об этих множествах. По отношению к Бадью, это позволит нам более точно сформулировать некоторые из его тезисов и провести более строгие различения для его понятий. Но прежде чем мы перейдём к формальным построениям, позволяющим оценить онтологию Бадью, совершим исторический экскурс в проблему соотношения единого и многого.

§ 3.2. Единое и многое как трансценденталии[3].

Бадью определяет онтологию как учение о сущем, поскольку оно сущее. В философской традиции наиболее общие характеристики сущего, поскольку оно сущее, называются трансценденталиями. Важнейшей трансценденталией является единое, и именно ему Бадью отказывает в трансцендентальном статусе, принимая тезис «Единого нет». Сущее прежде всего множественно, единство же является результатом дополнительной операции счёта-за-одно или принятия-за-единое. Трансцендентальность многого означает для онтологии то, что к существенным свойствам сущего относится множественность, но не единство.

---

[1] *Вопенка П.* Альтернативная теория множеств : Новый взгляд на бесконечность. Новосибирск : Институт математики, 2004. С. 444.

[2] Подробнее см. Там же. С. 437—447.

[3] Содержание этого раздела представляет собой существенно переработанный вариант следующего текста: *Доманов О. А.* Единое и многое как трансценденталии: Аристотель, Фома и теория множеств // Сибирский философский журнал. Новосибирск, 2016. Т. 14, вып. 4. С. 262—272

Бадью, однако, не единственный, кто утверждал трансцендентальность многого. Фома Аквинский в «Сумме теологии» прямо относит многое (multitudo) к трансценденталиям. То же самое делает и Дунс Скот. Однако онтология Бадью — онтология без единого — радикально отличается от этих схоластических построений. Она не просто «поднимает» многое до статуса трансценденталии, но одновременно подчиняет ему единое. Может ли этот традиционный философский сюжет помочь нам в понимании этого подчинения?

Согласно схоластической формуле, сущее и единое обратимы, взаимозаменяемы, переходят друг в друга: «Ens et Unum convertuntur». Говоря «сущее», мы в то же самое время говорим «единое». Идея этой обратимости восходит к греческой философии. Действительно, Аристотель специально анализирует понятие единого в IV, гл. 2–4, V, гл. 7–8 и X книгах «Метафизики». В IV книге он утверждает тождество единого и сущего — по природе, но не по понятию:

> Итак, сущее и единое — одно и то же, и природа у них одна, поскольку они сопутствуют друг другу так, как начало и причина, но не в том смысле, что они выражаемы через одно и то же определение [...] Действительно, одно и то же — «один человек» и «человек», «существующий человек» и «человек», и повторение в речи «он есть один человек» и «он есть человек» не выражает что-то разное.[1]

Немного ниже Аристотель добавляет ещё один аргумент в пользу обратимости сущего и единого: «Кроме того, сущность каждой вещи есть „единое“ не привходящим образом, и точно так же она по существу своему есть сущее»[2]. Это означает, в частности, что единое превосходит по общности категории, оно ничего не добавляет к сущему, никаких категориальных признаков. В этом смысле, ни сущее, ни единое не могут быть предикатами или акциденциями. Согласно Аристотелю, о едином говорится во многих значениях, также как и о сущем. Говоря точнее, о «едином» говорится в таком же количестве значений, в каком и о «сущем»: «Так что, сколько есть видов единого, столько же и видов сущего»[3], «ведь о едином говорится в стольких же смыслах, что и о сущем»[4]. Как и сущее, единое может быть обнаружено во всех категориях. Так, единое для сущности есть «то же самое», единое для количества — «равное», единое для качества — «сходное» и и т. д. Таким образом, как и сущее, единое не относится к категориям, оно внекатегорно, хотя и применимо к каждой категории: «а что единое некоторым образом означает то же самое, что и сущее, это ясно из того, что оно сопутствует категориям в стольких же значениях, что и сущее, и не

---

[1] *Аристотель*. Метафизика // Сочинения в 4-х т. Т. 1. М. : Мысль, 1976. С. 120.

[2] Там же. С. 120—121.

[3] Там же. С. 121.

[4] Там же. С. 256.

подчинено [особо] ни одной из них»[1]. Как трансценденталия, единое говорит не о том, *что* есть сущее, а о том, то оно вообще *есть*.

В первой главе книги X Аристотель выделяет четыре основных вида «того, что называется единым первично и само по себе, а не привходящим образом»[2]. Это 1) непрерывное, 2) целое, особенно по природе. Критерием их выделения является неделимость движения. Затем следует то, что имеет одно определение, из которого Аристотель выделяет два вида: 3) единое по числу, то есть единичное, и 4) единое по виду, то есть неделимое для понимания и сознания. Эти четыре вида единого имеют общую характеристику, что сводит смысл единого к неделимости: «все они единое потому, что в одних случаях неделимо их движение, в других — мысль о них или определение их»[3]. В результате, первичным смыслом единого для Аристотеля является неделимость: «быть единым — значит быть неделимым именно как определенным нечто и существующим отдельно либо пространственно, либо по виду, либо в мысли; иначе говоря, это значит быть целым и неделимым»[4]. Основное значение единого — неделимое, простое, несоставное. Поставить под вопрос обратимость единого и сущего означает поставить под вопрос неделимость и простоту сущего. Единое при этом, как кажется, теряет свой статус наиболее общего термина, тогда как многое его, напротив, приобретает. Успех этого предприятия зависит от того, можем ли мы построить теорию многого, не требующего единого, или теорию сущего, не предполагающую предварительного понятия единого. Способно ли средневековое понятие многого как трансценденталии нам в этом помочь? Чтобы это понять, рассмотрим подробно построения Фомы.

Прежде всего нужно сказать, что Фома различает «метафизическую» и «математическую» единицы. Первая внекатегорна и является трансценденталией, вторая же относится к категориям, а именно, к категории количества. Математическая единица является формой, в которой предстаёт метафизическое и трансцендентальное единство применительно к категории количества. Фома, в частности, обвиняет Авиценну в том, что он смешивает эти два понятия единого. Согласно Аристотелю, единое и многое противостоят друг другу как мера и измеряемое[5]. Поэтому в разных видах сущего единое выступает как «минимальное» количество, способное служить мерой для всего остального:

> ясно, что единое в существе своем, если точно указывать значение слова, есть прежде всего некоторая мера, главным образом для количества, затем для качества. А мерой оно будет, если оно неделимо — в одном случае по количеству, в другом — по качеству.[6]

---

[1] *Аристотель*. Метафизика. С. 257.

[2] Там же. С. 252.

[3] Там же. С. 252—253.

[4] Там же. С. 253.

[5] Там же. С. 265.

[6] Там же. С. 255.

Если трансцендентальное единство характеризуется неделимостью как таковой, то категориальное — специфической неделимостью конкретного вида сущего, например, количественной неделимостью единицы. Нас в настоящий момент интересует первое, но не второе.

Отнесение многого к трансценденталиям Фома проводит в ходе разрешения неясности во взаимном определении многого и единого. Действительно, если единое определяется негативно как неделимое, то оно следует за многим, то есть делимым. Более того, Аристотель, указывая, что единое определяется через многое, признаёт первичность последнего, хотя и со ссылкой на чувственность:

> А свое название и объяснение единое получает от своей противоположности — неделимое от делимого, потому что множество и делимое в большей мере воспринимается чувствами, нежели неделимое, так что благодаря чувственному восприятию множество по определению первее неделимого (Met 1054a 25).[1]

Однако с другой стороны, Аристотель определяет многое как совокупность единиц: «между тем то, что существует, всегда есть или одно, или многое, и каждое из многого есть одно»[2]. Он, таким образом, не признаёт множества, не составленного из единиц. Но тогда оказывается, что многое определяется через единое. Мы получили порочный круг. Для Фомы это представляет проблему, которую он разрешает, различая «делимое» и «многое»[3]. Если последнее составлено из единиц, то первое — не обязательно. Поскольку делимое не предполагает единого, оно может предшествовать ему. Многое же, будучи составлено из единиц, следует за единым. Тем самым, Фома избегает опасности порочного круга в определении многого и единого. В разных местах Фома излагает свой подход по-разному, мы рассмотрим лишь два характерных примера, с необходимостью упрощая его рассуждения.

В De veritate 1.1 Фома приводит список трансценденталий по отношению к тому, в какой последовательности они опознаются нашим интеллектом. Первое, что встречает интеллект, это сущее, ens. Трансценденталии затем добавляются к сущему, и это может происходить либо с сущим самим по себе (in se), либо с сущим в его отношении к другим. В первом случае трансценденталия может выражать нечто положительное или нечто отрицательное. В положительном смысле о сущем говорится как о вещи, res, а в отрицательном — как о неделимом, unum, поскольку единое есть неделимое сущее (ens indivisum). В отношении к другому сущему также выражаются двояко. В первом смысле говорится об отличии одного сущего от другого, и это выражается словом «нечто», aliquid:

---

[1] *Аристотель*. Метафизика. С. 257.

[2] Там же. С. 114.

[3] См. подробнее *Aertsen J. A.* Medieval Philosophy and the Transcendentals : the Case of Thomas Aquinas. Leiden ; New York ; Köln : Brill, 1996. Pp. 220 sqq.

«как о сущем говорится „единое“, поскольку оно неделимо в себе (indivisum in se), так о нём говорится „нечто“, поскольку оно отделено от других (ab aliis divisum)»[1]. Сущее может быть aliquid (то есть другим quid), только если оно является чем-то определённым, определённым сущим, что выражается трансцендентальным res. Последнее связано с quidditas, чтойностью, определением. Таким образом, разделение (divisio) возможно, лишь на основе «вещности» и определённости сущего. Тем самым, различие сущих логически вторично по отношению к их идентичности. Однако при этом связь идентичности с единством не является обязательной. Это видно ещё более ясно в De potentia 9.7, ad 15 где Фома описывает следующую последовательность появления понятий в интеллекте: 1) сначала понимается сущее, ens 2) затем — отрицание сущего, negatio entis, 3) на их основе определяется отделение одного сущего от другого, divisio, 4) затем, как отрицание предыдущего, понимается единое, unum, то есть неразделённое в себе (non esse in se divisum), и, наконец, 5) понимается многое, multitudo, как совокупность единых. О последнем Фома говорит: «вот это сущее понимается как отделённое от того сущего, и каждое из них едино в себе. Всякий раз как сущее понимается как отделённое от другого, многое понимается, только если каждое отделённое понимается как единое»[2].

В результате, проблема порочного круга разрешается. Единое является отрицанием не многого, а делимого. Многое же, с одной стороны, отрицает единое, но с другой — содержит его, поскольку многое это всегда многое единых. Фома поясняет: «единое устраняет не множественность, но разделённость, которая логически предшествует единому или множественности. Множественность же не устраняет единства, но устраняет разделённость всех элементов множества»[3]. Именно это последнее свойство позволяет Фоме говорить о трансцендентальности многого. В «Сумме теологии»[4] он говорит о двух типах деления. Первое является источником числа и является делением материальных вещей, то есть протяженности (континуума). Второе же деление формально, связано с различием форм и имеет место только в нематериальных вещах. Из него следует множественность, которую Фома называет трансцендентальной. Как таковая, она не относится ни к какой категории, в том числе, к количеству. Далее Фома поясняет: «так понимаемая множественность относится ко многому, о котором она сказывается, так же, как „единое“, которое обратимо с „сущим“, относится к „сущему“»[5]. Единое-трансценденталия не добавляет ничего к сущему, кроме

---

[1] *Aquinas T.* De veritate // Quaestiones disputatae. Tomus I. De veritate. Taurini, Romae : Marietti, 1949. Google Books: `vrgnAQAAIAAJ`. P. 3.

[2] *Aquinas T.* De potentia // Quaestiones disputatae. Tomus II. Taurini, Romae : Marietti, 1949. Google Books: `d7knAQAAIAAJ`. P. 244.

[3] *Фома Аквинский*. Сумма теологии. Часть первая. Вопросы 1-64. М. : Издатель Савин С. А., 2006. С. 399.

[4] Там же. С. 397.

[5] Там же. С. 398.

отрицания разделённости, оно обозначает неразделённое сущее; «и равным образом, — говорит Фома, — когда о вещах говорится „многое“, то так понимаемая множественность обозначает эти вещи таким образом, что каждая из них может рассматриваться как неразделенная»[1]. Трансцендентальное многое, таким образом, обозначает не просто множественность, но множественность единых, поскольку «в смысловое значение множественности включено то, что оно состоит из единичностей»[2]. Таким образом, трансцендентальное многое (multitudo) не только не исключает единства, но его предполагает. И наоборот, если сущее едино, то это не исключает того, что оно может участвовать в некотором многом. Фома вводит здесь то, что впоследствии Дунс Скот назовёт passiones disiunctae. Они представляют собой пару понятий, которые выступают в качестве трансценденталий не по отдельности, а совместно[3]. В нашем случае единое и многое относятся к трансценденталиям, поскольку, согласно Фоме, всё сущее подразделяется на единое и многое[4], и каждый их этих «подвидов» имеет своё трансцендентальное понятие. Но это означает, что multitudo выступает как трансценденталия по отношению к сущему-многому, а не к сущему-единому, то есть по отношению к некоторому множеству. При этом такое множество Фома всегда понимает как множество единиц, поэтому трансцендентальное многое не добавляет к нему ничего реального — оно лишь отрицает делимость каждого из элементов.

Несмотря на то, что единое и многое составляют трансцендентальное отношение, они всё же подчиняются некоторой иерархии — как мы видели, единое в логическом порядке идёт раньше многого. Это означает, что, если единое возможно без многого, то многое предполагает единое, поскольку является множественностью единиц. В результате, трансцендентальное многое, как его понимает Фома, не позволяет нам построить «онтологию без единого». Каждая из его трансценденталий, включая многое, реально совпадает со всеми остальными, хотя и может логически от них отличаться. У нас, однако, остаётся ещё одна возможность. Собственные Различения Фомы позволяют нам построить онтологию иначе. Если divisio или aliquid может мыслиться без unum, то не можем ли мы начать онтологию с разделения не-единых сущих? Для этого нам нужно положить res как делимое, а divisio — как разделение делимых сущих.

---

[1] *Фома Аквинский*. Сумма теологии. С. 398.

[2] Там же.

[3] Введение понятия passiones disiunctae можно считать показателем кризиса самой идеи трансценденталий. Действительно, первоначальным намерением был поиск терминов, взаимозаменимых с сущим, таких как единое или вещь. Но затем обнаружилось, что это возможно не во всех случаях. Не всегда нам достаточно одного такого термина — например, вместо только единого требуется говорить о паре «единое—многое». После этого, вообще говоря, могли бы появиться не только пары, но и тройки, четвёрки или даже бесконечные наборы, выступающие как трансценденталия только совместно. Насколько мне известно, ничего подобного в истории философии не было, хотя уже у Канта в качестве трансцендентальных выступают не единичные термины, но структуры.

[4] Там же. С. 397.

Это возможно, поскольку разделение определяется как отличие «этого» сущего от «того» и не содержит никакого указания на делимость сущих. Именно здесь нам могут помочь ресурсы современной математики. Рассмотрим далее, каким образом подобная онтология может быть описана средствами мереологии и теории множеств. Для этого, фактически, нам потребуется провести формализацию приведённой выше последовательности трансценденталий Фомы. Для простоты изложение будет схематическим. Эта формализация не претендует, разумеется, на «интерпретацию» схоластической онтологии. Последняя, в лице Фомы, служит нам лишь источником некоторых понятий и различений. Наш первичный предмет — философия Бадью и его идея «онтологии без единого».

§ 3.3. Счёт-за-одно: от «Парменида» к теориям множеств

В качестве важнейшего примера неконсистентного сущего Бадью приводит «многое без единого» из платоновского «Парменида». Это бесконечно дробящееся сущее, не встречающее в своём делении на части никакого предела. Бадью находит у Платона два типа многого: *πλῆθος*, которое он отождествляет с неконсистентным, и *πολλά* или консистентное (45). Первое это «многое без единого», «гетерогенная диссеминация», «чистое многое» «лишённое всякого предела своего развёртывания как многого» (43), а второе — это многое составленное из единых, композиция единиц, структурированное многое. В то же время, в качестве аксиоматики своей онтологии — «общей формы представления сущего» — Бадью выбирает аксиомы Цермело—Френкеля, причём одна из важнейших причин этого выбора состоит в том, что в них входят переменные лишь одного типа, а именно, множества, и при этом не содержится никакого предиката вида «быть множеством» (55). Согласно этой точке зрения, как платоновское многое, так и множества Цермело являются «чистым многим». Однако переход от платоновского «многого без единого» к теории множеств совершается здесь слишком быстро. Платоновское «многое без единого», вероятно, лучше описывается не столько теорией множеств, сколько мереологией, и мы затрагиваем здесь важную и, по существу, онтологическую проблему соотношения мереологии и теории множеств. Начиная с Лесневского мереология противопоставляется теории множеств, которую вслед за ним многие считают подозрительной и онтологически некорректной, в частности, за то, что она допускает лишние онтологические сущности. Каким тогда образом мы можем мыслить переход от мереологии к теории множеств? Данный раздел посвящён ответу на этот вопрос. Мы начнём с мереологии и проследим, какие изменения и решения требуются для того, чтобы перейти от неё к теории множеств.

Чистое множество

Мы будем пользоваться не теорией множеств, а более общим подходом — теорией алгебраических систем (см. § 2.4). Насколько корректно определение алгебраических систем с онтологической точки зрения? Имеем ли мы в нашем распоряжении объекты и структуры, необходимые для этого определения? На первый взгляд, с алгебраической точки зрения простейшей онтологической структурой является множество-носитель без операций и отношений. Здесь, однако, возникает важный вопрос: если мы рассчитываем описывать различные варианты множеств, то какую роль в этом играет множество-носитель? Не попадаем ли мы в порочный круг, используя множество для описания множества? Мы, однако, избегаем круга, если полагаем, что речь здесь идёт о множествах в разных смыслах. Нашей задачей как раз и будет описание различных понятий множества, начиная с простейших структур. Однако даже самое простое множество предполагает различие своих элементов, а также равенство каждого из них самому себе. Можем ли мы говорить об этих различии и равенстве как об отношениях? Строго говоря, нет, если отношение понимается как подмножество декартова произведения. Мы будем далее говорить о категории множеств, в которой объекты не обладают внутренней структурой, и такие понятия как декартово произведение определяются на основе связей множеств, а не их элементной структуры. Но даже там мы не можем избежать исходного предположения о существовании множества различённых объектов. Домен без структуры, если о нём вообще можно говорить, обладает лишь единственным свойством простого существования. С точки зрения трансценденталий, мы имеем здесь чистое сущее, ens. Вероятно, наиболее близкий исторический прецедент подобной онтологической структуры мы найдём в парменидовском едином или едином из первой гипотезы платоновского «Парменида». Что касается Бадью, то его неконсистентное многое также обладает сходными характеристиками (ни многое, ни единое, строго говоря). Однако неконсистентость, как мы увидим, гораздо более сложное понятие, поэтому мы пока не будем отождествлять это чистое сущее и неконсистентное многое Бадью.

Мы имеем, таким образом, «минимальную» структуру, необходимую для утверждения чего-то большего простого существования. Эту структуру я буду называть *чистым множеством*. Уильям Ловер называет его абстрактным множеством и возводит само понятие к Кантору[1]. Оно состоит из сущих, которые мы так или иначе способны различить. Однако какие-то из сущих, которые мы различаем, могут на самом деле оказаться равны, как, например, равны дроби 1/2 и 2/4 или суммы $1 + 2$ и $2 + 1$. Равенство определяется на множестве, на

---

[1] *Lawvere F. W.* Cohesive Toposes and Cantor's "lauter Einsen" // Philosophia Mathematica (3). 1994. Vol. 2. P. 5.

котором уже имеется различие. То, каким именно образом оно устанавливается, будем считать относящимся к определениям наших множеств. Мы будем лишь предполагать, что во всякой нашей теории оно удовлетворяет следующим аксиомам неизменности термов и формул при замене переменных равными объектами:

EQ1 $x = x$;
EQ2 если $x = y$, то $t[x/v] = t[y/v]$;
EQ3 если $x = y$ и $\varphi[y/v]$, то $\varphi[x/v]$.

Здесь $t[x/v]$ и $\varphi[x/v]$ это терм и формула, получающиеся из $t(\dots, v, \dots)$ и $\varphi(\dots, v, \dots)$ при замене свободной переменной v на x. В частности, рассмотрев формулы $y = v$ и $v = z$, увидим, что равенство удовлетворяет аксиомам *отношения эквивалентности* $\equiv$:

EQV1 (Рефлексивность) $x \equiv x$;
EQV2 (Симметричность) если $x \equiv y$, то $y \equiv x$;
EQV3 (Транзитивность) если $x \equiv y$ и $y \equiv z$, то $x \equiv z$.

Таким образом, фундаментальным отношением выступает различие, тогда как равенство определяется на его основе. При этом операция различения не просто устанавливает отношение различия между предсуществующими объектами, но конституирует сами эти объекты: различение и «порождение» объектов это одна и та же операция. В этом смысле, идея структурализма лежит в основании наших построений. Сама по себе операция различения не может быть описана как алгебраическая операция, но она является условием определения любой алгебраической системы, и в частности, определения равенства в такой системе. Алгебраическая система, в которой нет равенства, может существовать, а алгебраическая система, в которой нет различия, — не может (не будучи тривиальной).

Таким образом, простейшая алгебраическая система, которую мы рассматриваем, представляет собой множество, с определённым на нём отношением равенства. Такой способ рассмотрения множества напоминает его понимание в конструктивистской математике, в которой задание множества требует: 1) способа конструирования его элементов и 2) способа установления их равенства[1]. Однако вместо способа конструирования мы говорим об операции различения: элементы не конструируются «по одному», а возникают в результате этой операции как некоторая простая дифференциальная система. Как мы увидим, множество, о котором идёт речь в теориях множеств, подобных ZF, это более сложная конструкция. Мы можем сказать, что эти теории аксиоматизируют и экплицируют понятия не столько множества, сколько структур, на множествах определяемых, таких как отношение принадлежности, функции и пр.

---

[1] *Bishop E., Bridges D.* Constructive Analysis. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1985. P. 67.

Нижеследующее изложение является демонстрацией того, как можно поэтапно добавлять структуры к чистому множеству с тем, чтобы в результате получить теории типа ZF. Мы увидим, что онтология, соответствующая ZF, окажется довольно развитой онтологией, предполагающей ряд решений, которые, вообще говоря, могли бы быть иными или не приниматься вообще.

Онтология бесконечно делимых. Мереология

Продолжим экспликацию последовательности Фомы. Для этого представим её следующим образом. В начале идёт сущее (ens), затем вещь (res) или определённое сущее. После этого следует нечто (aliquid), то есть сущее в его отличии от других (также определённых) сущих (divisio). Отрицание этого деления приводит к единому (unum). Наконец, последним шагом является многое (multitudo) как многое единых. Мы теперь начинаем с сущего без единства, что означает не только то, что сущее само не обладает единством, но и то, что никакая его часть им также не обладает — каждое сущее делимо, каждая его часть также делима и так далее до бесконечности. Бадью находит такое «многое без единого» в платоновском «Пармениде» и специально его обсуждает в «Бытии и событии». Мы видим, что «многое без единого» уже не совпадает с чистым многим или многим с равенством, каким являются у нас носители алгебр; оно требует дополнительной структуры. Отношение таких сущих представляет собой отношение «часть-целое» и может быть описано средствами мереологии. Бадью, однако, к мереологии не обращается и пользуется сразу теорией множеств Цермело—Френкеля. Одной из наших задач будет прояснение связи этих двух подходов, поэтому наше построение в целом будет описывать переход от мереологически описанного платоновского «многого без единого» к теориям множеств типа Цермело—Френкеля (более конкретно: фон Неймана—Бернайса—Гёделя). При этом мы оставим за рамками обсуждения аксиому выбора, тем более, что теории без этой аксиомы являются вполне самостоятельными, и кроме того, аксиому регулярности, имея в виду существование нефундированных теорий[1].

В том, что касается трансценденталий, чистое множество позволяет нам помимо ens говорить об aliquid и division. Считая их стартовой точкой (то есть начиная с различия или отделения), мы можем понимать вещьность res как производное от различия. Однако мы ещё не в состоянии перейти к multitudo, поскольку не имеем средств говорить о делимости или неделимости. Для этого нам требуется добавить отношение «часть—целое».

Приводя в качестве примера неконсистентной множественности «многое без единого» из платоновского «Парменида» (41–48), Бадью говорит, что речь

---

[1] *Aczel P.* Non-well-founded sets / with a forew. by J. Barwise. Stanford, CA : Stanford University, Center for the Study of Language, Information, 1988. xx, 137. (CSLI Lecture Notes ; 14). См. дальнейшее обсуждение в § 5.2.

идёт о «множественности, лишённой всякого предела её развёртывания во многое (multiplicité privée de toute limite à son déploiement-multiple)» (43). Это бесконечно делимое множество, процесс деления которого не останавливается ни на каком атоме или неделимом. Однако, хотя термин «неконсистентный» указывает на некоторый род противоречивости (по меньшей мере у Кантора, у которого Бадью его заимствует), сама эта структура вполне обычна и может быть описана математически. В мереологии существует её аналог, который называется ганк (gunk). Этот термин введён Дэвидом Льюисом[1], который рассматривает два способа «делать одну вещь из многих»: 1) смесь (fusion) или сумма (sum) и 2) класс (class). Смесь транзитивна: всякая часть объединяющихся частей сама является частью смеси. Поэтому, в частности, смесь вещей совпадает со смесью их частей. Класс нетранзитивен и исходно содержит не части, а члены (members) или элементы (elements); при этом ни элементы элементов, ни части элементов класса сами не являются его элементами. Индивидом Льюис называет то, что является элементом, но само не имеет элементов. Наконец, *ганк* определяется следующим образом: это «индивид, все части которого сами имеют собственные части»[2]. Таким образом, он сам и всякая его часть может быть далее разбита на части. При этом ганк не совпадает с континуумом, как он обычно понимается в математике. Континуум состоит из точек, минимальных неделимых объектов, ганк же не имеет неделимых частей даже в виде точек. Существенно, однако, что ганк Γ может быть формально описан как совокупность объектов-частей, упорядоченных отношением включения $\subseteq$ и подчинённых следующим аксиомам (здесь $a \cup b$ — объединение, а $a \cap b$ — пересечение частей):

1. если $a \in \Gamma$ и $b \in \Gamma$, то $a \cup b \in \Gamma$;
2. если $a \in \Gamma$ и $b \in \Gamma$, то $a \cap b \in \Gamma$;
3. если $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, то $a \subseteq c$ (транзитивность);
4. $a \subseteq a$ (рефлексивность);
5. если $a \subseteq b$ и $b \subseteq a$, то $a = b$ (антисимметричность);
6. для всякого a существует b, такой, что $b \subseteq a$ и $b \neq a$ (т. е. $b \subset a$).

Математически, эти утверждения представляют собой определение решётки без минимального элемента[3]. Максимальный элемент, при этом, может как присутствовать, так и отсутствовать. Дополнительно, мы можем добавить отдельные аксиомы, гарантирующие существование бесконечных объединений и пересечений.

---

[1] *Lewis D.* Parts of Classes. Cambridge : Basil Blackwell, 1991. 155 pp.

[2] Ibid. P. 20.

[3] *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М. : Наука, 1972. С. 44 и сл.

Другой пример даёт нам так называемая бесточечная геометрия Уайтхеда, которую он определяет сходным образом[1]. В этой геометрии вместо точек Уайтхед рассматривает области, между которыми имеется отношение включения. Последнее подчинено ряду аксиом, среди которых аксиомы частичного порядка, а также две следующие:

- для любого a существует b, такое, что $a \subset b$,
- для любого a существует b, такое, что $b \subset a$.

Первая запрещает минимальную область, утверждая, что всякая область имеет собственную часть, а вторая — максимальную, утверждая, что всякая область включена в превосходящую её. Другими словами, в геометрии Уайтхеда не существует ни атомной, ни универсальной части (тотальности). Что касается точки, то в бесточечной геометрии она также может быть определена, но лишь как производное понятие. В качестве такого определения обычно выбирается фильтр (см. ниже **UF**, с. 116), т. е. бесконечная последовательность в определённом смысле сходящихся областей. При этом, в частности, можно показать, что области не могут иметь в качестве общей части точку, общей всегда должна быть некоторая область.

Возможны также более сложные конструкции, при которых онтология содержит как атомы, так и ганк. В любом случае, мы видим, что платоновское «многое без единого» описывается вполне стандартными математическими средствами, хотя в ZF ганк и не может быть определён. Мы можем говорить здесь об отсутствии единства, если будем понимать его как отсутствие неделимых сущих. Но мы можем также, в некотором смысле, говорить о счёте: каждая мереологическая часть есть единое, т. е. результат операции счёта, применённой к ганку, «многому без единого» — если счёт понимать как «аксиоматизацию». Соответственно, множественность становится консистентной, когда мы останавливаем процесс деления и полагаем некоторые части далее не делимыми. Я буду называть *онтологией частей* онтологию, в которой имеются части — сами делимые или неделимые — связанные лишь отношением включения. Поскольку это отношение определено как рефлексивное, в этой онтологии не возникает парадокса Рассела. Действительно, последний можно сформулировать для произвольного отношения R следующим образом. Пусть имеется отношение на некотором множестве. Расширим его с помощью некоторого элемента z, так, что zRx тогда и только тогда, когда $\neg xRx$. Тогда парадокс возникает, поскольку zRz тогда и только тогда, когда $\neg zRz$. Но в онтологии частей для отношения $\subseteq$ такое построение противоречит рефлексивности включения.

---

[1] *Whitehead A. N.* An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge. Cambridge : Cambridge University Press, 1919. 216 pp. ; *Whitehead A. N.* The Concept of Nature. Cambridge : Cambridge University Press, 1920 ; , см. обзор и аксиоматику в *Gerla G.*, *Miranda A.* Mathematical Features of Whitehead's Pointfree Geometry // Handbook of Whiteheadian Process Thought. In 2 vols. Vol. 2. Frankfurt : Ontos Verlag, 2008. Pp. 119–130. DOI: `10.1515/9783110333299.2.119`.

Ситуация симметрична способу исключения парадокса в ZF, в том смысле, что вместо запрета xRx запрещается $\neg xRx$.

Для частей может быть определена операция слияния, причём различными способами. В простейшем случае, мы можем просто потребовать, чтобы любые две части имели включающую их часть, т. е. чтобы существовала часть C, такая, что $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$. Но мы можем также потребовать, чтобы эта часть была в определённом смысле минимальна: слиянием будет тогда называться минимальная из таких частей. Этот смысл может быть различным, и, соответственно, нам понадобится добавить соответствующие аксиомы. Например, Льюис определяет слияние следующим образом: «Нечто является слиянием некоторых вещей, если и только если оно содержит их все как части и не имеет части, отделённой от них всех»[1]. Определение слияния как минимального, в частности, делает его единственным.

Таким образом, существует большое разнообразие вариантов дальнейшей аксиоматизации. Я буду пользоваться так называемой классической мереологией[2], т. е. полагать, что у нас есть многое с равенством — универсум частей M, на элементах которого определено отношение «a есть часть b», которое мы будем обозначать как $a \subseteq b$, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

M1 (Рефлексивность) $a \subseteq a$,

M2 (Транзитивность) Если $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, то $a \subseteq c$,

M3 (Антисимметричность) Если $a \subseteq b$ и $b \subseteq a$, то $a = b$.

Они являются, фактически, аксиомами частичного порядка PO. Таким образом, объекты нашей онтологии составляют частично упорядоченное множество.

Кроме того, мы предполагаем дополнительную аксиому:

M4 (Бесконечная делимость) Для любого a существует b, не равное a, такое, что $b \subseteq a$.

Она утверждает, что все объекты онтологии делимы до бесконечности. Другими словами, она утверждает отсутствие неделимых частей, то есть отсутствие единого (unum). Последнее, однако, не означает отсутствия идентичности сущих — каждый объект нашей онтологии определён и выступает как «нечто», aliquid, отличное от других «нечто». Мы имеем, таким образом, онтологию бесконечно делимых, в которой отсутствует единое в смысле неделимости.

---

[1] *Lewis D.* Parts of Classes. P. 73.

[2] См., например, *Hovda P.* What is Classical Mereology? // Journal of Philosophical Logic. 2009. Vol. 38. Pp. 55–82. DOI: `10.1007/s10992-008-9092-4`. Опираясь на классическую мереологию, мы сильно упрощаем ситуацию. Например, мы исключаем варианты, в которых сумма не равна супремуму, в которых сумма не единственна, принимаем классическую логику для бесконечных онтологий и т. д. Это упрощение оправдано, коль скоро мы интересуемся строением классических теорий множеств типа ZF или NBG.

Прежде чем переходить к последующим алгебраическим формулировкам, дадим несколько предварительных определений. В частично упорядоченных множествах верхней (соответственно, нижней) гранью подмножества X называется объект, больший (соответственно, меньший) всякого элемента X. *Супремумом* (*инфимумом*) или наименьшей верхней гранью (наибольшей нижней гранью) множества называется минимальная верхняя (максимальная нижняя) грань этого множества. Он обозначается $\sup X$ ($\inf X$) и может как принадлежать, так и не принадлежать самому X. Если супремум (инфимум) существует, то он единственен. *Верхней (нижней) полурешёткой* называется частично упорядоченное множество, в котором для любой пары объектов определен супремум (инфимум). Это означает, что супремум (инфимум) определён для всякого конечного непустого множества объектов. Если супремум (инфимум) определён для любого непустого множества объектов (включая бесконечные), то полурешётка называется *полной*. Если в верхней (нижней) полурешётке определён минимальный (максимальный), объект, то супремум (инфимум) определены также для пустого множества объектов. В этом случае полурешётка называется *ограниченной*, а соответствующий супремум (инфимум) представляют собой минимальный (максимальный) объект, который мы будем обозначать $\bot$ ($\top$). Если полурешётка является одновременно верхней и нижней, то она называется *решёткой*.

Объединение и пересечение объектов можно определять различными способами, из которых наиболее естественный, видимо, состоит в том, чтобы считать объединением (или, называя иначе, мереологической суммой) объектов наименьший объект, превосходящий их всех, то есть супремум, а пересечением (или мереологической разностью) — наибольший объект, меньший их всех, то есть инфимум. Вообще говоря, супремумы и инфимумы могут либо не существовать вообще, либо существовать, но не быть объектами нашей онтологии. Мы, однако, будем считать, что в нашей онтологии для любой пары объектов супремумы определены. Будем обозначать их $a \vee b$. Тогда они определены для любого конечного числа объектов. Другими словами, мы имеем верхнюю полурешётку. Её можно рассматривать как алгебру с бинарной операцией $\vee$, удовлетворяющей тождествам:

SL1 $a \vee a = a$;
SL2 $a \vee b = b \vee a$;
SL3 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

Описания в терминах частично упорядоченного множества и алгебры являются взаимно дополнительными[1]. Тождества SL сами по себе определяют верхнюю

---

[1] *Биркгоф Г.* Теория решёток. М. : Наука, 1984. С. 37 и сл.

полурешётку, причём порядок в ней может быть определён следующим образом:

$$a \subseteq b \quad \text{эквивалентно} \quad a \vee b = b. \tag{3.1}$$

Поэтому мы можем начинать с этих тождеств и затем определить порядок, либо начинать с порядка и затем определить мереологическую сумму как супремум; оба описания эквивалентны. Таким образом, с алгебраической точки зрения, наша онтология представляет собой верхнюю полурешётку с дополнительной аксиомой M4 (Бесконечная делимость), которую мы можем переписать в виде:

SL4 Для любого a существует b, не равное a, такое, что $a \vee b = a$.

В частности, эта аксиома означает. что в нашей онтологии нет пустой части, поскольку такая часть была бы неделимой.

Назовём эту алгебру M^{+}.

Онтологически, мы имеем набор объектов, для которых определена операция суммы и для каждого из которых имеется строго меньший его. «Единое» здесь означает «неделимое». В этой онтологии определены res, aliquid и divisio, но всё ещё не определены unum и multitudo.

Онтология неделимых

Непересекающиеся атомы

Для дальнейшего нам понадобятся ещё некоторые сведения об алгебраических системах в дополнение к изложенным в § 2.4. Рассмотрим подробнее алгебры. Они являются интерпретациями алгебраических теорий. Нас будут, в основном, интересовать двуместные операции, такие как сумма или объединение двух объектов. Будем обозначать алгебру с носителем A и сигнатурой F (состоящей только из функциональных символов) через $\langle A, F\rangle$. *Подалгеброй* алгебры $\langle A, F\rangle$ называется алгебра $\langle A^*, F^*\rangle$, где A^* это подмножество A, F^* состоит из ограничений операций $f_i^{(n)}$ на A^*, и подалгебра замкнута относительно её операций. Как можно видеть, подалгебра однозначно определяется её носителем A^*, поэтому мы иногда будем писать её просто как $\langle A^*, F\rangle$. Если B есть наименьшая подалгебра, содержащая множество B, то она называется *порождённой* множеством B, а множество B — порождающим для неё или системой образующих. Различные множества могут порождать одну и ту же алгебру.

Рассмотрим теперь множество переменных X, сигнатуру F и множество всех термов (то есть слов языка) с этими переменными, которое обозначим $T(X)$. Если мы на множестве термов определим операции следующим образом:

$$t_1, \dots, t_n \mapsto f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n),$$

то получим *алгебру термов* $F(X) = \langle T(X), F\rangle$. Она порождается множеством X и является свободной в следующем смысле. Алгебра $\langle A, F\rangle$ называется *свободной* в классе алгебр сигнатуры F, если всякое её отображение в любую алгебру $\langle B, F\rangle$ той же сигнатуры можно продолжить единственным образом до гомоморфизма алгебры $\langle A, F\rangle$ в алгебру $\langle B, F\rangle$. Свободные алгебры будут играть ключевую роль в дальнейших построениях. Интуитивно, они представляют собой алгебры, состоящие из всего, что может быть построено из X с помощью операций F, и при этом не содержат «ничего лишнего»[1].

Вернёмся теперь к алгебре частей M^+. Выберем некоторые части — для начала непересекающиеся — и удалим все, меньшие их. Для этого, в частности, нам нужно убрать аксиому **SL4**. Это соответствует тому, что мы рассматриваем некоторые части как неделимые, «забывая» об их частях, исключая их из онтологии. Будем называть части, рассматриваемые как неделимые, атомами или просто неделимыми. Часть a, рассматриваемую как неделимую, то есть как атом, будем обозначать $\{\, a \,\}$. Сумма $\{\, a \,\}$ и $\{\, b \,\}$ совпадает с суммой a и b, если последние не имеют общих частей, поскольку тогда их супремумы остаются теми же, что и в M^+. Мы имеем, таким образом, алгебру с одной операцией $\vee$, удовлетворяющей аксиомам **SL**, за исключением **SL4**, вместо которой имеем[2]:

SL5 (Атомы) Всякий объект есть часть суммы атомов.

Рассмотрим теперь все объекты, которые мы сможем получить из выбранного нами набора неделимых A с помощью операции суммы. Мы получим свободную алгебру, порождённую множеством A, в нашем случае — свободную верхнюю полурешётку. Обозначим её $\mathsf{FM}^+(A)$. Она является подалгеброй алгебры M^+.

Определим для $\mathsf{FM}^+(A)$ понятия класса, подкласса и элемента. *Классом* называется (мереологическая) сумма неделимых. *Подклассом* называется (мереологическая) часть класса. В частности, неделимые являются подклассами соответствующих классов. *Элементом* класса называется часть, если она, рассмотренная как неделимая, входит в состав этого класса. При этом частью класса является не элемент, а элемент, рассмотренный как неделимый, то есть атом: часть становится элементом, когда используется как неделимая для построения класса. Вообще говоря, на данном этапе мы могли бы не проводить различие между атомами и элементами, но оно нам понадобится в дальнейшем. Мы увидим, что различие между частью и частью, рассмотренной как неделимая, соответствует различию между объектом и множеством из одного объекта, то есть

---

[1] «No junk, no noise», по выражению Стива Ауди: *Awodey S.* Category Theory. Oxford : OUP, 2010. P. 18.

[2] Ср. *Shiver A.* How do you say ‘everything is ultimately composed of atoms’? // Philosophical Studies. 2015. Vol. 172, issue 3. Pp. 607–614. DOI: `10.1007/s11098-014-0321-0`.

синглетоном. Именно этим определяется выбор обозначения $\{a\}$ — неделимые, фактически, являются синглетонами. Однако это станет существенным лишь после того, как мы допустим классы в качестве элементов.

Нужно заметить, что понятие элемента вообще не обязательно для построения нашей теории на этом этапе. Мы могли бы считать исходными объектами классы и определить онтологию как верхнюю полурешётку. При этом неделимыми являлись бы минимальные классы, то есть классы, не имеющие собственных частей (заметим при этом, что у нас нет пустой части). То, что они кроме этого являются классами, состоящими из одного элемента, несущественно для нашей теории. Тем не менее, мы оставим это понятие, имея в виду дальнейшие построения.

Классы $\{a\} \vee \{b\} \vee \ldots$ будем обозначать как $\{a, b, \ldots\}$, где $a, b, \ldots$ — элементы класса. Я буду также писать $a \in \{a, b, \ldots\}$ для принадлежности элемента классу. Относительно операции объединения, если последнюю понимать как $\vee$, наши классы ведут себя аналогично обычным множествам, понимаемым как множества элементов. Например,

$$\{a, b\} \vee \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\},$$

поскольку и то, и другое равно $\{a\} \vee \{b\} \vee \{c\} \vee \{d\}$. Это неудивительно, поскольку одним из канонических примеров решётки являются подмножества некоторого множества, упорядоченные по включению.

В итоге, мы получили онтологию классов и элементов, в которой, однако, классы никогда не выступают элементами — это, так сказать, модель «плоских множеств». Онтология неделимых определяется как свободная алгебра $\mathsf{FM}^+(A)$ с операцией объединения $\vee$, порождённая набором неделимых — то есть частей, которые мы выбрали в качестве неделимых.

Пересекающиеся атомы

Пусть теперь части, которые мы выбираем в качестве неделимых, пересекаются. Если мы определим для них сумму $\vee$, то сможем построить алгебру, аналогичную предыдущей, определив затем классы, подклассы, элементы и частичный порядок на классах. Классы, однако, уже не обязательно будут совпадать с объектами алгебры M^+. Действительно, если в качестве неделимых мы выберем, например, объекты $\{a\}$ и $\{a \vee b\}$, то нам нужно будет отличать их сумму как атомов от мереологической суммы, которая будет просто совпадать с $a \vee b$:

$$a \vee (a \vee b) = a \vee b \neq \{a\} \vee \{a \vee b\}.$$

Поэтому при построении мы теперь не можем опираться на свойства частей, уже присутствующих в исходной мереологии. По этой причине введём операцию суммы аксиоматически как удовлетворяющую аксиомам SL (за исключением SL4). Элементы и принадлежность определяются аналогично. Операция объединения в классы будет тогда совершенно аналогична «набору» традиционно понимаемых множеств из элементов, то есть объектов-единиц, рассматриваемых как неделимые («посчитанных за одно»). Такие классы частично упорядочены согласно (3.1). Назовём получившуюся алгебру $\mathsf{Indiv}^+(A)$. Как видим, мы опять имеем верхнюю полурешётку, в которой супремум совпадает с $\vee$. Другими словами, мы получили алгебру, аналогичную предыдущей, хотя ни её объекты, ни супремумы не совпадают с исходными из алгебры M^+, а также онтологии **M**. В отличие от $\mathsf{FA}^+(A)$, алгебра $\mathsf{Indiv}^+(A)$ не является подалгеброй M^+. Она, однако, всё ещё представляет собой свободную алгебру, порождённую A. Операция суммирования позволяет нам порождать объекты, которые отсутствуют в M^+. Однако, как и раньше, по отношению к операции $\vee$ классы ведут себя как привычные множества.

Введение неделимых существенно трансформирует онтологию. Мереологическое целое не разделяется однозначно на части, в отличие от класса, который полностью определяет свои элементы (по этой причине аксиома объёмности или экстенсиональности является характерной чертой теоретико-множественных онтологий). Элемент и класс эксплицируют понятия единого и многого в смысле unum и multitudo. Именно с ними появляется у нас понятие множества как составленного из элементов, а также понятие принадлежности, на котором основаны традиционные теории множеств, такие как ZF или NBG.

Свойства нашей онтологии зависят от того, как мы определим операцию суммы атомов. В частности, от того, всякие ли объекты допускают суммирование. Для алгебры $\mathsf{Indiv}^+(A)$ это верно по определению, однако в онтологии в целом мы не обязаны этого предполагать. При отсутствии этого предположения онтология будет образована прямым произведением алгебр вида Indiv^+, каждая из которых порождена своим набором атомов. В этом случае не будет существовать универсального класса, то есть суммы всех атомов. Подобная онтология характерна для конструктивистских и теоретико-категорных теорий, таких как конструктивизм Е. Бишопа[1] или категорная теория множеств У. Ловера[2]. Однако, поскольку мы здесь ориентируемся на классические теории, подобные ZF или NBG, то будем с самого начала полагать, что универсальный класс в онтологии неделимых существует:

SL6 (Универсальный класс) Существует универсальный класс U, являющийся суммой всех неделимых.

Тогда, в соответствии с аксиомой SL5 (Атомы), всякий объект нашей онтологии будет частью универсального класса U.

---

[1] *Bishop E.* Foundations of Constructive Analysis. New York : McGraw-Hill, 1967. 382 pp.

[2] *Lawvere F. W.* An Elementary Theory of the Category of Sets (long version) // Theory and Applications of Categories. 2005. Vol. 11. Pp. 7–35.

Три способа описания онтологии неделимых

Мы видели, что онтология неделимых может быть представлена как алгебра, то есть как полурешётка. В этом случае домен теории состоит из классов, на классах определена двуместная операция $\vee$, а формулы сводятся только к равенствам. Аксиомами теории являются аксиомы полурешётки **SL**. Некоторые из классов являются неделимыми, но само это свойство является производным и может быть определено внутри теории.

Эквивалентно, онтология неделимых может быть описана как фрагмент пропозициональной теории. В этом случае, домен пуст, функции отсутствуют, имеются только атомарные формулы, каждая из которых соответствует неделимому, и логика содержит лишь одну логическую операцию $\vee$, «или». Аксиом решётки нет, они неявно содержатся в свойствах логической операции «или». В этом случае формулы изображают классы. В частности, роль универсального класса выполняет дизъюнкция всех (атомарных) формул.

Есть, однако, третий способ представления теории. В этом случае домен состоит из неделимых, функции отсутствуют, и для каждого из неделимых a определён одноместный предикат этости $h_a(x)$ (haecceitas, «этость», свойство быть *этим* a). Объём каждого h_a равен единственному объекту — соответствующему неделимому или атому. Интуитивно, можно интерпретировать $h_a(x)$ как $x \in \{ a \}$, то есть как свойство принадлежать соответствующему синглетону. Аксиомы также отсутствуют, но неявно содержатся в свойствах операции «или». Рассмотрим в качестве формул только дизъюнкции с одной свободной переменной, например, $h_a(x) \vee h_b(x) \vee h_d(x)$, и определим классы как такие формулы. Тогда операция «или» на этих классах будет удовлетворять аксиомам **SL** и теория окажется эквивалентной двум предыдущим. Классы в данном случае описываются как объединения синглетонов.

Таким образом, мы имеем три эквивалентных способа описания одной и той же структуры. Этой структурой фактически является верхняя полурешётка: в первом случае в явном виде, во втором — как полурешётка высказываний, в третьем — как полурешётка классов. Далее мы будем усложнять эту структуру и выбирать для её описания один из этих способов, имея в виду демонстрацию различных аспектов. Я буду называть теории первого типа алгебраическими, второго — пропозициональными, а третьего — синглетонными.

§ 3.4. Операции над классами

С алгебраической точки зрения мы определили онтологию классов как верхнюю полурешётку, то есть алгебру с единственной операцией $\vee$. Но она представляет собой более богатую структуру, и классы допускают более широкий набор операций, чем суммирование. В частности, представив теорию как синглетонную, мы можем определить одноместную операцию дополнения

$$\neg A := \text{ класс неделимых, не входящих в } A,$$

а затем следующие операции:

- Пересечение классов $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$.
- Импликация $(A \Rightarrow B) := (\neg A \vee B)$.
- Разность классов $(A \setminus B) := (A \wedge \neg B)$.

Эти операции напоминают логические, и мы могли бы предположить, что тем самым мы получили некоторую «логику». И действительно, определив операции в синглетонной теории, мы можем потом переписать её как пропозициональную с полным набором логических операций. Мы получим тем самым логику высказываний. Переписав её как алгебраическую теорию, получим булеву алгебру или алгебру классов. Эта связь алгебр с логикой хорошо известна. Онтология классов и логика высказываний являются двумя «взглядами» на одну и ту же структуру. Их связь является одним из проявлений также хорошо известного соответствия Карри—Ховарда[1].

Если говорить более точно, классическая мереология может быть описана следующим набором аксиом[2]:

CM1 (Транзитивность) Если $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, то $a \subseteq c$.
CM2 (Антисимметричность) Если $a \subseteq b$ и $b \subseteq a$, то $a = b$.
CM3 (Супремум) Любой конечный набор частей имеет супремум.
CM4 (Строгое дополнение) Любой объект a, кроме максимального, имеет дополнение $\neg a$, такое, что 1) $\neg a$ не пересекается с a, 2) любой другой объект является частью $\neg a$, если не пересекается с a, и является частью a, если не пересекается с $\neg a$.
CM5 (Отсутствие пустой части) Не существует пустой части.

Классическая мереология является расширением нашей системы **M**. Булева алгебра получается из неё при замене последней аксиомы на её отрицание. Таким образом, булева алгебра получается из классической мереологии путём добавления к ней пустой части. Этот результат не зависит от того, предполагаем ли мы существование неделимых. Для получения онтологии бесконечно делимых нам следует добавить аксиому M4 (Бесконечная делимость), а для получения онтологии неделимых и классов — аксиому **SL5** (Атомы), утверждающую, что все объекты построены из неделимых. Мы, однако, выше действовали иначе, мы с самого начала строили онтологию классов как свободную алгебру, порождённую неделимыми, поэтому всякий объект в ней является результатом

---

[1] См., например, *Howard W. A.* The formulae-as-types notion of construction // To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism. Boston : Academic Press, 1980. Pp. 479–490.

[2] *Hovda P.* What is Classical Mereology? Pp. 72 sqq.

применения к неделимым операции суммирования. В любом случае, с алгебраической точки зрения онтология классов и неделимых является не просто верхней полурешёткой, а булевой алгеброй, то есть дистрибутивной решёткой с дополнениями. Фактически, это булева решётка подмножеств универсума U.

Итак, онтологически, быть классом означает быть суммой неделимых, а быть неделимым означает участвовать в образовании класса путём суммирования. Как неделимое, так и класс обозначают не сущее, а способ бытия, и этот способ описывается тождествами SL. Иными словами, как класс, так и неделимое определены лишь в структуре, определённой операцией объединения и описываемой тождествами SL. Лишь поскольку имеется операция суммирования, имеются классы и неделимые. Можно было бы предположить, что понятие неделимого не зависит от онтологии классов. Например, можно считать неделимым то, что имеет лишь две части — само себя и пустую часть. Однако, как мы видели, для нашего понятия неделимого существенно не то, из каких частей оно состоит, а то, каким образом оно используется для построения других объектов, то есть классов. Онтология классов описывает способ бытия, которым неделимое обладает вне зависимости от того, какие части оно имеет. Оно обладает этим способом в точности потому, что мы пренебрегаем его строением, не учитываем его при суммировании. При этом различие между классом и неделимым в этой онтологии в некотором роде условно, поскольку неделимые также являются классами — суммой из одного «слагаемого».

Традиционное представление теории классов

Какие операции мы можем добавить к онтологии классов? Для того, чтобы соотнести алгебраическое представление с традиционным, нам нужно представить нашу онтологию как модель логики первого порядка. При этом, как и в других случаях, нашей задачей будет не строгое формальное построение — его можно найти в математических текстах, посвящённых теории множеств, — а понимание того, какие решения нам следует принять и какие конструкции допустить для построения теории множеств в том виде, в каком её принимает Бадью. Нашей основной аксиомой ниже будет аксиома CL4 (Существования классов), утверждающая, что для всякой формулы первого порядка существует класс, причём операции на классах соответствуют логическим операциям на формулах. В качестве руководства для построения теории выберем изложение Мендельсона[1]. Наши аксиомы будут практически совпадать с его за исключением некоторых деталей.

---

[1] *Mendelson E.* Introduction to mathematical logic. L., NY : CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015. Pp. 231 sqq.

Итак, пусть мы имеем неделимые, которые я буду обозначать строчными буквами $a, b, \ldots$. Они объединяются в классы, которые я буду обозначать заглавными буквами $A, B, \ldots$. Другими словами, домен нашей теории состоит из частей, на которых определена операция $\vee$ согласно SL, причём неделимые являются «минимальными» частями. Кроме того, имеются переменные $x, y, X, Y, \ldots$, возможно, с индексами. Вместо того, чтобы строить теорию алгебраически, будем предполагать классы уже существующими, а теорию представлять как набор отношений и аксиом, которым они подчиняются. Таким образом, теория не будет содержать операций; вместо них имеются лишь атомные формулы вида $x \in X$, причём квантификация будет проходить только по неделимым.

Равенство у нас было определено только для неделимых, расширим его на классы:

CL1 (Объёмности) $A = B$ тттк $\forall x(x \in A$ тттк $x \in B)$.

Эта аксиома, в частности, показывает отличие классов от мереологических сумм — в мереологии сумма не определяется частями; один и тот же объект может быть получен суммированием различных частей (так дом является суммой кирпичей, но также и суммой атомов этих кирпичей). Напротив, класс разбивается на неделимые однозначно (это утверждение требует уточнения для нефундированных теорий, см § 5.2).

Для того, чтобы так определённое равенство удовлетворяло аксиомам EQ, необходима ещё одна аксиома:

CL2 Если $a = b$, то $a \in A$ тттк $b \in A$.

Иначе говоря, одинаковые множества принадлежат одним и тем же классам.

Чтобы работать с многоместными предикатами и функциями, мы должны предварительно определить операцию объединения объектов в упорядоченные последовательности или кортежи. Для этого сначала введём аксиому

CL3 (Упорядоченной пары) Для любых неделимых a, b существует объект $\langle a, b\rangle$ — упорядоченная пара.

При этом неупорядоченная пара $\{a, b\}$ является классом, поэтому она не может выступать элементом других классов. Это приводит к тому, что мы не можем определить упорядоченную пару так, как это обычно делается, то есть как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Вместо этого, мы считаем упорядоченную пару $\langle a, b\rangle$ исходным понятием. В нашей теории образование упорядоченной пары является элементарной операцией, определённой для неделимых, но не для классов.

Далее мы можем определить упорядоченные тройки, четвёрки и т. д.:

$$\begin{aligned}\langle a, b, c\rangle &:= \langle\langle a, b\rangle, c\rangle, \\ &\dots \\ \langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle &:= \langle\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle,\end{aligned}$$

а также положим

$$\langle a\rangle := a.$$

Будем рассматривать только классы, состоящие из кортежей одной и той же длины. Например, не будем смешивать в один класс объекты с парами, пары с четвёрками и т. д. Классы кортежей длины n соответствуют формулам с n свободными переменными. Соответственно, логические операции определяются как операции над классами кортежей одной и той же длины или формулами с одним и тем же набором переменных. Для того, чтобы распространить их на произвольные формулы, нам требуются вспомогательные аксиомы, позволяющие преобразовывать в них список свободных переменных, приводя его к одному виду. Рассмотрим эти аксиомы с небольшими изменениями, в той форме, в какой они представлены в книге Мендельсона[1] (с сохранением его нумерации).

B1 (Класс принадлежности) Существует класс пар $\langle x, y\rangle$, таких, что $x \in y$.
B2 (Объединения) Для любых классов A и B существует класс Z, такой, что $x \in Z$ тттк $(x \in A \vee x \in B)$.
B3 (Дополнение) Для любого класса A существует класс объектов a, таких, что $a \notin A$.
B4 (Домен функции) Для любого класса упорядоченных пар A существует класс B, такой, что $x \in B$ тттк $\exists y(\langle x, y\rangle \in A)$.
B5 (Добавление фиктивной переменной) Для любого класса A существует класс упорядоченных пар B, такой, что $x \in A$ тттк $\langle x, y\rangle \in B$.
B6 (Перестановка переменных) Для любого класса A кортежей $\langle x, y, z\rangle$ существует класс B, такой, что $\langle x, y, z\rangle \in A$ тттк $\langle y, z, x\rangle \in B$.
B7 (Перестановка переменных) Для любого класса A кортежей $\langle x, y, z\rangle$ существует класс B, такой, что $\langle x, y, z\rangle \in A$ тттк $\langle x, z, y\rangle \in B$.

Аксиома B1 (Класс принадлежности) не требуется в теории классов. Вместо B2 (Объединения) у Мендельсона стоит соответствующая аксиома для пересечения. Я заменил её на аксиому объединения, которая определяет домен как верхнюю полурешётку. Вместе с B3 (Дополнение) она эквивалентна аксиоме Мендельсона. Аксиома B5 (Добавление фиктивной переменной) позволяет добавлять к

---

[1] *Mendelson E.* Introduction to mathematical logic. Pp. 236–237.

формулам фиктивные переменные, от которых их истинность на самом деле не зависит. Аксиома B4 (Домен функции) позволяет такие переменные убирать. Кроме того, как мы увидим, она позволяет интерпретировать квантор существования. B5 (Добавление фиктивной переменной) также позволяет определить декартово произведение множеств. Две последние аксиомы делают возможным перестановку переменных в нужном порядке.

Мы можем выбрать эти аксиомы или какие-то иные, в любом случае, будем считать, что такие аксиомы у нас имеются. Как можно видеть, они определяют операции на классах, которые мы допускаем: объединение, пересечение, дополнение, декартово произведение, а также манипуляции с кортежами. Помимо них они позволяют также определить кванторы как операции над классами. Действительно, рассмотрим для примера двуместный предикат $P(x, y)$. При фиксированном x он задаёт класс таких y, что $P(x, y)$. Соответственно, мы имеем семейство классов $A[x]$, индексированных x. Тогда предикат $\forall x P(x, y)$ соответствует пересечению классов этого семейства, а предикат $\exists x P(x, y)$ — его объединению. Действительно, пересечение классов состоит из тех y, для которых существует $P(x_i, y)$ для всех x_i, то есть во всех классах семейства. Объединение же состоит из тех y, для которых существует $P(x_i, y)$ хотя бы в одном x_i, то есть хотя бы в одном классе семейства. В общем случае вместо y мы имеем набор переменных $y_1, \dots, y_n$ и квантор $\forall$ соответствует пересечению классов семейства $P(x_i, y_1, \dots, y_n)$, а квантор $\exists$ — их объединению. Что же касается одноместных предикатов, то в их случае $P(x)$ не зависит ни от какого y, поэтому соответствующие классы семейства будут либо пустыми, либо равными универсуму. Соответственно, замкнутая формула $\forall x P(x)$ будет соответствовать пустому классу, если она ложна, и всему универсуму, если она истинна, то есть если все классы семейства непусты (а значит, равны универсуму). Аналогично, замкнутая формула $\exists x P(x)$ будет соответствовать пустому множеству, если она ложна, и всему универсуму, если она истинна, то есть если существует хотя бы один непустой класс в семействе (равный универсуму). Пустой класс и универсум играют здесь роль истинностных значений, соответственно, $\bot$ и $\top$. Их объединение и пересечение совпадают с элементарными логическими операциями над истинностными значениями:

$$\begin{array}{ll} \bot \wedge \top = \bot & \varnothing \cap U = \varnothing \\ \bot \vee \top = \top & \varnothing \cup U = U \end{array}$$

В результате, аксиома B4 (Домен функции) определяет класс, являющийся объединением семейства классов, заданных y, то есть обеспечивает интерпретацию квантора существования. Квантор всеобщности затем определяется обычным образом: $\forall x \varphi(x) := \neg \exists x \neg \varphi(x)$.

В итоге, мы получим следующее фундаментальное положение, которое заменяет аксиомы B:

CL4 (Существования классов) Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$ логики первого порядка существует класс

$$A(X_1,\dots,X_m)=\{\langle x_1,\dots,x_n\rangle \mid \varphi(x_1,\dots,x_n,X_1,\dots,X_m)\}.$$

Здесь $X_1,\dots,X_m$ — параметры.

Одновременно, мы получили соответствие между операциями над классами и логическими операциями над формулами. Кроме того, если наша онтология бесконечна, мы можем добавить:

CL5 (Бесконечности) $(\forall X)(\exists Y)(X\neq Y\wedge X\subseteq Y)$.

Аксиомы CL позволяют ввести понятия подкласса, декартова произведения, отношения и т. д.:

$$\begin{aligned}
\text{Подкласс } X\subseteq Y &= \{x \mid x\in Y\wedge\psi(x)\}\\
\text{Декартово произведение } X\times Y &= \{\langle x,y\rangle \mid x\in X\wedge y\in Y\}\\
\text{Отношение } R\subseteq X\times Y &= \{\langle x,y\rangle \mid x\in X\wedge y\in Y\wedge\psi(x,y)\}\\
\text{Функция } X\to Y &= \{\langle x,y\rangle \mid x\in X\wedge y\in Y\wedge(\exists! y)\psi(x,y)\}\\
\text{Область определения функции } F &= \{x \mid \langle x,y\rangle\in F\}\\
\text{Множество значений (образ) функции } F &= \{y \mid \langle x,y\rangle\in F\}.
\end{aligned}$$

В итоге, онтология классов представляет собой верхнюю полурешётку, к которой можно добавить структуру, достаточную для интерпретации логики первого порядка. Она оказывается моделью теории первого порядка с предикатами $P_A(x)$ для каждого класса A, которые можно интерпретировать как $x\in A$. Представляя эту теорию как синлетонную, получим, что каждый класс представлен формулой с одной переменной вида $\bigvee_i h_i(x)$. В этом случае, хотя формально мы можем провести различие между элементами и синглетонами (то есть между объектами a и предикатами этости $h_a(x)$), это различие ни в чём существенном не проявляется. Это связано с тем, что в качестве элементов в онтологии классов выступают только неделимые, но не классы. В этом основное отличие онтологии классов CL от традиционной теории множеств. В ней классы и элементы онтологически разделены, это различные типы объектов. В теориях же, подобных ZF, это разделение нарушается — один и тот же объект может быть как классом, так и элементом. Поэтому нашим следующим шагом должно быть расширение отношения принадлежности на классы.

§ 3.5. Классы как элементы

Неделимое является способом бытия, поэтому быть неделимым может самое разное сущее. В частности, одно и то же сущее может быть как классом, так и неделимым. В этом случае класс становится элементом другого класса. Парадоксы препятствуют тому, чтобы все классы могли выступать как элементы.

Действительно, для любого класса мы всегда можем построить другой класс, который не может быть элементом первого. Примером может служить класс Рассела $\{ x \in X \mid x \notin x \}$, который не может принадлежать X (см. выше § 2.6). Поскольку все классы не могут быть элементами, мы выберем лишь часть из них, допуская, что лишь они могут выступать как неделимые. Это хорошо известный подход, предложенный фон Нейманом. Условно можно назвать эти классы «малыми». Наша аксиоматика должна тогда быть скорректирована так чтобы учесть различие «малых» и «больших» классов, поскольку теперь для первых мы допускаем операции, которые раньше допускали лишь для неделимых. Кроме того, вместо неделимых мы будем говорить о множествах, имея в виду, что все объекты в нашей теории в конце концов окажутся либо множествами, либо собственными классами (то есть классами, не являющимися множествами, не выступающими как элементы). Как мы увидим, в результате мы получим аксиомы фон Неймана—Бернайса—Гёделя, поэтому я буду обозначать их как NBG. В этом разделе условия, налагаемые на «малые» классы, порой выглядят произвольными, но ниже мы попробуем дать им более внятное обоснование с другой точки зрения. Здесь же они изложены так, чтобы показать связь аксиоматики CL с NBG.

Как это часто принято, ниже множества обозначаются строчными буквами, а классы — заглавными. Соответственно, в кванторах $\forall x$ и $\exists x$ предполагается, что квантификация происходит только по множествам (что естественно, поскольку классы не могут быть элементами).

Первые две аксиомы, определяющие равенство для классов, остаются без изменений:

NBG1 (Объёмности) $A = B$ тттк $\forall x(x \in A$ тттк $x \in B)$.
NBG2 Если $a = b$, то $a \in A$ тттк $b \in A$.

В отличие от CL, в NBG принадлежность класса $\{ x, y \}$ другим классам не обязательно запрещена. Более того, если пара является множеством, то возможно определить упорядоченную пару обычным образом как $\langle x, y \rangle := \{ \{ x \}, \{ x, y \} \}$, причём она окажется множеством, то есть индивидом. Это позволяет нам сформулировать аксиому пары так, как это обычно делается:

NBG3 (Пары) Пара множеств $\{ x, y \}$ есть множество.

При этом аксиома CL3 (Упорядоченной пары) будет из неё следовать, что в нашем нынешнем контексте означает, что упорядоченная пара может служить элементом. Кроме того, из аксиомы следует, что синглетон $\{ x \} = \{ x, x \}$ является множеством.

Следующая аксиома отличается от CL4 (Существования классов) тем, что мы явно указываем, что квантификация должна проходить по индивидам, которые у нас теперь являются множествами. Нужно заметить, что это не увеличивает набор допустимых формул — всё, что мы ранее считали индивидами, теперь считается множествами и поэтому входит в область квантификации. В этом смысле, эта аксиома практически не отличается от CL4 (Существования классов):

NBG4 (Существования классов) Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m)$ логики первого порядка, не содержащей квантификации по классам, существует класс

$$A(X_1, \dots, X_m) = \{\, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid \varphi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_m) \,\}.$$

Здесь $X_1, \dots, X_m$ — параметры.

Эта аксиома называется аксиомой выделения. Одним из её следствий является существование пустого класса $\varnothing$.

Аксиома бесконечности теперь «специфицируется». Вместо утверждения о том, что всякий класс имеет больший его, мы строим специфический класс, состоящий из множеств и обладающий подобным свойством. Точнее говоря, мы строим последовательность множеств, такую, что для каждого множества x из этой последовательности существует расширяющее его множество $x \cup \{\, x \,\}$. Однако теперь мы также утверждаем, что получившаяся последовательность составляет множество, а не собственный класс (мы увидим ниже, что это утверждение требует уточнения).

NBG5 (Бесконечности) Класс I, определяемый формулой

$$\varnothing \in I \wedge \forall x (x \in I \Rightarrow x \cup \{\, x \,\} \in I),$$

есть множество.

Следующие аксиомы не могли появиться в CL, поскольку требуют понятия элемента элемента. Они утверждают, что две операции над множествами не выводят за пределы набора множеств.

NBG6 (Объединения) Объединение элементов множества есть множество.

NBG7 (Степени или подмножеств) Степень множества есть множество.

Следующая аксиома также относится к характеристике «малых» классов. В системе CL аналогичное утверждение для классов вытекало из аксиомы существования. Теперь же мы уточняем, в каких случаях мы в результате операции получаем множество, а не класс.

NBG8 (Подстановки) Если класс F — функция и a — множество, то существует множество, содержащее $F(x)$ для всех $x \in a$, входящих в область определения F. Другими словами, $\{\, F(x) \mid x \in a \,\}$ есть множество.

Следующие две аксиомы завершают аксиоматику **NBG**. Мы их условились не рассматривать, я их привожу лишь для полноты.

NBG9 (Регулярности) $(\forall x \neq \varnothing)(\exists y)(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing)$

NBG10 (Выбора) Существует функция F, такая, что $F(x) \in x$ для всякого непустого x.

Мы получили аксиомы NBG[1]. Их конкретная форма не всегда очевидна и была выработана в результате довольно длинной и драматичной истории преодоления проблем «наивной» теории множеств. Вместо того, чтобы пытаться понять их смысл в том виде, в котором они представлены здесь, мы воспользуемся другим представлением теорий типа ZF, а именно, алгебраической теорией множеств. Но прежде чем мы к ней перейдём, посмотрим внимательнее, что мы получили.

Если мы «забываем» о происхождении неделимых, т. е. об исходной онтологии, то получаем онтологию, основанную на аксиомах **M1** (Рефлексивность), **M2** (Транзитивность), **M3** (Антисимметричность), **SL5** (Атомы), **SL6** (Универсальный класс), причём вне зависимости от того, допускаем ли мы наложение неделимых. Аксиоматика остаётся той же, и мы оперируем в обоих случаях с классами *как если бы* они были объектами исходной онтологии. В этом смысле, даже при допущении наложения, хотя у нас появляются новые объекты, мы всё ещё не выходим за пределы «плоских» множеств и не имеем возможности перейти к традиционной теории множеств. Для этого, как показывает Д. Льюис в своём подробном анализе[2], нам требуется понятие синглетона, которое он сам называет загадочным. Оно служит для обозначения уже встречавшегося нам различия между объектом и тем же объектом, рассмотренным как неделимая единица. Мы можем надеяться, что оно является удачным претендентом на экспликацию понятия счёта у Бадью, поэтому рассмотрим его подробнее.

В традиционной теории множеств синглетон это множество из одного элемента. Это означает, в частности, что оно не совпадает с этим элементом. Уже это выводит синглетон за пределы мереологии, поскольку в последней целое, состоящее из одного объекта (как части), совпадает с самим этим объектом. Льюис определяет синглетон как функцию, переводящую объекты мереологии в другие объекты — их синглетоны. Функция подчиняется определённым аксиомам[3], и классы затем определяются как мереологические суммы синглетонов. Мы видим сходство с нашей онтологией неделимых, поэтому определим синглетон как неделимое этой онтологии. Другими словами, пусть *синглетон* — это часть исходной онтологии, рассматриваемая как единица (т. е. взятая как

---

[1] Ср. *Mendelson E.* Introduction to mathematical logic. Pp. 231–247 ; а также *Jech T.* Set Theory. P. 70 ; *Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A.* Foundations of set theory. P. 128.

[2] *Lewis D.* Parts of Classes. Pp. 29 sqq.

[3] Ibid. Pp. 95 sq.

единое; единое в данном случае является синонимом неделимого), а *класс* — это мереологическая сумма синглетонов. Будем также называть *элементом* (класса) часть, синглетон которой участвует в построении класса. Оставим для синглетона и класса прежние обозначения $\{ a \}$ и $\{ a, b, \ldots \}$. Заметим, что синглетон согласно нашему определению также является классом, а именно, классом с одним элементом. Тем самым, мы отличаем часть (элемент) от неё же, рассматриваемой как неделимая единица (синглетон). Помимо прочего, это означает, что определение синглетона неотделимо от определения класса, т. к. элемент рассматривается как неделимый именно в составе класса и по отношению к другим элементам класса.

Как мы видели, в случае неделимых без общих частей различие между синглетоном и его элементом, фактически, исчезает. Это позволило нам определить операции с синглетонами и классами аналогично операциям с частями и затем расширить их на случай неделимых с общими частями. Мы видели, что в этом случае мы не выходим за рамки онтологии неделимых, несмотря на то, что при этом появляются новые по отношению к исходной онтологии объекты. При этом, однако, у нас остаётся чёткое различие между элементами и классами. Ситуация радикально изменяется, если мы допускаем их смешение, т. е. допускаем, что классы (которые ведь также являются частями) сами могут иметь синглетоны и, следовательно, рассматриваться как неделимые. В конечном счёте, именно это допущение позволяет нам перейти к теории множеств от мереологии. При этом нам нужно быть осторожными, т. к. не всякий класс может иметь синглетон, т. е. рассмотрен как единица; стандартный диагональный аргумент быстро приводит нас к парадоксальному вопросу «Участвует ли в построении класса синглетон этого класса в случае класса, построенного из синглетонов классов, не участвующих в собственном построении?».

Мы видели (§ 3.3), что, если за единицы принимаются части, не пересекающиеся друг с другом, то возможно установить взаимно однозначное соответствие между классами и частями, превышающими эти единицы в смысле порядка $\subseteq$. Ситуация изменяется, если за единицы принимаются части, которые пересекаются друг с другом. Тогда мы не сможем установить взаимно однозначного соответствия. Действительно, доказательство этого повторяет диагональный аргумент Кантора. Пусть имеется взаимно однозначная функция $f(x)$, переводящая части в классы. Рассмотрим класс $A = \sum(\{ x \} \nsubseteq f(x))$. Тогда существует y, такой, что $f(y) = A$. Вопрос о том, является ли $\{ y \}$ частью A, т. е. верно ли, что $\{ y \} \subseteq A = f(y)$, приводит к парадоксу, откуда мы делаем вывод, что такой функции не существует. В случае неналагающихся неделимых такой вопрос даже не может быть поставлен, поскольку часть, соответствующая классу (если только он не является синглетоном), не может быть синглетоном никакого другого класса. Но его нельзя поставить и в случае налагающихся неделимых, если мы не допускаем классы в качестве «как если бы» неделимых. Неделимость (следовательно, единство) определяется здесь не на основе «внутреннего строения», как бы оно ни понималось, но структурно — быть неделимым означает выступать элементом класса в рамках онтологии неделимых. Таким образом, теория множеств требует понятия не просто элемента или класса, а элемента элемента или класса классов. Иначе говоря, понятие синглетона отлично от понятия элемента именно тем, что содержит в себе этот «второй уровень».

Чтобы прояснить роль операции образования синглетона, воспользуемся алгебраической теорией множеств (AST[1]). В алгебраической теории множеств модели строятся как алгебры с двумя операциями: объединения и образования синглетона. Для их построения в некотором подходящем универсуме классов $\mathcal{C}$ выделяется набор классов $\mathcal{S}$, которые считаются «малыми» классами или множествами. Затем в универсуме выбирается верхняя полурешётка, то есть частично упорядоченный класс, в котором каждый «малый» подкласс имеет супремум. В нём определяется унарная операция образования синглетона, переводящая класс в его синглетон. Она описывает тот факт, что данный класс способен быть элементом других классов. Тем самым, определяется алгебра, которую Жуайяль и Моердийк называют ZF-алгеброй, поскольку она служит моделью теорий, подобных ZF. В частности, можно рассмотреть свободные ZF-алгебры $V(A)$, порождённые некоторым множеством A. Они оказываются кумулятивной иерархией множеств, построенных из элементов A как атомов. Так, $V(\varnothing)$ представляет собой иерархию фон Неймана, то есть универсум множеств, построенных из пустого множества с помощью операций образования синглетона и объединения. Формально, ZF-алгебра определяется как полная верхняя полурешётка с определённой на ней операцией образования синглетона (или последователя). В книге Жуайяля и Моердийка теория строится как категорная для того, чтобы проследить связь с теорией топосов. В качестве универсума $\mathcal{C}$ обычно выбирается вариант гейтинговой категории — в любом случае, категории, достаточной для интерпретации интуиционистской логики первого порядка (в этой книге, в частности, это гейтингов предтопос). Сейчас, однако, нам достаточно более ограниченного подхода. Мы выберем в качестве $\mathcal{C}$ онтологию классов **CL**. Здесь возможны варианты. Если, например, в качестве классов выбираются классы обычной теории **NBG**, то множествами будут её множества (в отличие от собственных классов). Но можно также рассматривать в качестве $\mathcal{C}$ счётные множества, тогда $\mathcal{S}$ будут составлять конечные множества и т. д. Мы увидим ниже более детально, каким образом связаны $\mathcal{C}$ и «малые» множества.

---

[1] *Joyal A., Moerdijk I.* Algebraic Set Theory. Cambridge : CUP, 1995. 123 pp. ; более современная версия: Relating First-Order Set Theories, Toposes and Categories of Classes / S. Awodey [et al.] // Annals of Pure and Applied Logic. 2014. Vol. 165, no. 2. Pp. 428–502. DOI: `10.1016/j.apal.2013.06.004` ; обзор существующих подходов см.: *Berg B. van den, Moerdijk I.* A Unified Approach to Algebraic Set Theory // Logic Colloquium 2006. Cambridge University Press, 2009. Pp. 28 sqq.

«Малые» классы или множества определяются аксиоматически как подкласс $\mathcal{C}$, удовлетворяющий условиям[1]:

Set1 Пустой и одноэлементный классы малы.
Set2 Объединение малого семейства малых классов мало.
Set3 Дизъюнктивная сумма двух малых классов мала.
Set4 (Подстановки) Если $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — сюръекция и $\mathcal{S}$ мал, то $\mathcal{T}$ также мал.
Set5 (Коллекции) Если $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — сюръекция и $\mathcal{T}$ мал, то $\mathcal{S}$ содержит такой подкласс $\mathcal{S}'$, что $\mathcal{S}' \to \mathcal{T}$ — сюръекция.
Set6 (Экспоненциала) Для всякого класса $\mathcal{C}$ и всякого малого класса $\mathcal{S}$ существует класс $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}$ функций из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{C}$.
Set7 Существует «универсальный» малый класс, то есть существует функция $\pi : E \to U$, такая, что для всякого малого $\mathcal{S}$ существует $x \in U$, для которого $\mathcal{S}$ изоморфно $\pi^{-1}(x)$.

Сравним эти аксиомы с **NBG**. Предположим, что выполнены **CL** и **Set**. Что мы можем сказать о выполнении **NBG**? Аксиомы объёмности и равенства выполняются для всякого класса. Аксиома пары выполнена, так как синглетоны и объединения малых классов являются малыми. Аксиома существования классов выполнена, как и ранее, поскольку квантификация не распространяется на классы. Аксиома бесконечности может быть и не выполнена, если, например, в качестве малых мы рассматриваем конечные множества. Однако в случае бесконечных множеств она выполняется. Аксиома объединения выполнена в силу того, что упорядоченный набор $\mathcal{S}$ имеет супремумы. Аксиома **NBG8** (Подстановки) совпадает с аксиомой **Set4** (Подстановки). Аксиома **Set5** (Коллекции) добавлена в AST, поскольку последняя имеет дело с более широким набором теорий, чем ZFC или NBG. В **NBG** она эквивалентна **NBG8** (Подстановки). Аксиомы регулярности и выбора лежат за пределами нашего рассмотрения.

Остаётся аксиома **NBG7** (Степени или подмножеств). В AST она выполняется, поскольку относится к свойствам выстраиваемых алгебр. Именно их нам следует рассмотреть подробно. Мы рассмотрим два способа их описания — как алгебр над эндофункторами и как алгебр над монадами. Однако прежде чем мы к ним перейдём, нам нужно познакомиться с основными понятиями теории категорий.

§ 3.6. Основные сведения из теории категорий

Категории будут нам особенно важны во второй части, когда мы будем рассматривать феноменологию Бадью. В ней он переходит от теоретико-множественного языка к категорному. Саму теорию категорий можно рассматривать

---

[1] *Joyal A., Moerdijk I.* Algebraic Set Theory. Cambridge : CUP, 1995. P. 2.

как форму структурализма[1]. Это, в частности, означает, что она характеризует объекты с точностью до изоморфизма. С точки зрения онтологии Бадью это означает, что речь в ней идёт не о сущем, а о способах его бытия. Основной тезис «Бытия и события» не только остаётся в силе, но получает ещё большее подкрепление. Если математика есть онтология, то в теории категорий этот факт становится ещё более явным.

Категория представляет собой конструкцию высокого уровня абстракции и определяется как совокупность объектов и стрелок (или морфизмов), переводящих одни объекты в другие и удовлетворяющих определённым условиям:

CAT1 Каждой стрелке f категории соответствует два объекта a и b, называемые началом (источником, областью определения, областью, доменом domain) и концом (целью, областью значений, кообластью, кодоменом codomain); это записывается как $f\colon a \to b$ или $a \xrightarrow{f} b$, а начало и конец стрелки обозначаются через $\operatorname{dom} f$ и $\operatorname{cod} f$.
Множество морфизмов из объекта a в объект b обозначается $hom(a, b)$.

CAT2 Каждому объекту соответствует единичная или тождественная стрелка: $1_a\colon a \to a$.

CAT3 Для каждой пары стрелок f и g, таких, что $\operatorname{cod} f = \operatorname{dom} g$, существует стрелка, называемая композицией $g \circ f\colon \operatorname{dom} f \to \operatorname{cod} g$. Т. е. для двух стрелок $f\colon a \to b$ и $g\colon b \to c$ композиция переводит a в c:

$$g \circ f\colon a \to c.$$

CAT4 Выполнен закон ассоциативности для стрелок: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Это означает, что скобки в таких выражениях можно опускать.

CAT5 Для каждой стрелки $f\colon a \to b$ верно, что $f \circ 1_a = f = 1_b \circ f$.

Поскольку единичная стрелка однозначно связана с объектом, то технически вполне возможно отождествить объекты с единичными стрелками, и тогда категория будет содержать только стрелки.[2] Однако это мало что добавляет к нашему рассмотрению, хотя и подчёркивает, что структура категории задаётся именно стрелками, а не объектами. В этом смысле, теория категорий является структуралистской теорией, она не интересуется «внутренним строением» объектов. Говоря точнее, она интересуется им лишь в той мере, в какой оно определяет набор морфизмов. Всё, что теория категорий знает о внутреннем строении объектов, задаётся её морфизмами.

Одним из важных примеров категории является категория множеств (см. ниже пример 2 на с. 65), в которой объектами являются множества, а стрелками — функции на множествах. В категории могут быть определены операции

---

[1] Ср. `http://plato.stanford.edu/entries/category-theory/`.

[2] См., например, *Маклейн С.* Категории для работающего математика. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с. С. 19—20, а также 320 и сл.

на объектах, которые в случае категории множеств совпадают с известными операциями, такими как декартово произведение $a \times b$ или дизъюнктивное объединение. Кроме того, для каждого объекта в категории можно определить подобъекты (не во всякой категории, однако, существующие), которые в случае категории множеств совпадают с подмножествами. В других категориях те же операции могут оказаться более сложными конструкциями, которые, однако, обладают во многом теми же свойствами. На этом пути обнаруживается сходство очень далёких друг от друга областей математики.

Для двух категорий можно определить отображение из одной в другую, называемое функтором, если оно сохраняет категорную структуру (функтор, таким образом, является гомоморфизмом категорий). Формально, (ковариантным) *функтором* F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ называется отображение, ставящее в соответствие каждому объекту $a \in \mathcal{C}$ объект $F(a) \in \mathcal{D}$ и каждой стрелке $f\colon a \to b$ стрелку $F(f)\colon F(a) \to F(b)$, такую, что

- для каждого объекта a верно, что $F(1_a) = 1_{F(a)}$, т. е. единичная стрелка объекта a переводится в единичную стрелку соответствующего ему объекта $F(a)$,
- для каждой пары стрелок f и g верно, что $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, т. е. композиция стрелок переводится в композицию их образов.

Таким образом, функтор сохраняет dom, cod, единичные стрелки и композиции. Для функтора из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ будем писать $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ или $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$. Мы увидим ниже, что множества вместе с функциями между ними составляют категорию $\mathcal{S}et$, поэтому в качестве простого примера функтора можно привести функтор $\mathcal{P}\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$, который переводит каждое множество в его множество-степень. Строго говоря, так определяется ковариантный функтор. Определение *контравариантного функтора* получается из него обращением стрелок. Другими словами, контравариантный функтор переводит стрелки $a \to b$ в стрелки $F(b) \to F(a)$ (со сменой направления).

Каждой категории $\mathcal{C}$ соответствует *двойственная* (opposite) категория $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, которая получается из неё обращением всех стрелок: то есть категория и двойственная ей состоят из тех же объектов, но с противоположно направленными стрелками. Контравариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ можно рассматривать как ковариантный функтор $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$. Мы увидим далее, что исключительно важное для теории Бадью понятие пучка определяется именно как контравариантный функтор.

Функтор, являющийся взаимно-однозначным как на объектах, так и на стрелках, устанавливает *изоморфизм* категорий. У такого функтора существует обратный, который тоже является изоморфизмом.

Если взять в качестве объектов категории, а в качестве стрелок — функторы, то мы получим новую категорию. Можно пойти ещё дальше и построить категории, в которой объектами будут функторы, а стрелками — так называемые естественные преобразования. Так можно продолжать до бесконечности, но эти высшие уровни нам не понадобятся.

Для категорий определяется множество конструкций (не во всех из них существующих). Нам понадобятся следующие:

- *Начальным* объектом категории называется объект, из которого существует единственный морфизм в каждый объект.
- *Конечным* объектом категории называется объект, в который существует единственный морфизм из каждого объекта.
- Морфизм $f : a \to b$ называется *мономорфизмом*, если для каждого объекта c и каждой пары параллельных морфизмов $g_1, g_2 : c \to a$, если $f \circ g_1 = f \circ g_2$, то $g_1 = g_2$. В категории $\mathcal{S}et$ мономорфизмами являются инъективные функциями. Морфизм f является мономорфизмом в $\mathcal{C}$, если он является эпиморфизмом в $\mathcal{C}^{op}$ (см. ниже).
- Морфизм $f : a \to b$ называется *эпиморфизмом*, если для каждого объекта c и каждой пары параллельных морфизмов $g_1, g_2 : b \to c$, если $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, то $g_1 = g_2$. В категории $\mathcal{S}et$ эпиморфизмами являются сюръективные функции. Морфизм f является эпиморфизмом в $\mathcal{C}$, если он является мономорфизмом в $\mathcal{C}^{op}$.

Примеры категорий

Пример 1. (Простейшие категории) Простейшей категорией является пустая категория 0, не содержащая ни объектов, ни стрелок. Нам также понадобятся ещё две простые категории: 1, состоящая из одного объекта и единственной (единичной) стрелки, и 2, состоящая из двух объектов a, b и трёх стрелок $a \to b$, 1_a и 1_b. Для всякой категории $\mathcal{C}$ функторы $1 \to \mathcal{C}$ выделяют объекты этой категории, а функторы $2 \to \mathcal{C}$ — её стрелки.

Пример 2. (Категория множеств) Одной из важнейших для нас категорий является категория множеств $\mathcal{S}et$. Мы получим её, если возьмём в качестве объектов множества, а в качестве стрелок — разнообразные функции между ними. Каждой стрелке-функции соответствует одно множество значений и одна область определения. Функция определяется таким образом, что, если f переводит A в B, то могут существовать объекты B, не имеющие прообраза в A, хотя каждый объект из A имеет образ в B (возможно, совпадающий с образом другого объекта, см. рис. 3.1). Это позволяет, в частности, говорить о *функции включения* $A \hookrightarrow B$, когда A является подмножеством B (см. рис. 3.1). Эта функция переводит каждый объект A в себя, но её множество значений, тем не менее, не совпадает с A. Поэтому она не равна тождественной функции $1_A : A \to A$, также переводящей каждый элемент в себя, но имеющей в качестве множества значений свою область определения. Подмножество множества значений, в

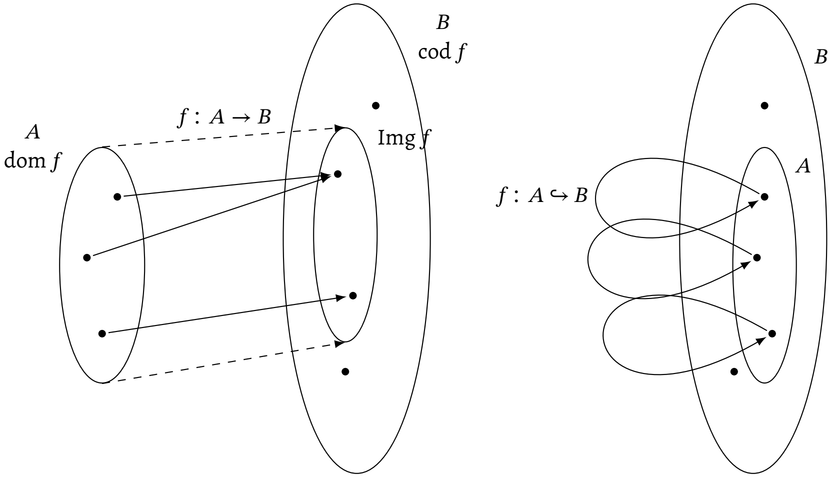

Рис. 3.1. Стрелки категории множеств и функция включения

которое переводятся элементы области определения называется *областью изменения* или *образом* функции f и обозначается $\operatorname{Img} f$ (рис. 3.1). Таким образом, для тождественной функции $\operatorname{Img} f = \operatorname{cod} f$, тогда как для функции включения $\operatorname{Img} f \subseteq \operatorname{cod} f$.

При определении композиции функций мы будем учитывать, что соответствующие области определения и области значений должны совпадать. Композиция $g(f(x)) = g \circ f(x)$ определяется для функций $f : A \to B$ и $g : B \to C$, и сама является функцией $g \circ f : A \to C$ (см. рис. 3.2).

Как можно проверить, все аксиомы категории при этих условиях удовлетворяются, и мы можем говорить о категории множеств $\mathcal{S}et$.

Существенно, что для работы с категорией множеств нам не требуется знания об их внутренней структуре, всё необходимое задаётся системой отношений между ними. В частности, хотя выше для определения функции включения нам понадобилось обращаться к знанию об элементах множеств, это возможно сделать без этого обращения. Функция включения является инъективной функцией, и всякий мономорфизмом категории множеств изоморфен некоторой функции включения. Это позволяет определить в этой категории подмножества через мономорфизмы. Тем самым, подмножества определяются без отсылки к внутреннему строению объектов, лишь на основе свойств морфизмов. Более того, во всякой категории также можно определить подобъекты как мономорфизмы. Аналогичным образом, пустое множество оказывается начальным объектом категории множеств, а синглетон — его конечным объектом. Элемент

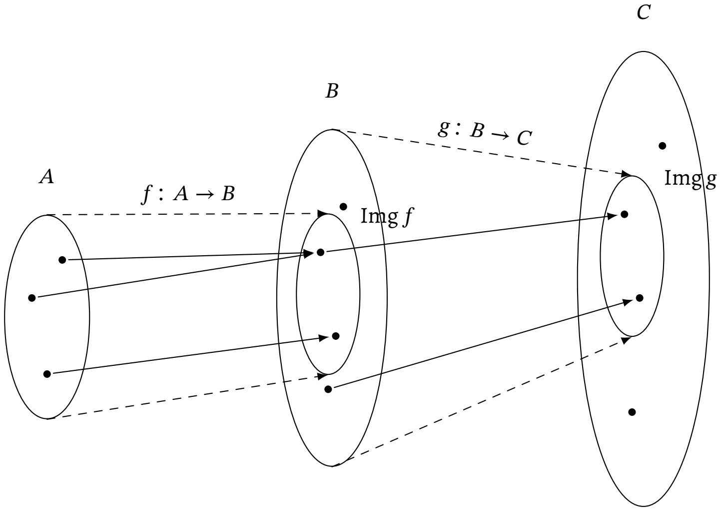

Рис. 3.2. Композиция функций

множества также можно определить в терминах стрелок как морфизм из конечного объекта (а именно, из синглетона). Всё это делает категорное описание множеств удобным со структурной точки зрения и позволяет установить его соответствие со многими другими областями. Более того, категория это структура, позволяющая описывать различные варианты теории множеств, к тому же имеющая, по всей видимости, более ясную интуитивную мотивацию[1].

Пример 3. (Категории порядка) Другими важными категориями являются категория порядка и производные от неё. Пусть задано частично упорядоченное множество, т. е. множество с отношением $\leqslant$, удовлетворяющим аксиомам транзитивности, рефлексивности и антисимметричности. Тогда можно образовать из него категорию частичного порядка, считая объектами элементы этого множества, а стрелками — упорядоченные пары $\langle p, q\rangle$, такие, что $p \leqslant q$. Для стрелки $p \to q$ будем считать, что $\mathrm{dom} = p$, и $\mathrm{cod} = q$. Композицией $\langle p, q\rangle$ и $\langle q, s\rangle$ будет пара $\langle p, s\rangle$. В силу транзитивности отношения $\leqslant$, она также будет стрелкой. Кроме того, пара $\langle p, p\rangle$ будет стрелкой в силу рефлексивности $\leqslant$. Будем считать её единичной стрелкой 1_p.

На основе частично упорядоченного множества можно определить булеву и гейтингову алгебры с операциями $\wedge$, $\vee$, $\neg$ и $\Rightarrow$. Им соответствуют *булева* и

---

[1] См. обсуждение в *Krömer R.* Tool and Object : A History and Philosophy of Category Theory. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2007.

гейтингова категории с теми же операциями на их объектах. Для Бадью особенно важна гейтингова категория. Следуя его терминологии, будем называть её трансценденталью (см. ниже § 6.1) и обозначать T (я буду называть трансценденталью как алгебру, так и соответствующую ей категорию). В частности, гейтингова категория с двумя объектами будет обозначаться T_0. На самом деле она является также булевой категорией.

§ 3.7. Алгебраическая теория множеств

Вернёмся к построению теории множеств в AST. По словам Льюиса, понятие синглетона это отличительная базовая черта теории множеств, всё остальное в ней это мереология[1]. Мы видели выше, что в AST определяются ZF-алгебры на основе двух операций: мереологического объединения и образования синглетона. Оказывается далее, что для ZF-алгебры условия свободности[2] достаточно, чтобы её элементы подчинялись аксиоматике Цермело—Френкеля. В результате, подобные свободные алгебры способны служить моделями теории множеств, причём, как оказывается, не только ZF, но и многих других, включая нефундированные теории, конструктивистские и другие. В этом смысле, AST предоставляет удобный способ построения моделей для различных вариантов теории множеств.

Проблема, однако, состоит в том, что свободные алгебры для теорий типа ZF, вообще говоря, не существуют. Образование синглетонов из подмножеств некоторого множества X позволяет нам определить степень множества или множество подмножеств $\mathcal{P}X$. Если мы не накладываем ограничений на эту операцию, то быстро приходим к парадоксам, подобным парадоксу Рассела (см. далее). Поэтому в AST вводится различие между классами вообще и «малыми» классами или множествами, подобное различию в аксиоматике NBG. Различие классов и множеств позволяет сформулировать ограничение на операцию образования синглетона: не всякое множество имеет синглетон, и в множество степени входят только множества (то есть малые классы). Таким образом, различение классов и множеств позволяет существовать свободным алгебрам.

Построение может проводиться двумя способами. В первом случае модели теории множеств оказываются так называемыми начальными алгебрами над эндофункторами. Рассмотрим, что это означает[3]. Эндофунктором называется

---

[1] *Lewis D.* Parts of Classes. P. vii.

[2] Напомню, что свободная алгебра есть, интуитивно, алгебра, минимальная в том смысле, что содержит только объекты, получающиеся из некоторого множества с помощью указанных операций и только них.

[3] См., например: *Awodey S.* Category Theory.

функтор из категории в неё саму. Для категории классов[1] $\mathcal{C}$ рассматриваются эндофункторы $\mathcal{P}\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}$. Для любого такого эндофунктора можно определить алгебры вида (A,α), где A — класс и α — функция $\alpha\colon\ \mathcal{P}A\to A$, то есть операция на A. Будем называть их $\mathcal{P}$-алгебрами. Вместе с подходящими гомоморфизмами $\mathcal{P}$-алгебры образуют категорию. Начальные алгебры этой категории, если они существуют, обладают тем свойством, что α в них является изоморфизмом (теорема Ламбека). В нашем случае в качестве $\mathcal{P}$ рассматривается функтор, отображающий класс в класс некоторых его подклассов (не обязательно всех). Моделями теории множеств выступают начальные алгебры (U,i), где $i\colon\ \mathcal{P}U\to U$ отображает класс в него же самого как элемент U, то есть, в наших терминах, класс — в тот же класс, рассматриваемый как неделимый. В частности, это означает, что $\mathcal{P}$ не может отображать класс в класс *всех* его подклассов, поскольку в этом случае i не может быть изоморфизмом (в силу теоремы Кантора). Поэтому $\mathcal{P}$ определяется как отображение в класс *малых* подклассов, подходящим образом определённых. Принадлежность класса другому классу определяется тогда следующим образом: $A\in B$, если существует подмножество $\beta\subseteq U$, такое, что $A=i(\beta)$ и $A\in\beta$ в смысле принадлежности индивида классу. Отображение $\mathcal{P}$ связано с ZF-алгебрами следующим образом: отображение ZF-алгебры равно $i\circ s$, где $s\colon\ U\to\mathcal{P}U$ — операция образования синглетона. Это построение делают возможным две последние аксиомы **Set**, а оно само, в свою очередь, обеспечивает выполнение аксиомы степени **NBG7** (Степени или подмножеств). В статье Карстена Буца[2] построение нужного эндофунктора проводится в терминах, максимально приближенных к NBG. Из него видно, что большую часть аксиоматики NBG (и, соответственно, ZF) можно рассматривать как условия выделения малых классов среди всех подклассов U (который сам, конечно, не относится к малым и, соответственно, имеет не только малые подклассы).

Второй способ построения моделей теории множеств позволяет ещё более прояснить, о чём здесь идёт речь. Вместо алгебр над эндофункторами мы можем говорить о так называемых алгебрах над монадами[3]. *Монадой* называется

---

[1] Категория классов может быть определена различным образом. Например (Relating First-Order Set Theories, Toposes and Categories of Classes / S. Awodey [et al.] // Annals of Pure and Applied Logic. 2014. Vol. 165, no. 2. DOI: `10.1016/j.apal.2013.06.004`. Pp. 453 sqq.):

1. $\mathcal{C}$ имеет конечные пределы;
2. $\mathcal{C}$ имеет конечные копроизведения, которые дизъюнктивны и стабильны при обратном образе;
3. $\mathcal{C}$ имеет дуальные образы, то есть на ней можно интерпретировать универсальный квантор.

Так определённая категория обладает свойствами, которые позволяют ей быть моделью интуиционистской логики первого порядка. В частности, в ней подобъекты всякого объекта составляют гейтингову алгебру и для каждой стрелки её обратный образ имеет левый и правый сопряжённый, что позволяет интерпретировать кванторы существования и универсальности.

[2] *Butz C.* Bernays-Gödel type-theory // Journal of Pure and Applied Algebra. 2003. Vol. 178, issue 1. Pp. 1–23. DOI: `10.1016/S0022-4049(02)00259-1`.

[3] Об алгебрах над монадами см., например, *Маклейн С.* Категории для работающего математика. С. 162 и сл.

эндофунктор $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ вместе с двумя естественными преобразованиями $\epsilon : 1_{\mathcal{C}} \to M$ и $\mu : MM \to M$, такими, что

- $\mu \circ M\mu = \mu \circ \mu M$;
- $\mu \circ M\epsilon = \mu \circ \epsilon M = 1_M$.

Согласно общей теории[1], в подходящих категориях каждому эндофунктору $\mathcal{P}$ соответствует монада $(\mathcal{P}, \epsilon, \mu)$, где $\epsilon : 1 \to \mathcal{P}$, $\mu : \mathcal{P}\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ — естественные преобразования, имеющие компоненты:

- $\epsilon_X : X \to \mathcal{P}X$ отображает элемент X в его синглетон: $x \mapsto \{ x \}$,
- $\mu_X : \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ отображает класс подклассов X в подкласс X, являющийся их объединением: $X \mapsto \{ x \mid \exists y (x \in y \wedge y \in X) \}$.

Можно показать, что, если свободная алгебра, соответствующая этой монаде, существует, то она имеет вид $(\mathcal{P}X, \mu_X)$, причём существует также изоморфизм категорий алгебр над монадой и $\mathcal{P}$-алгебр над эндофункторами, при котором свободная алгебра соответствует начальной $\mathcal{P}$-алгебре. Таким образом, вместо начальных $\mathcal{P}$-алгебр мы можем говорить о свободных алгебрах над монадами.

Рассмотрим теперь операцию составления классов из элементов (которые сами являются классами). Мы можем заметить, что морфизм μ_X описывает ассоциативность этой операции. Действительно, обозначим эту операцию ξ. Она действует на $\mathcal{P}X$ и переводит подкласс подклассов X в подкласс X так, что выполняется закон ассоциативности

$$\xi(\xi(x_1, ...), \xi(y_1, ...), ...) = \xi(x_1, ... , y_1 ...).$$

Но он как раз соответствует определению μ_X. При этом морфизм ϵ_X соответствует действию этой операции на семейство, состоящее из одного объекта:

$$\xi(x) = \{ x \}.$$

Доопределив $\xi(\varnothing) = \varnothing$, мы получим алгебру $(\mathcal{P}X, \xi)$, действующую на классе подклассов X. Если мы обозначим через $\epsilon(X)$ класс всех синглетонов элементов X, то увидим, что эта алгебра превращает $\mathcal{P}X$ в класс всех подмножеств, порождаемых из $\epsilon(X)$ с помощью операции ξ. Заметив, что $\xi = \mu_X$, мы получим, что она совпадает с упомянутой выше свободной алгеброй $(\mathcal{P}X, \mu_X)$ (действительно, мы, фактически, провели процедуру построения свободной алгебры, порождаемой $\mathcal{P}X$ и операцией ξ). Таким образом, монада, порождённая эндофунктором, в свою очередь порождает каждое $\mathcal{P}X$ как совокупность всех классов, которые мы можем составить из элементов X. И действительно[2], $(\mathcal{P}X, \mu_X)$ является свободной верхней полурешёткой, в которой бинарная сумма определяется как

---

[1] *Awodey S.* Category Theory. Pp. 255 sqq.

[2] *Butz C.* Bernays-Gödel type-theory. P. 13.

$x \vee y := \xi(x, y)$. В этом смысле, она описывает операцию составления классов алгебры Indiv^+ и совпадает с этой алгеброй. В случае универсума U к ней добавляется операция $i : \mathcal{P}U \to U$, определяющая то, какие подклассы учитываются при составлении классов с помощью операции ξ, другими словами, подклассы, синглетоны которых принадлежат множеству генераторов свободной алгебры $(\mathcal{P}U, \mu_U)$. Мы можем представить её как операцию $\epsilon \circ i : \mathcal{P}U \to U \to \mathcal{P}U$, переводящую класс в синглетон и действующую на классе $\mathcal{P}U$. В результате, как мы видим, AST позволяет явно разделить две описанные выше операции образования синглетонов и собирания классов из синглетонов.

§ 3.8. От мереологии к теории множеств

В этих терминах мы можем теперь описать наше движение от мереологии к теории множеств или от трансценденталий res и aliquid к трансценденталиям unum и multitudo. Действительно, пусть у нас есть алгебра M^+. Будем писать её как $(M, \vee)$ — верхняя полурешётка на универсуме частей M. Тогда мы можем определить на ней морфизм μ, переводящий семейство частей в часть, являющуюся их объединением. Выберем какие-то не имеющие общих частей объекты и рассмотрим свободную алгебру, порождённую ими. Если они не пересекаются, то она будет подалгеброй $(M, \vee)$. Это описание соответствует $\mathsf{FM}^+(A)$. Далее, аналогично § 3.3, рассмотрим пересекающиеся атомы. Алгебра, построенная на них, уже не будет подалгеброй $(M, \vee)$, но мы определим для атомов сумму, удовлетворяющую аксиомам верхней полурешётки, и построим свободную алгебру со сходной структурой. Обозначим её $(W, \vee)$, а множество порождающих (множество неделимых или «синглетонов») — как A. Эта алгебра совпадает с $\mathsf{Indiv}^+(A)$, а также с онтологией классов **CL**, после того как мы определим в ней понятия класса и элемента. Если теперь мы в качестве ϵ рассмотрим вложение A в $(W, \vee)$ и положим $\mathcal{P}A = W$ (разумеется, это условное обозначение, никакого функтора $\mathcal{P}$ здесь нет), то получим структуру, аналогичную описанной выше монаде:

- $\epsilon : A \to \mathcal{P}A$,
- $\mu : \mathcal{P}\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$.

Функция $i : W \to A$ в данном случае отсутствует, что соответствует тому, что различие между «малыми» и «большими» классами не проведено, никакие классы не имеют синглетонов. Проблема отображения классов в синглетоны перед нами не стоит, поэтому в ограничениях на $\mathcal{P}A$ нет необходимости. Следующим шагом мы вводим это различение вместе с необходимыми ограничениями и действуем в соответствие с алгебраической теорией множеств, получая теорию, в которой допустимы классы в качестве элементов других классов. В результате, как видим, мы повторили наше движение от мереологии к теории множеств, от aliquid к multitudo.

Алгебры моделируют построение кумулятивной иерархии, что, собственно, и является руководящей идеей AST. Действительно, предположим, что на начальной стадии наш универсум U пуст: $U = U_0 = \varnothing$. Мы применяем к нему операцию степени, получив $\mathcal{P}U_0$. Затем мы «возвращаем» $\mathcal{P}U_0$ в исходный универсум, присоединяя его к нему и получая $U = U_1$, опять применяем операцию степени и так далее. При этом, на каждой (конечной) стадии универсума U_α мы составляем класс *всех* его подклассов, которое затем отображаем обратно в универсум, расширяя его до $U_{\alpha+1}$. Вообще говоря, универсум таких классов не замкнут относительно двух операций кумулятивной иерархии. Он, однако, замкнут в случае предельного ординала ω, то есть в случае, когда универсум «малых» классов U представляет собой объединение U_α для всех конечных α. В этом случае существует изоморфизм $i : \mathcal{P}U \rightarrow U$, каждый подкласс иерархии имеет синглетон и универсум замкнут относительно объединения и взятия степени[1]. Мы получаем модель ZF без аксиомы бесконечности — совокупность всех конечных множеств. В качестве классов выступают бесконечные множества, которые, однако, теперь образуются не в результате применения степени, как это было на конечных стадиях, а в результате объединения стадий, предшествующих предельному ординалу. Ситуация повторяется в случае любого предельного ординала K: совокупность классов, мощностью меньших K, представляет собой модель ZF и может рассматриваться как пример «малых» классов. В результате, различие «малых» и «больших» классов оказывается относительным, мы имеем иерархию универсумов, в которой каждый следующий выступает в качестве совокупности «больших» классов для предыдущего. Эта иерархия известна как универсумы Гротендика[2].

В результате, с точки зрения онтологии быть множеством означает быть одновременно классом и элементом. В рамках математики как (формальной) онтологии, математические понятия относятся к способам бытия сущего, поэтому вопрос о едином и многом это вопрос о том, что значит быть единым и многим. Ответ на него должен формулироваться в виде аксиом, определяющих ограничения на «оперирование» соответствующими объектами. В рамках мереологии аксиоматика исключает то, что одно то же сущее есть одновременно единое и многое (поскольку оно не может быть одновременно делимым и неделимым). В рамках же AST бытие единым и многим не исключают друг друга, хотя возможны как многие, которые не есть (как) единые (то есть классы), так и единые, которые не есть (как) многие (то есть атомы). Синглетон это многое, которое есть (как) единое, или, точнее, сущее, которое есть и как многое, и как

---

[1] Фактически, доказательство существования свободных ZF-алгебр использует факт существования степени для всякого «малого» класса (*Joyal A., Moerdijk I.* Algebraic Set Theory. Pp. 77 sqq.).

[2] *Bourbaki N.* Univers.

единое. Неконсистентное многое (понятое как класс) это сущее, которое есть лишь как многое.

* * *

В итоге, теория AST имеет четыре компонента[1]:

1. Категория классов $\mathcal{C}$, интерпретирующая (многосортную) интуиционистскую логику первого порядка.
2. Категория малых морфизмов $\mathcal{S}$, состоящая из тех же объектов, что и $\mathcal{C}$, но содержащая только малые морфизмы между ними. Она является подкатегорией $\mathcal{C}$.
3. Функтор степени $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, задающий для каждого класса класс его подмножеств, то есть малых классов.
4. Универсум U с мономорфизмом $i : \mathcal{P}U \hookrightarrow U$ — свободная алгебра над эндофунктором $\mathcal{P}$.

Как мы видим, $\mathcal{P}U$, фактически, определяет на U предикат «быть множеством».

Последовательность построения онтологии можно теперь представить следующим образом. В начале мы имеем верхнюю полурешётку, т. е. классы элементов, не имеющих внутренней структуры, причём между ними есть только мономорфизмы, то есть включения. Следующим шагом может стать расширение набора морфизмов, путём добавления произвольных функций. Естественный способ это сделать состоит в переходе к так называемой декартово замкнутой категории[2]. В этой категории существуют объекты морфизмов, то есть объекты, в определённом смысле состоящие из морфизмов. Эти объекты называются экспоненциалами и обозначаются как Y^X для морфизмов из X в Y. При этом имеется изоморфизм между функциями вида $Z \times X \to Y$ и $Z \to Y^X$. Таким образом, декартово замкнутая категория содержит средства для оперирования с функциями, хотя не содержит степени множеств, то есть средства оперирования с объектами подмножеств. С точки зрения логики, эта категория соответствует многосортному (типизированному) λ-исчислению или пропозициональной интуиционистской логике. Другими словами, она представляет собой абстрактное «пространство функций», обладающее минимальной структурой, необходимой для определения функций и их применения к переменным. С точки зрения онтологии, мы имеем структуру, в которой объектами являются не только множества, но и функции между ними. Следующим шагом будет усложнение, позволяющее определить кванторы, в результате чего мы перейдём к описанной выше категории классов $\mathcal{C}$. Тем самым, мы получили онтологию неделимых и классов, составленных из них с помощью объединения.

---

[1] Ср. *Awodey S.* A brief introduction to algebraic set theory // The Bulletin of Symbolic Logic. 2008. Vol. 13, no. 3. P. 4.

[2] *Mac Lane S.* Categories for the Working Mathematician. Springer, 1998. Pp. 97 sq.

Эта онтология, как мы видим, предполагает некоторый счёт, то есть единое. Однако, несмотря на это, переход к ZF всё ещё оказывается невозможным, поскольку не определена принадлежность классов классам. Кроме того, объект функций требует ограничения — не всякая функция оказывается возможной. Действительно, пусть для каждых классов X и Y существует экспоненциал Y^X. В этом случае, например, предположение о том, что существуют сюръективная функция $f : X \to Y^X$, приводит к противоречию, как мы видели на с. 25.

В частности, это касается функтора степени и универсума U, для которого должен существовать мономорфизм $\mathcal{P}U \hookrightarrow U$. Действительно, приведённое на с. 25 рассуждение можно повторить для подмножеств, если представить их как функции $X \to 2$, где 2 — множество из двух элементов. Тогда предположение о существовании мономорфизма $\mathcal{P}U \hookrightarrow U$ приводит к существованию сюръекции $U \to \mathcal{P}U$. Для 2 имеется очевидная функция α без неподвижных точек (аналогичная отрицанию). Взяв такую функцию, мы можем построить такое g, при котором получим противоречие, как описано выше. Таким образом, наше предположение о существовании мономорфизма $\mathcal{P}U \hookrightarrow U$ оказывается неверным. Если такой мономорфизм существует, то есть каждый элемент $\mathcal{P}U$ переходит в некоторый отдельный элемент U, то мы можем построить новый элемент $\mathcal{P}U$, такой, что он не может переходить ни в какой элемент U без противоречия. Мы можем сделать отсюда вывод, что такой универсум U с указанным мономорфизмом не может существовать. Однако мы можем рассуждать и иначе. Мы можем отделить подобные «самовозрастающие» множества от «нормальных» и учесть это в теории. Именно для этого служит различение собственных классов и множеств в AST, но название «большие» множества здесь, как видим, может ввести в заблуждение. Речь не столько о больших множествах, сколько о множествах, не имеющих определённого размера. Сама их «фиксация» позволяет нам построить их новый элемент. В этом смысле, выделение малых множеств останавливает этот процесс. Некоторым классам запрещено иметь синглетон, поскольку это меняет набор классов и может сделать отдельные из них «слишком большими». Поэтому не только $\mathcal{S}$ зависит от $\mathcal{C}$, являясь её подкатегорией, но и $\mathcal{C}$ зависит от $\mathcal{S}$, поскольку изменение $\mathcal{S}$ (разрешение ещё каким-то классам иметь синглетон) приводит также к изменению $\mathcal{C}$.

Дело, однако, не обстоит так, будто мы начинаем с категории $\mathcal{C}$ и затем выделяем малые морфизмы и $\mathcal{P}$-алгебры. Скорее, мы начинаем с некоторого класса объектов (возможно, пустого) как носителя алгебры и выстраиваем из него класс, замкнутый относительно операций объединения и образования синглетона, замечая, однако, что это возможно, только если сам этот класс будет исключён из этих операций. Другими словами, универсум существует, лишь если мы ограничим действие операции счёта. Тогда категорию $\mathcal{C}$ составляют классы, возникающие при нарушении этого ограничения. То, что категория не является произвольной, а оказывается гейтинговой категорией, связано с тем, что она возникает в результате определённых действий, осмысленных для её объектов, рассматриваемых как классы. Фактически, ограничением здесь становится язык интуиционистской логики, для которого категория классов должна служить моделью.

Реестр онтологий и понятий счёта и неконсистентности

Подведём небольшой промежуточный итог. Мы можем выделить несколько вариантов онтологии, в которых счёт и неконсистентность (соответсвенно, консистентность) будут пониматься различным образом. Во всех этих онтологиях мы имеем операции только двух типов: мереологические (суммы, произведения) и образования синглетона. В частности, их сочетания позволяют нам получить все объекты онтологии множеств. Операция образования синглетона позволяет нам выйти за пределы онтологии многого без единого. Но в чём эта операция состоит? Что значит «образовать синглетон»? Означает ли это просто рассмотреть нечто как неделимое? Как мы видели, такое «образование», если даже оно имеет место, не имеет никаких последствий, если синглетон не используется для построения класса — не образование синглетона само по себе, но его использование в качестве конституенты класса приводит к новым объектам. При этом образование синглетона (как одноэлементного класса) само можно считать частным случаем использования объекта в качестве элемента класса. Мы можем сделать вывод, что образование нового объекта вызвано не синглетоном и не классом по отдельности, но использованием объекта в качестве элемента класса. Образование синглетона есть лишь частный случай такого использования. В этом смысле, образовать синглетон ещё не означает создать новый объект, к этому ведёт только его использование. При этом в самом синглетоне, поскольку он уже является классом, т. е. уже в момент своего образования «использован для построения класса», эти два аспекта присутствуют одновременно: он не только «посчитан-за-неделимое», но и «использован для построения класса». Это может затемнить тот факт, что простого «счёта-за-неделимое» недостаточно.

Мы видим, что операция счёта-за-единое играет важную роль в построении теории множеств. Однако сам этот счёт может пониматься различным образом и иметь различную структуру на разных стадиях построения онтологии. Возможно ли говорить о каком-либо общем смысле этих разнообразных пониманий единого? По-видимому, да, если единое определять по отношению к операции. В этом случае быть единым означает быть предметом операции, быть использованным в ней «целиком». Различные «виды» единого будут соответствовать различным видам операций, которые сами будут совпадать с операцией счёта-за-одно: посчитать за единое значит использовать в операции. В этом смысле, алгебраический подход оказывается далеко не случайным. Объекты алгебры можно рассматривать как единые или неделимые по отношению к алгебраическим операциям. При этом прежде, чем применение этих операций станет возможным, мы должны совершить фундаментальную операцию выделения объектов алгебры, отделения их друг от друга. Сущее появляется не как «отдельно стоящее», а как соотнесённое с другим, хотя бы в простой операции отличия одного от другого. Вопреки Фоме, aliquid не следует за res, а они появляются одновременно в операции отделения «этого» сущего от «того» сущего. Само это отношение может не быть простым. Так, например, во втором томе «Бытия и события» Бадью выделяет степени сходства и различия сущих. Но в простейшем случае оно сводится к чистому отделению без указания на чтойность сущего, на его res.

Рассмотрим варианты единого, которые предшествующее рассуждение позволяет нам выделить. В целом, можно различить следующие этапы.

1. **Чистое сущее**. Его можно рассматривать как вырожденную алгебраическую систему. Это носитель без операций и отношений. Строго говоря, мы не можем назвать этот носитель ни единым, ни многим, поскольку не различаем в нём элементов, о которых мы, например, могли бы утверждать, что они равны или не равны. Это чистое ens без характеристик.
2. **Чистое множество**. Единственное отношение между элементами этого множества состоит в неравенстве или различии. Это позволяет нам говорить об упорядоченных парах, построить отношение различия, и, возможно, отрицание. Таким образом, минимальная онтологическая ситуация, в которой мы можем говорить о многом, не является элементарной.
   В этой онтологии в качестве счёта выступает операция различения. Она действует на чистое сущее (которое, таким образом, служит здесь неконсистентным многим) и имеет результатом чистое множество различённых единиц. Последние, таким образом, посчитаны за одно.
3. **Онтология частей**. Чистое многое с добавленной операцией объединения частей в целое, удовлетворяющей **SL**. Она является алгебраической системой с единственной операцией объединения. Эта операция, как мы видели, задаёт на объектах отношение «часть—целое», подчиняющееся аксиомам **M**. В качестве счёта выступает объединение частей в целое, а в качестве неконсистентного — набор разъединённых частей. Мы не накладываем в этой онтологии ограничений на предел делимости на части, и три следующие онтологии являются примерами онтологий с такими ограничениями.
4. **Онтология бесконечно делимых частей**. Она описывается алгеброй M^+ и представляет собой онтологию бесконечно делимых частей, упорядоченных отношением «часть-целое». Это онтология частей с добавленной аксиомой бесконечной делимости. Мы можем сказать, что в этом случае мы имеем единое в смысле вещи, res, но не в смысле неделимого, indivisum.
   В этой онтологии отсутствует единое в смысле неделимости, однако имеется единое в смысле единящей единицы. Это единое как целое частей, для

которого неконсистентность означает чистое множество разъединённых объектов. Счёт-за-одно совпадает здесь с операцией объединения.

5. **Онтология неделимых частей**. Она представлена алгебрами FM^+ и Indiv^+ и является онтологией неделимых и составленных из них классов. Это онтология частей с аксиомой атомов **SL5** (Атомы), утверждающей, что все объекты в конечном итоге составлены из атомов. Здесь есть единое в смысле unum и многое в смысле multitudo, но никакой из классов не рассматривается как единое, то есть не считается за одно. При минимальном определении онтология представляет собой верхнюю полурешётку, однако может быть расширена путём определения операций пересечения и дополнения. Для этого требуется также добавить пустую часть. В результате, мы получим булеву алгебру или онтологию «плоских множеств». Счёт-за-одно соответствует здесь объединению, как и вообще в онтологиях частей.
6. **Смешанная онтология частей**. Мы можем также рассматривать смешение предыдущих двух онтологий, то есть онтологию частей, в которой имеются как неделимые, так и бесконечно делимые. Счёт-за-одно также совпадает здесь с операцией объединения.
7. **Онтология классов**. Это расширение онтологии неделимых путём добавления кортежей и их классов. Такое добавление позволяет этой онтологии служить интерпретацией логики первого порядка.
   В этой онтологии в качестве счёта выступает аксиома **CL4** (Существования классов). Она определяет набор объектов онтологии. Соответственно, в качестве неконсистентного выступает чистое множество.
8. **Онтология с синглетонами**. Онтология, в которой имеются две операции объединения. Помимо мереологической суммы частей вводится их сумма «как неделимых», другими словами, операция мереологической суммы синглетонов частей. Эта онтология наиболее близка к описанию, которое Бадью даёт для операции счёта-за-одно, когда представляет её как переход от платоновского «многого без единого» к теоретико-множественной онтологии. Счёт-за-одно соответствует здесь взятию как неделимое. В этой онтологии имеются классы и элементы, но также могут присутствовать и бесконечно делимые части.
9. **Онтология множеств**. Наконец, онтология множеств требует применения операции синглетона к классам и является расширением онтологии классов путём добавления суммы синглетонов классов. В отличие от предыдущей онтологии, в ней запрещены бесконечно делимые части. Таким образом, в этой онтологии классы допускаются в качестве неделимых, то есть элементов других классов. Алгебраически, это означает введения операции последователя или образования синглетона. Парадоксы вынуждают нас наложить ограничения на эту операцию, которую мы выше описывали в терминах алгебраической теории множеств. Для этого, в частности, потребовалось выделение «малых» и «больших» классов, а также иерархия универсумов.

В этих онтологиях мы можем различить четыре понимания неконсистентности и счёта.

1. **Счёт как различение**. Здесь неконсистентным является чистое сущее, в котором вообще ничего не различимо. Мы даже не можем сказать, является ли оно в строгом смысле слова многим или единым. Счёт совпадает с различением, то есть с выделением их этого чистого «ничто» объектов, которые и считаются единицами, и из которых составляется затем консистентное многое. Результатом счёта является чистое множество.
2. **Счёт как объединение**. Неконсистентным является чистое множество. Счёт состоит в объединении объектов, в результате которого между ними устанавливается отношение «часть—целое» вместе с частичным порядком. Результатом является онтология делимых (конечно или бесконечно).
3. **Счёт как остановка деления**. Неконсистентно бесконечно делимое многое — ганк. Счёт состоит в том, что мы полагаем нечто неделимым, останавливая бесконечный процесс деления. Результатом является «плоское множество» или онтология неделимых и классов. Как мы видели, этого недостаточно для того, чтобы можно было говорить о теории множеств в полном смысле. Проблема состоит в том, что у нас нет здесь полноценного понятия элемента. Хотя, как мы видели выше, неделимые части можно считать элементами, и они ведут себя как элементы по отношению к подмножествам универсума, мы всё ещё не имеем здесь понятия элемента элемента. В результате, такое понимание неконсистентности и счёта не позволяет нам перейти к теориям, подобным ZF или NBG.
4. **Счёт как образование синглетона**. Это, вероятно, наиболее интересное понимание. Здесь неконсистентность обозначает классы, а счёт — образование синглетона, то есть «превращение» класса в элемент. Собственные классы, не имеющие синглетонов, тем самым не посчитаны за одно. Неконсистентной, то есть не способной быть посчитанной, является совокупность всех возможных классов — неконсистентность связана с тем, что всегда остаются классы, не имеющие синглетона, то есть не «охваченные» операцией счёта. Смысл неконсистентности в данном случае состоит не в неделимости, а в невозможности для всех классов иметь синглетоны. Однако о классах мы также можем сказать, что они составлены из единиц. В этих единицах мы не различаем элементы и части. Потребность различать бытие частью и бытие элементом возникает лишь для единиц, которые сами делимы (соответственно, делимы на элементы или части, в зависимости от того, делимы ли последние).

Все эти значения счёта и неконсистентности так или иначе присутствуют у Бадью, однако не различены в достаточной степени.

Согласно Бадью, консистентное это составленное из единиц, тогда как неконсистентное это не содержащее единого. Счёт применяется к неконсистентному многому, имея результатом единицы, из которых составляется консистентное многое. Эта схема может быть понята по-разному, и у нас имеется два основных претендента на экспликацию неконсистентного многого у Бадью — многого, предшествующего операции счёта. Во-первых, им может быть платоновское многое без единого или категория безатомной мереологии. Счёт-за-одно в этом случае соответствует переходу к неделимым или атомам. Во-вторых, в качестве неконсистентного многого можно понимать категорию классов $\mathfrak{C}$. В этом случае счёт-за-одно является операцией образования синглетона и соответствует манипулированию с классами «как если бы» неделимыми. Счёт по-прежнему означает принятие за неделимое, однако теперь он требует ограничения. Что же касается ZF, то она, как мы видим, вряд ли может претендовать на онтологию чистого множества, поскольку уже предполагает счёт в обоих указанных смыслах, не говоря уже о том, что пустое множество фактически играет в ней роль атома.

Наконец, какой вывод мы можем сделать относительно возможности многого как трансценденталии и относительно построения онтологии без единого? Как мы видим, ответ зависит от того, как мы понимаем единое. Перечисленные выше определения единого как операции позволяют понимать область действия этих операций как область «без единого». Будет ли оно при этом многим? В первом случае мы не можем этого сказать, в остальных же многое понимается различным образом. В некотором смысле «канонический» случай онтологии без единого понимает счёт как различение, когда исходной онтологической структурой (и результатом счёта) является набор различённых сущих, не существующих вне этого различения. Здесь единое и многое не столько предшествуют друг другу, сколько появляются одновременно и с самого начала. Трансценденталией в этом случае является не то или другое, а скорее общая структура, которой они принадлежат. Этой структурой является чистое множество, как оно описано выше. Такое понимание отличается от того, что Фома называет трансценденталией многого. Когда он говорит о трансцендентальности многого, имея в виду многое, состоящее из единых, то он находится в рамках онтологии неделимых, то есть онтологии элементов и классов. Переход к ней от онтологии бесконечно делимых требует отдельной операции «принятия за единое» в смысле остановки деления. Что касается Бадью, то именно последнюю он использует, говоря о счёте, который применяется к платоновскому бесконечно делимому сущему. В этом случае единое понимается как неделимое, многое — как делимое, а онтология без единого может описываться мереологической теорией с аксиомой бесконечной делимости. В любом случае, как мы видим, «онтология без единого» возможна в нескольких вариантах, в каждом из которых допускает формальное математическое представление.

§ 3.9. Выводы об онтологии Бадью

Что мы можем сказать об онтологии Бадью, имея приведённые различения?

Основным свойством неконсистентного многого для него является, по-видимому, то, что оно не составлено из единиц, то есть из неделимых. Поэтому первым примером такого многого является для него платоновское бесконечно делимое многое без единого. Мы видели, что оно описывается одной из наших онтологий. Счёт-за-одно можно затем представить как остановку бесконечного процесса деления, т. е. как синглетон. Но, как мы видели, такого понятия счёта не достаточно для перехода к теории множеств. Мы всё ещё можем остаться на уровне онтологии неделимых в одном из двух её смыслов. Поэтому переход Бадью к аксиоматике ZF проблематичен и требует дополнительного шага, на котором становится понятным, что считаться за одно должны не части исходной онтологии, а классы, т. е. уже некоторые единства синглетонов. Важно также, что в рамках онтологии неделимых мы различаем два типа объектов — классы и элементы. В то же время, для Бадью ZF замечательна тем, что в ней имеются объекты лишь одного типа — множества. Поэтому, согласно ему, мы можем говорить здесь о теории чистого множества (без единого). Однако эта однородность, как мы видели, является результатом отождествления классов и элементов и поэтому уже предполагает понятие синглетона — понятие множества в ZF сложно и содержит в себе понятие единства. Само предположение о том, что класс может служить элементом, уже в скрытом виде вводит понятие единства (синглетона). Целое мереологии и целое класса соответствуют двум разным способам образования и оперирования.

Основным отношением в онтологии Бадью является отношение принадлежности. В этом смысле, быть в «Бытии и событии» означает быть во множестве: $\alpha \in \beta$. Но онтологически в последнем выражении только о β можно сказать, что оно «есть (как) множество», тогда как α лишь «есть (как) элемент», причём последнее означает, что α обладает синглетоном, посчитано за одно. Переход к единственному типу переменных ничего не меняет в этом статусе α, мы лишь допускаем, что в этом случае класс также может «быть элементом (быть как элемент)». Это не изменяет список возможных онтологических типов, а лишь допускает отнесение одних и тех же объектов к обоим типам одновременно — одно и то же может быть многим (классом) и единым (элементом) (а также мереологической частью и целым). Если онтология совпадает с математикой, в чём состоит один из самых важных и продуктивных тезисов Бадью, то бытие описывается аксиоматически и относится не к тому, *что* есть, а к тому *как* есть. Поэтому, когда Бадью говорит:

> Многое здесь различается задним числом как «предшествующее» единому, поскольку счёт-за-одно является всегда *результатом*. Тот факт, что единое есть операция, позволяет нам говорить, что область действия операции не

> есть единое (поскольку единое *не есть*), и что, следовательно, она есть многое, поскольку *в презентации* то, что не есть единое, то с необходимостью есть многое. (32)

он изменяет своему собственному — существенным образом структурному — определению онтологии. Для единого и многого, понятых как (онтологические) структуры, неверно, что «то, что не есть единое, то с необходимостью есть многое». Делимое в определённых операциях может рассматриваться «как если бы» неделимое. Структуралистски, как единое, так и многое определяются по отношению к операциям. Кроме того, как мы видели, разные виды многого и единого требуют аккуратности при определении счёта, переводящего одно в другое. Связь многого, единого и счёта оказывается сложнее, чем просто связь операции с её материалом и результатом, и мереологическая интерпретация помогает распутать некоторые из возникающих здесь узлов.

Мы видим, что Бадью слишком поспешно переходит к аксиоматике Цермело—Френкеля. Для него она представляет собой теорию множества как такового, поскольку имеет только один тип переменных — множества. Но, во-первых, как мы видели, множества традиционной теории являются сложными конструкциями, предполагающими понятие синглетона как некоторого рода «принятия как неделимого». В этом смысле, мы не можем говорить, что она содержит в качестве неопределяемого только множества. Во-вторых, неконсистентное множество, как его описывает Бадью, более удачно формализуется не аксиоматикой Цермело—Френкеля, а вариантом мереологии без атомов. Наконец, в-третьих, простое понимание счёта как прекращение деления, т. е. как операции, результатом которой является неделимое, недостаточно для того, чтобы говорить о теории множеств. Требуется дополнительная структура, в качестве которой выступает синглетон или класс как элемент. При этом именно последняя операция даёт возможность говорить о неконсистентности, более глубокой, чем нефундированность бесконечного деления (мы видели, что эта бесконечность не является проблемой в случае мереологии, но она также не является проблемой в случае теории множеств[1]). Эта неконсистентность не только связана с теоретико-множественными парадоксами, но и существенна для самой теории Бадью, когда он переходит к понятию субъекта.

В итоге, идея Бадью — признание математики онтологией и использование математических методов и конструкций для описания онтологических структур, таких как способы бытия — глубока и продуктивна, но её реализация часто требует существенной дальнейшей разработки.

---

[1] См. *Aczel P.* Non-well-founded sets.

Дополнительная литература

Маклейн С. Категории для работающего математика / пер. с англ., под ред. В. Артамонова. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику / под ред. С. И. Адяна ; пер. с англ. Ф. А. Кабакова. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 320 с.

Awodey S. A brief introduction to algebraic set theory // The Bulletin of Symbolic Logic. 2008. Vol. 13, no. 3. Pp. 281–298.

Joyal A., Moerdijk I. Algebraic Set Theory. Cambridge : CUP, 1995. 123 pp. (London Mathematical Society Lecture Note Series ; 220).

Krömer R. Tool and Object : A History and Philosophy of Category Theory. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2007. (Science Networks. Historical Studies, 32).

Lawvere F. W. An Elementary Theory of the Category of Sets (long version) // Theory and Applications of Categories. 2005. Vol. 11. Pp. 7–35.

Lawvere F. W., Rosebrugh R. Sets for mathematics. Cambridge University Press, 2003. 280 pp.

Lewis D. Parts of Classes. Cambridge : Basil Blackwell, 1991. 155 pp.

Часть II

Субъект и событие

4

Теория субъекта

§ 4.1. Форсинг и генерическое множество в первоначальном подходе Бадью

Тезис Бадью о тождестве математики и онтологии, будучи основанием книги, не является её целью (21-22). Целью же является «то, что не есть сущее-поскольку-оно-сущее», т. е. событие, истина и субъект. В этом смысле, цель книги — очертить возможное место для философии. При этом «то, что не есть сущее-поскольку-оно-сущее» не совпадает с не-сущим. Более того, сведе́ние первого ко второму есть заблуждение. В этом отношении важнейшими понятиями книги являются истина и субъект, которые, в свою очередь, опираются на понятие генерического:

> если какую-то категорию нужно обозначить как символ моего предприятия, то это не будет ни чистое множество Кантора, ни конструктивность Гёделя, ни пустота, именующая сущее, ни даже событие, из которого происходит добавление (supplémentation) того-что-не-есть-сущее-поскольку-оно-сущее. Этой категорией будет *генерическое*. (22)

Претензия книги состоит в том, чтобы основать не только посткартезианскую, но и постхайдеггерианскую и постлаканианскую теорию субъекта: «субъект не как основание или источник, но как *фрагмент* процесса истины» (22). Понятие генерического играет здесь ключевую роль. Оно разработано Полом Коэном вместе с методом форсинга или вынуждения в начале 60-х годов XX в. для доказательства некоторых фактов о теории множеств. Открытие Коэна, однако, имеет далеко идущие философские следствия. Бадью рассматривает его как интеллектуальную революцию, на основе которой может быть построена новая концепция истины: открытия Коэна «разрешили, в рамках собственного порядка, старую проблему неразличимых, они опровергли Лейбница и открыли для мышления созможность субтрактивного схватыванию истины и субъекта» (23).

Таким образом, ключевым понятием теории субъекта является форсинг или вынуждение. Коэн использует этот метод для построения моделей теории множеств с нужными свойствами (например, таких, в которых верна или не верна аксиома выбора). Бадью берёт этот метод в том виде, в котором находит его у Коэна, хотя в последующем он был существенно переосмыслен и упрощён (Scott, Solovay, Vopěnka)[1]. Для Бадью важна именно коэновская формулировка, так как она, как показано Крипке, связана с интуиционистской логикой. Для построения моделей с нужными свойствами (основная цель использования форсинга) достаточно обычной логики, поэтому эта сторона оказывается не слишком существенна для Бадью. Для теории субъекта же необходима, как мы увидим, логика интуиционистская. Мы далее рассмотрим метод форсинга в формулировке самого Бадью вместе с его влиянием на философскую разработку теории субъекта и онтологии, а затем перейдём к более современной формулировке и тому, каким образом это может повлиять на его философскую интерпретацию.

Первоначально Бадью следует методу форсинга практически в том виде, в каком его разрабатывает Пол Коэн в книге «Теория множеств и континуум-гипотеза»[2]. Как сказано выше, форсинг используется для построения моделей ZF с заданными свойствами. Его основная идея состоит в том, чтобы, начав с некоторой стандартной модели, расширить универсум доступных множеств таким образом, чтобы, во-первых, добиться выполнения или невыполнения заранее заданных предложений, и во-вторых, уметь совершать это расширение контролируемым образом. Рассмотрим простой пример. Если у нас есть универсум множеств V, то мы можем построить изоморфный ему универсум упорядоченных пар, состоящих из множеств, принадлежащих V, и какой-нибудь метки, например, пустого множества: $\{\langle v, \varnothing\rangle \mid v \in V\}$. Если теперь мы добавим пары, в которых вместо пустого множества будут стоять в качестве меток или параметров элементы некоторого множества $\mathbb{P}$, то мы тем самым получим расширение универсума: $V^* = \{\langle v, \pi\rangle \mid v \in V, \pi \in \mathbb{P}\}$. Коэн строит процедуру, позволяющую, выбирая набор параметров, регулировать содержание этого универсума и строить модели теории множеств, добиваясь тех или иных свойств.

---

[1] Метод Коэна обычно называется сильным форсингом (strong forcing), в отличие от подхода, основанного на булевозначных моделях (*Kunen K.* Set Theory : An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam, New York : North-Holland Pub. Co, 1980. P. 236). Бадью он важен именно в таком виде, поскольку тесно связан с интуиционистской логикой. По этой же причине он пользуется гейтингозначной, а не булевозначной логикой во втором томе «Бытия и события». У Кюнена см. также исторический обзор различных подходов к определению форсинга: Ibid. Pp. 232 sqq. См. также: *Shoenfield J. R.* Unramified forcing // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 13. Part I. Axiomatic Set Theory / ed. by D. S. Scott. Providence : American Mathematical Society, 1971. Pp. 357–381.

[2] *Коэн П.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М. : Мир, 1969.

Идея состоит в том, чтобы включать в наш универсум лишь пары $\langle v, \pi \rangle$, в которых π принадлежит некоторому множеству G со специальными свойствами. Тогда выбор G будет означать выбор модели. При этом, как показывает Коэн, можно построить отношение, позволяющее по G — а точнее, даже по частичной информации о G — судить об истинности тех или иных предложений во вновь построенной модели. Это отношение называется *форсингом* или *вынуждением* (англ. forcing), а специально определённое множество G — *генерическим*. (от англ. generic, общий — в том смысле, что о нём не известно ничего, кроме того, что оно — множество). Рассмотрим подробнее, как эта идея реализуется в первом томе «Бытия и события». Я буду по возможности использовать обозначения Бадью, хотя в некоторых случаях будет удобнее принять более привычные для современных изложений метода форсинга.

Вслед за Коэном, Бадью исходит из транзитивной и счётной модели ZF, которую он называет фундаментальной квазиполной ситуацией[1]. Существование такой модели мы можем только предполагать, поскольку, если бы мы её знали, то это означало бы, что мы имеем доказательство непротиворечивости ZF. Фактически же, мы лишь предполагаем эту непротиворечивость, а значит — существование какой-то модели ZF (существование счётной модели следует отсюда в силу теоремы Лёвенгейма-Сколема). Но даже если ZF непротиворечива, вопрос о существовании стандартной модели (как она часто называется в математике) остаётся открытым. Поэтому это положение Бадью остаётся гипотетическим, о чём он прямо говорит и, более того, непосредственно связывает это обстоятельство с важнейшими характеристиками субъекта (396).

Итак, мы имеем модель ZF. В ней выбирается частично упорядоченное множество, которое определяется как пара $(\mathbb{P}, \leqslant)$, где $\mathbb{P}$ — множество, а $\leqslant$ — бинарное отношение порядка, подчиняющееся аксиомам частичного порядка, уже известным нам из мереологии:

PO1 (Рефлексивность) для всех p имеет место $p \leqslant p$,
PO2 (Транзитивность) из $p \leqslant q$ и $q \leqslant r$ следует $p \leqslant r$,
PO3 (Антисимметричность) если $p \leqslant q$ и $q \leqslant p$, то $p = q$.

Это множество называется множеством условий. Бадью обозначает его как ©, но я буду пользоваться более простым и привычным в таких случаях обозначением $\mathbb{P}$. Условия описывают частичную информацию о генерическом множестве. У Бадью, как и у Коэна, эта информация представляется множествами высказываний вида $x \in G$ и $x \notin G$, а в качестве отношения порядка выступает включение множеств (мы увидим далее, что это лишь частный случай возможного порядка). Более конкретно, Бадью берёт в качестве условий пару

---

[1] С точки зрения математики, это не уменьшает общность подхода, поскольку в силу теоремы Лёвенгейма—Сколема эту модель всегда можно считать счётной, а в силу транзитивного коллапса Мостовского — транзитивной; счётность и транзитивность лишь упрощают технические детали.

непересекающихся конечных подмножеств ситуации $\langle P_0, P_1\rangle$, где P_0 есть множество элементов, связанных с событием (и, следовательно, принадлежащих G), а P_1 — не связанных с ним (т. е. не принадлежащих G; о событии у Бадью см. ниже Гл. 5). Тогда порядок на условиях задаётся включением этих подмножеств:

$$\langle P_0, P_1\rangle \leqslant \langle Q_0, Q_1\rangle \text{ тттк } P_0 \subseteq Q_0 \wedge P_1 \subseteq Q_1.$$

В интересных (т. е. нетривиальных) случаях G не принадлежит исходной модели, и новая модель получается путём его присоединения к исходной в качестве элемента (вместе со всеми производными от него множествами). Поэтому G играет одновременно две роли, оно участвует как в задании порядка на условиях, так и в определении состава множеств новой модели.

Условия позволяют определить два важнейших понятия теории Бадью. Прежде всего, *истина* определяется как множество всех элементов, положительно связанных с событием (366) (о понятии события см. ниже Гл. 5). Будучи определённым генерическим множеством, оно, во-первых, бесконечно и, во-вторых, не описывается никакой формулой языка. Кроме того, это понимание истины не имеет ничего общего с истинностью пропозиций; истина это определённое сущее, бесконечное и невыразимое. *Субъект*, далее, определяется как подмножество истины (429 sqq.). Так как истина есть результат бесконечной процедуры (которую Бадью называет генерической, поскольку она состоит в установлении элементного состава генерического множества), то субъекта можно рассматривать как конечную часть этой процедуры. Это понимание является центральным для теории субъекта Бадью: субъект принимает решение о существовании истины и сам становится конечной частью процедуры её достижения. Мы увидим детали этой структуры ниже, сейчас же продолжим рассмотрение самой генерической процедуры.

Итак, условия являются подмножествами друг друга и предоставляют некоторую информацию, причём упорядочение соответствует большему или меньшему количеству этой информации: для двух условий π_1 и π_2 выражение $\pi_1 \subset \pi_2$ означает «π_2 даёт больше информации, чем π_1» или «π_2 сильнее π_1» (Бадью говорит: «π_2 domine π_1»). Поскольку π_2 содержит ту же информацию, что и π_1, и ещё что-то, то оно называется также уточнением условия π_1. Может оказаться, что какие-то два условия нельзя уточнить так, чтобы они привели к одному и тому же условию. Мы можем тогда определить совместимость условий: два условия π_1 и π_2 *совместимы*, если $\exists\pi_3(\pi_1 \subset \pi_3$ и $\pi_2 \subset \pi_3)$ — т. е. эти два условия могут быть уточнены таким образом, что в результате получается одно и то же условие. Определив совместимость, мы можем потребовать, чтобы всякое условие имело в качестве более сильных два несовместимых условия:

$$\forall\pi_1\exists\pi_2,\pi_3[(\pi_1 \subset \pi_2) \wedge (\pi_1 \subset \pi_3) \wedge (\text{«}\pi_2 \text{ и } \pi_3 \text{ несовместимы»})].$$

Это гарантирует «реальный выбор» в том смысле, что должно быть возможно, чтобы уточнение (т. е. рост знания) приводило к несовместимым ситуациям.

Условия позволяют нам управлять свойствами новой модели, но нам нужно построить её саму. Коэн делает это в два этапа. Сначала определяется система имён, причём идея состоит в том, чтобы построить *в исходной модели* имена для всех возможных множеств новой модели и оперировать с ними. Мы при этом не знаем, каким множествам соответствуют эти имена, и второй этап состоит в их интерпретации и сопоставлении им некоторых множеств. При этом процедура интерпретации, как мы увидим, зависит от генерического множества. Более того, система имён оказывается избыточной, и для одного и того же множества можно иметь несколько или даже бесконечно много имён, и это дублирование также зависит от генерического множества. В результате, от него зависит элементный состав множеств, их мощности и другие свойства. Важно при этом, что существует связь между принадлежностью условия генерическому множеству и истинностью соответствующих утверждений в расширенной модели. Рассмотрим эту конструкцию подробнее.

Рассмотрим все возможные утверждения, относящиеся к расширенной модели. Для этого мы уже определили имена множеств в ней и тереть сформулируем утверждения с этими именами. Интерпретация этих имён нам для этого не нужна, мы получим её лишь в конце, после того как разделим все утверждения на истинные и ложные. Конструкция будет построена таким образом, что это последнее разделение будет зависеть от генерическим множеством, которое будет играть двойную роль. С одной стороны, его выбор означает выбор истинных и ложных утверждений, то есть фиксацию теории. Но с другой стороны, этот выбор одновременно фиксирует модель этой теории, поскольку выбор генерического множества определяет набор остальных множеств. От этой двойственной роли, как мы увидим, можно избавиться, переходя к так называемому синтаксическому форсингу и гейтингозначным моделям, но сейчас мы не будем этого делать.

Упомянутые имена определяются как упорядоченные пары, состоящих из имени и условия: имя $= \{\langle \text{имя}, \pi\rangle \mid \pi \in \mathbb{P}\}$. Циркулярность этого определения кажущаяся, поскольку имена строятся рекурсивно, по рангам, начиная с пустого множества, так что имена для последующих рангов определяются на основе предыдущих:

$$\mu_0 = \varnothing$$
$$\mu_\alpha = \{\langle \mu_\beta, \pi\rangle \mid \beta < \alpha \wedge \pi \in \mathbb{P}\}.$$

Другими словами, имена ранга 0 определяются как множества пар вида $\langle \varnothing, \pi\rangle$, а имена высших рангов определяются рекурсивно как множества пар $\langle \mu, \pi\rangle$, где μ — имена низших рангов. Например, для первых двух уровней $\mu_0 = \varnothing$, $\mu_1 = \{\langle \mu_0, \pi\rangle \mid \pi \in \mathbb{P}\} = \{\langle \varnothing, \pi\rangle \mid \pi \in \mathbb{P}\}$. Мы можем рассматривать различные

π как метки или ярлыки, которыми мы пометили все наши имена или множества. Имена можно также понимать как описание «потенциальной» принадлежности множеств друг другу, «реальная» же их принадлежность будет регулироваться выбором тех или иных π: только множества с избранными π будут принадлежать множествам более высокого уровня.

Предположим теперь, что мы интерпретировали наши имена на множествах $R(\mu) = \{\, R(\nu) \mid \langle \nu, \pi \rangle \in \mu \,\}$, также выстраиваемых рекурсивно. Например, $R(\mu_0) = \varnothing$, $R(\mu_1) = \varnothing$ или $\{\, \varnothing \,\}$ и т. д. (здесь видно, что система имён избыточна, многие из них обозначают одни и те же множества). Мы, однако, не сможем иметь такую интерпретацию одновременно для всех π, т. к. разные условия могут противоречить друг другу. Поэтому мы выберем некоторое подмножество условий G и определим интерпретацию имён следующим образом:

$$R_G(\mu) = \{\, R_G(\nu) \mid \langle \nu, \pi \rangle \in \mu \text{ и } \pi \in G \,\}.$$

Тем самым, из потенциально принадлежащих друг другу множеств выбираются лишь некоторые, определяемые генерическим множеством G.

Новая модель, которую мы обозначим $\mathfrak{M}[G]$ определяется как множество всех $R_G(\mu)$. Таким образом, референт имени есть множество, элементами которого являются референты имён, являющихся элементами этого имени, для которых условие π принадлежит генерическому множеству. Расширенная модель $\mathfrak{M}[G]$ состоит тогда из всех референтов R_G. Особенность этого определения состоит в том, что имена принадлежат исходной модели, так что её «обитатель» может формулировать предложения о расширенной модели, хотя и не может проверить их истинность, поскольку она зависит от генерического множества, которое, как правило, исходной модели не принадлежит.

Разумеется, мы не можем выбирать G произвольно. Оно, например, не должно содержать несовместимых условий. Кроме того, оно выбирается как подмножество исходной модели, не являющееся её элементом (такие подмножества всегда существуют), и затем присоединяется к ней в качестве элемента. Но мы не можем просто добавить G к нашей модели, т. к. это может привести к тому, что результат перестанет быть моделью ZF. Поэтому мы должны добавить ещё какие-то множества, чтобы обеспечить удовлетворение аксиоматики. Скажем, если мы добавляем G, то должны также добавить множество-степень G, его объединения и пересечения с другими множествами и т. д. В результате, G должно подчиняться определённым требованиям. Прежде всего, вместе с любым условием оно должно содержать все менее точные. Действительно, такое условие содержит уточнённую информацию, т. е. подразумевает и все менее точные условия. Таким образом, мы имеем условие

Rd1 если $\pi_1 \in G$ и $\pi_2 \subset \pi_1$, то $\pi_2 \in G$.

Далее, генерическое множество не должно содержать несовместимых условий, что даёт нам требование

Rd2 $[(\pi_1 \in G)$ и $(\pi_2 \in G)] \to \exists\pi_3[(\pi_3 \in G)$ и $(\pi_1 \subset \pi_3)$ и $(\pi_2 \subset \pi_3)]$.

Другими словами, все условия, принадлежащие генерическому множеству, попарно совместимы.

Эти требования обеспечивают согласованность генерического множества, но необходимо ещё одно, собственно, требование генеричности, в формулировке которого, возможно, и состоит главная заслуга Коэна. Бадью формулирует его, исходя из требования невыразимости (не существует формулы, описывающей это множество; оно набирается «вручную»), однако, как мы вскоре увидим, оно имеет также внутренние с точки зрения построения моделей основания. А именно, мы увидим, что условий генерическому множеству приводит к истинности (вынуждает истинность) определённых формул в модели. Тогда условие генеричности гарантирует, что для каждой формулы её истинность или ложность вынуждается каким-то условием из множества G. Бадью не упоминает об этом свойстве генерического множества, для него условие генеричности означает, что субъект не может в своём знании этого множества опереться на язык ситуации, который оказывается неспособным его описать. Это не просто оставляет место для субъективного решения, но требует субъекта как того, кто обеспечивает существование этого множества, в конечном итоге — существования истины.

Более конкретно, для формулировки условия генеричности Бадью вводит понятие доминанты (domination). *Доминантой* называется подмножество условий, такое, что всякое условие либо ему принадлежит, либо меньше как минимум одного из его элементов. Другими словами,

$$\text{если } \pi_1 \notin D, \text{ то } \exists\pi_2\big(\pi_2 \in D \;\&\; \pi_1 \leqslant \pi_2\big).$$

Такие множества называются плотными, хотя Бадью этого термина не использует. Условие генеричности звучит теперь так: G должно содержать как минимум по одному элементу из каждой доминанты D, т. е.

$$\forall D\big(D \cap G \neq \varnothing\big).$$

Что это означает для условий, как они определены Бадью? Рассмотрим множество условий, таких, что $\pi^+ \cup \pi^-$ содержит некоторую фиксированную точку x: $D = \{\pi \mid x \in \pi^+ \cup \pi^-\}$. Любое условие вне него (т. е. не содержащее x) может быть расширено так, что захватит точку x и таким образом совпадёт с каким-то элементом D. Таким образом, D является доминантой или плотным множеством. Условие генеричности означает тогда, что для всякой точки x гарантируется, что генерическое множество содержит хотя бы одно условие, содержащее его. Мы можем рассматривать π^+ и π^- как частичную информацию о некотором предикате $e(x)$. Тогда условие генеричности означает, что функция $e(x)$ будет определена на всех элементах модели. Таким образом, условие генеричности это условие полноты, гарантирующее определённость в расширенной модели множеств элементов, положительно и отрицательно связанных с событием.

Продолжим рассмотрение модели.

Каждое множество исходной модели будет иметь имя в новой. Действительно, рассмотрим имена

$$\mu_x = \{\langle \mu_y, \varnothing \rangle \mid y \in x\},$$

как обычно, выстраиваемые рекурсивно, начиная с пустого множества. Поскольку пустое множество всегда принадлежит G, то для их интерпретаций получаем: $R_G(\mu_x) = x$. Таким образом, исходная модель является подмножеством новой модели.[1] Для таких имён (как если бы множество условий состояло из единственного элемента) процедура их построения совпадает с процедурой построения универсума фон Неймана.

Далее, поскольку условия принадлежат исходной модели, они также имеют имена. Пусть μ_π — имя условия π, тогда для имени $\mu_G = \{\langle \mu_\pi, \pi \rangle \mid \pi \in \mathbb{P}\}$ имеем $R_G(\mu_G) = G$. Таким образом, генерическое множество является элементом новой модели.

Перейдём теперь к ключевому элементу метода Коэна, которым является понятие форсинга или вынуждения. Форсинг это связь между фактом принадлежности условия генерическому множеству и истинностью некоторой формулы в новой модели. Бадью обозначает отношение форсинга символом $\rightleftharpoons$, я, однако, буду использовать более привычное математикам обозначение $\Vdash$. Будем записывать форсинг следующим образом: $\pi \Vdash \varphi(\mu_1, \dots, \mu_n)$, что читается «условие π вынуждает формулу φ», и означает (для любого G)

$$\varphi\,(R_G(\mu_1), \dots, R_G(\mu_n)) \text{ тттк } \exists \pi \in G[\pi \Vdash \varphi(\mu_1, \dots, \mu_n)]. \tag{4.1}$$

Иначе говоря, формула истинна в расширенной модели тогда и только тогда, когда существует условие, принадлежащее генерическому множеству, вынуждающее эту формулу. Все предыдущие построения — порядок, Rd1, Rd2, генеричность — служили для того, чтобы можно было корректно построить отношение форсинга. Сама формула (4.1) является определением форсинга. Она верна при любом выборе генерического множества. Например, если некоторое условие π принадлежит генерическому множеству, то в расширенной ситуации истинно утверждение «генерическое множество непусто», и мы имеем следующее отношение между любым условием и формулой:

$$\pi \Vdash (G \neq \varnothing).$$

---

[1] Строго говоря, во всех наших построениях мы должны учитывать так называемое свойство абсолютности всех используемых определений, т. е. неизменность обозначаемых ими множеств при переходе от исходной модели к новой. Например, должны сохраняться множества, соответствующие именам. Это важно, поскольку у нас появляется большое количество новых множеств, некоторые из которых могут менять состав уже имеющихся. Так происходит, например, со множеством-степенью, и поэтому оно не являются абсолютным.

Форсинг означает, что мы имеем подобное соотношение для всех утверждений новой модели. Само построение форсинга довольно сложно, и я не буду его здесь воспроизводить (мы увидим нужные детали ниже в другой формулировке, см. § 4.2). Для нас важно, что, как показал Коэн, это построение возможно, и это позволяет нам судить о свойствах новой модели, имея частичную информацию о генерическом множестве. Независимость форсинга от выбора конкретного G означает, что это отношение может быть построено в исходной модели, т. е. не требует нашего «перенесения» в расширенный мир. Вообще, все понятия, касающиеся форсинга — имена, условия, генерическое множество, само отношение форсинга — определимы в исходном мире. Это означает, что они понятны субъекту, находящемуся в нём. Именно это делает возможной особую субъективную процедуру. Субъект имеет язык, состоящий из имён, интерпретация которых зависит от генерического множества и поэтому становится известной лишь после того, как это множество само становится известным. Поскольку генерическое множество бесконечно, субъект никогда не обладает вполне смыслом языка, на котором он говорит, хотя его утверждения относятся к новой ситуации, создаваемой отбором генерического множества. Невыразимость последнего означает, что субъект принимает решение о принадлежности к нему условий на свой страх и риск. Согласно Бадью, он опирается на связь условия с событием, которая, однако, остаётся в «Бытии и событии» загадочной (сам Бадью в «Логиках миров» называет это «таинственным именованием» и признаёт его недостаточную проработанность[1]). Соответственно, остаётся неясным задаётся ли генерическое множество «объективно» некоторым событием или выстраивается «субъективно» единственно на основании решения субъекта.

В целом, однако, — и в этом состоит амбиция проекта Бадью — мы получаем теорию субъекта, избегающую двух полюсов классического подхода: тотальности заранее данного единства и чистой негативности субъективистского отказа. Субъект Бадью одновременно заранее задан и не тотализируем даже в бесконечном процессе. При этом субъект существует благодаря тому, что сущее устроено именно таким образом. В этом суть возражения Бадью Лакану в последнем разделе «Бытия и события»: негативность, характерная для субъекта, имеет источником не его самого (его расколотость и сущностную нехватку), а принципиально незавершаемое сущее.

Таков первоначальный подход Бадью. Мы увидим, что он сталкивается с трудностями, для разрешения которых Бадью обращается к теории категорий и топосов, служащих основным аппаратом в «Логиках миров». но прежде чем к этому перейти, нам нужно понять, как эта первоначальная теория выглядит в более широком математическом контексте. Для этого мы рассмотрим семантику Крипке, а также булево- и гейтингозначные модели. Это, в частности,

---

[1] *Badiou A.* Logiques des mondes. P. 381.

позволит нам установить связь между построениями Бадью в первом и втором томе «Бытия и события».

§ 4.2. Интерпретации форсинга

Семантика Крипке

Вообще говоря, подход Бадью шире, чем интерпретация Крипке, и эта семантика не является единственно возможной для его формальных построений. Однако она поможет нам понять некоторые детали и послужит удобным иллюстративным примером. Модель была построена Крипке для модальных логик и затем применена к интерпретации интуиционистской логики (исторически, эта была первая теория моделей для неклассических логик). Нам интересно именно последнее, т. к. логика как субъекта, так и объекта Бадью является интуиционистской. Основной работой для данного раздела является статья Крипке 1965 года[1], которой я буду, в основном, следовать, хотя и формулировать модель в виде, позволяющем установить соответствие с онтологией (а также феноменологией) Бадью. В этой статье Крипке строит модель для гейтинговой формализации интуиционистской логики, и это позволит нам сделать вывод о фактической логике подхода Бадью.

Модели Крипке являются естественным способом описать частичное знание и его изменение. Пусть знание выражается утверждениями об истинности формул в некотором языке. Для простоты, рассмотрим сначала язык пропозициональной логики, а затем расширим его до языка первого порядка (§ 4.2). Пусть уровень знания состоит в том, что мы знаем об истинности некоторого множества формул. Крипке называет такой уровень миром или доказательной ситуацией (evidential situation). Мир, таким образом, характеризуется набором истинных в нём формул или, коротко говоря, моделью. Обозначим множество миров через W. Они связаны друг с другом отношением «достижимости» (accessibility): одни миры «достижимы» или «доступны» из других в смысле роста знания; мир w достижим из мира v, если множество истин последнего является подмножеством множества истин первого. Отношение достижимости, очевидно, 1) рефлексивно, т. е. каждый мир доступен из себя, 2) транзитивно, т. е. если мир w доступен из v, а v — из u, то мир w также доступен из u, и 3) антисимметрично, т. е. если w доступен из u и u доступен из w, то w и u совпадают. Таким образом, множество миров частично упорядочено. Упорядоченную пару $\langle W, \leqslant \rangle$ из множества и частичного порядка на нём называют *шкалой* (frame), а множество W — множеством возможных миров. Сам Крипке интерпретирует

---

[1] *Kripke S.* Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I // Formal Systems and Recursive Functions (Eighth Logic Colloquium, Oxford, July 1963). Amsterdam : North Holland Publishing Co., 1965. Pp. 92–130.

элементы W как уровни знания, а отношение достижимости — как рост знания, появление новых доказательств или свидетельств.

Формально, модель Крипке задаётся тройкой $(W, \leqslant, \Vdash)$, где $\Vdash$ — отношение между мирами и формулами, такое, что для миров w, u и формул φ, ψ

1. если P — пропозициональная переменная, $w \leqslant u$ и $w \Vdash P$, то $u \Vdash P$,
2. $w \Vdash \varphi \wedge \psi$ тттк $w \Vdash \varphi$ и $w \Vdash \psi$
3. $w \Vdash \varphi \vee \psi$ тттк $w \Vdash \varphi$ или $w \Vdash \psi$
4. $w \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ тттк для всех $u \geqslant w$: если $w \Vdash \varphi$, то $w \Vdash \psi$,
5. $w \Vdash \neg\varphi$ тттк ни в каком $u \geqslant w$ не верно, что $u \Vdash \varphi$.

Отношение $\Vdash$ есть отношение форсинга (вынуждения), выполнения и т. д. Оно читается как «w вынуждает φ», «φ выполняется в мире w», «мир w выполняет формулу φ» и т. д. Первое условие обеспечивает сохранение знания, его кумулятивность: если формула выполнена в некотором мире, то она выполнена во всех достижимых из него мирах. Нужно заметить, что условие 4 не предполагает никакого «следования» ψ из φ, оно лишь говорит, что всегда, когда в мире u выполнено φ в нём оказывается выполнено ψ. При этом неистинность здесь не совпадает с ложностью, а лишь указывает на неопределённость значения истинности, на отсутствие доказательства или свидетельства. Кроме того, мы видим, что истинность импликации и отрицания зависит от истинности формул в будущих мирах. Можно показать, что такое определение сохраняет истинность формул при движении «вверх» по дереву миров, если она сохраняется для исходных пропозиций.

Только что описанный способ построения модели (используемый самим Крипке) удобен для установления связи с понятием форсинга у Коэна, и мы воспользуемся им ниже для интерпретации раннего подхода Бадью. Но рассмотрим также другой, эквивалентный ему способ, который понадобится нам позже, при рассмотрении теории объекта Бадью (§ 6.2).

Определим *наследственное множество* следующим образом: множество $A \subseteq W$ является наследственным в W, если из $w \in A$ и $w \leqslant u$ следует, что $u \in A$. Другими словами, наследственное множество замкнуто при движении «вверх», вместе с каждым w оно содержит все миры, бóльшие w. Назовём множество наследственных подмножеств W^+. Мы можем теперь вместо того. чтобы говорить о множестве формул, истинных в данном мире, говорить о множестве миров, в которых истинна данная формула. Это последнее множество будет всегда наследственным, и мы можем считать его истинностным значением формулы. Свойство наследственности соответствует тому, что формула, приняв истинностное значение, не меняет его при движении «вверх» по порядку достижимости. Вместо того, чтобы задавать отношение $\Vdash$, мы можем теперь определить оценку как функцию, сопоставляющую каждой формуле множество миров, в которых она истинна.

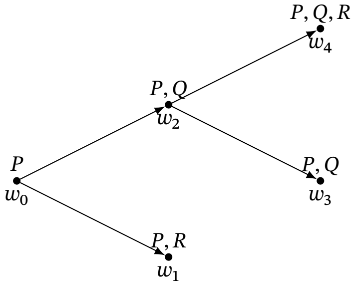

Рис. 4.1. Дерево миров Крипке

Рассмотрим пример самого Крипке (рис. 4.1). Пусть мы имеем частично упорядоченное множество миров $\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ и множество атомарных формул $\{P, Q, R\}$, истинность которых установлена в каких-то из этих миров. На рисунке миры изображены в виде графа, над каждой вершиной которого перечислены формулы, истинные в этой точке. Таким образом, если V — функция оценки для пропозициональных переменных, то $V(P) = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $V(Q) = \{w_2, w_3, w_4\}$ и $V(R) = \{w_1, w_4\}$.

В общем виде, пусть мы имеем оценку $V(Q)$ для всякой атомарной формулы Q. Определим истинность сложных формул. Обозначим через $[\![\varphi]\!]$ множество миров (уровней знания), на которых истинна формула φ. Это функция, которая каждой формуле φ ставит в соответствие множество миров, в которых она истинна. Определим её рекурсивно:

$$\begin{aligned}
[\![Q]\!] &= V(Q) \text{ для всех пропозициональных переменных } Q,\\
[\![\varphi \wedge \psi]\!] &= [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!],\\
[\![\varphi \vee \psi]\!] &= [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!],\\
[\![\neg\varphi]\!] &= \big\{w \mid \text{для любого } u, \text{ если } w \leqslant u, \text{ то } u \notin [\![\varphi]\!]\big\}, && (4.2a)\\
[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!] &= \big\{w \mid \text{для любого } u, \text{если } w \leqslant u, \text{то либо } u \notin [\![\varphi]\!],\\
&\qquad \text{либо } u \in [\![\psi]\!]\big\}. && (4.2b)
\end{aligned}$$

Первая строчка этих соотношений прямо следует из определения функции V. Следующие два условия очевидны: формула $\varphi \wedge \psi$ истинна на пересечении множеств миров, в которых истинны φ и ψ по отдельности, а формула $\varphi \vee \psi$ — на их объединении. Четвёртое условие означает, что отрицание формулы φ истинно в тех мирах, из которых не достижим ни один мир, в котором было бы истинно φ. Другими словами, формула ложна в некоторый момент времени, если она не будет доказана ни в один из последующих моментов (достижимых из данного мира). Такое определение отрицания характерно для интуиционизма. Например, на рис. 4.1 миры w_2 и w_3 отличаются, хотя множество истинных формул в них совпадает. Отличие состоит в том, что в первом из них формула R ещё может стать истинной, тогда как во втором — нет (это означает, что мы имеем достаточно информации, чтобы это утверждать). Согласно интуиционистскому определению ложности это означает, что в w_3 формула R ложна, тогда как в w_2 — не имеет значения истинности. Следующее условие определяет логическую операцию импликации: формула $\varphi \Rightarrow \psi$ истинна в тех мирах, в которых для всякого достижимого из него мира истинность φ всегда сопровождается истинностью ψ, а также в мирах, в которых φ ложна.

Можно показать — и это для нас исключительно важно, — что наследственные множества образуют так называемую алгебру Гейтинга. Эти алгебры будут также играть важнейшую роль в феноменологии Бадью, поэтому прежде, чем мы двинемся дальше, нам нужно сделать отступление и рассмотреть их подробнее.

Математика гейтинговых алгебр

Рассмотрим определение и основные свойства гейтинговых алгебр. Для этого вспомним определения из § 3.3. В частично упорядоченном множестве $(\mathbb{P}, \leqslant)$ *верхней гранью* двух элементов a и b называется такой элемент c, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. *Наименьшая верхняя грань* (н. в. г.) или *супремум*, если она существует, обозначается $a \vee b$. *Нижней гранью* двух элементов a и b называется такой элемент c, что $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$. *Наибольшая нижняя грань* (н. н. г.) или *инфимум*, если она существует, обозначается $a \wedge b$. *Решёткой* называется частично упорядоченное множество, в котором для каждых двух элементов существует наименьшая верхняя грань и наибольшая нижняя грань. *Нулём* или *минимумом* решётки называется элемент $\bot$, такой, что для любого a из $\mathbb{P}$ верно, что $\bot \leqslant a$. *Единицей* или *максимумом* решётки называется элемент $\top$, такой, что для любого a из $\mathbb{P}$ $a \leqslant \top$. Решётка называется ограниченной, если в ней существует минимум и максимум. Решётка называется *дистрибутивной*, если для всех $a, b, c \in \mathbb{P}$ имеют место равенства (следующие одно из другого)

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Элемент называется *дополнением* элемента a и обозначается как $\neg a$, если $a \vee \neg a = \top$ и $a \wedge \neg a = \bot$. Решётка называется *решёткой* с дополнениями, если каждый её элемент имеет в ней дополнение. В частности, если решётка имеет максимум и минимум, то $\neg\bot = \top$ и $\neg\top = \bot$.

Мы видели, что операции на решётках моделируют логические операции, а максимальный и минимальный элементы — истинностные значения. Гейтинговы алгебры служат моделями пропозиционального исчисления — однако не классического, а интуиционистского, как мы вскоре увидим. Они возникают следующим образом. Пусть у нас есть набор пропозиций и отношение выводимости на них: $a \vdash b$ — «из a выводимо b». Это отношение, очевидно, рефлексивно и транзитивно. Будем считать эквивалентными пропозиции, которые выводятся друг из друга:

$$a \equiv b \ := a \vdash b \text{ и } b \vdash a.$$

Тогда отношение на классах эквивалентности будет также антисимметричным, т. е. мы получим аксиомы частичного порядка PO. Будем всегда предполагать эту антисимметричность, т. е. считать, что элементами алгебры являются классы эквивалентности пропозиций или «истинностные значения». Таким образом, истинностные значения частично упорядочены. Будем обозначать порядок следующим образом:

$$a \leqslant b := a \vdash b.$$

Кроме того, рассмотрим ситуации, когда каждая пара элементов (а, следовательно, любое их конечное множество) имеет инфимум и супремум, а всё множество — минимальный и максимальный элементы, которые будем обозначать, как обычно, $a \wedge b$, $a \vee b$, $\bot$ и $\top$, соответственно. Инфимум это наибольшая пропозиция (точнее, пропозиция с наибольшим истинностным значением), из которой выводятся как a, так и b, «общая часть» их истинностного значения, т. е. логическая функция «и». Аналогично, супремум это наименьшая пропозиция, которая выводится как из a, так и из b, т. е. логическая функция «или». Минимальным истинностным значением обладают пропозиции, которые не могут быть выведены, а максимальным — эквивалентные тавтологиям.

Таким образом, мы рассматриваем ограниченные решётки. Гейтинговой алгеброй называется ограниченная решётка, в которой для каждой пары элементов существует операция импликации $a \Rightarrow b$. Основным требованием к этой операции является её способность участвовать в выводе по правилу modus ponens: она должна быть такой, чтобы из истинности a и $a \Rightarrow b$ выводилась истинность b. Или, в наших обозначениях, это такое x, что

$$a \wedge x \vdash b,$$

что в терминах порядка означает:

$$a \wedge x \leqslant b.$$

Мы определим импликацию как наибольший из таких x, в этом случае она оказывается единственной (если существует) для всякой пары.

В итоге, *алгеброй Гейтинга* или *гейтинговой алгеброй* называется ограниченная решётка, в которой для каждой пары элементов определена операция импликации (или относительного псевдодополнения) $\Rightarrow$, такая, что

$$(x \wedge a) \leqslant b \text{ эквивалентно } x \leqslant (a \Rightarrow b).$$

Не следует, однако, путать импликацию и логическое следование. Следование может существовать и в логических теориях, в которых не определена импликация. Например, из $a \wedge b$ логически следует a, независимо от какого бы то ни было определения импликации. Кроме того, импликация определена для всякой пары истинностных значений, тогда как отношение следования, вообще говоря, не для всякой. Интуитивно, можно сказать, что импликация это «степень следования» одной пропозиции из другой.

Отрицанием или *псевдодополнением* a назовём наибольшую пропозицию, чья конъюнкция с a не может быть доказана. Иными словами, предположение о её истинности вместе с a является противоречием. В наших терминах это выражается следующим образом:

$$\neg a := a \Rightarrow \bot.$$

При этом особенностью гейтинговой алгебры является то, что равенство $\neg\neg a = a$ в ней не выполняется. Мы можем лишь утверждать, что $a \leqslant \neg\neg a$, но не то, что $\neg\neg a \leqslant a$. Таким образом, двойное отрицание не эквивалентно утверждению. Это свойство гейтинговых алгебр делает их удобным инструментом формализации интуиционистской логики и оказывается, как мы увидим, важным для Бадью. Гейтинговы алгебры являются моделями интуиционистского пропозиционального исчисления и были введены Гейтингом именно для формализации последнего. Если в гейтинговой алгебре выполняется тождество $\neg\neg a = a$, то она называется *булевой*. Булевы алгебры служат интерпретацией классической пропозициональной логики, поскольку в них выполняется закон исключённого третьего.

Гейтингова алгебра называется *полной*, если она является полной решёткой, т. е. если любое её подмножество имеет инфимум и супремум. Полные гейтинговы алгебры играют исключительную роль во втором томе «Бытия и события», поскольку ими оказываются трансцендентали — важнейшее понятие феноменологии Бадью, но нашей задачей будет понять, что они не менее важны и для первого тома, хотя это и не всегда просто разглядеть.

Полные гейтинговы алгебры могут образовывать три категории, различающиеся морфизмами. *Гомоморфизмом* гейтинговых алгебр называется гомоморфизм решёток, который сохраняет импликацию. Гейтинговой категорией $\mathcal{CH}ey$ называется категория, в которой морфизмами служат гомоморфизмы гейтинговых алгебр. Две другие категории дуальны друг другу: в категории фреймов $\mathcal{F}rm$ морфизмами являются функции, сохраняющие конечные инфимумы и бесконечные супремумы, а категория локалей $\mathcal{L}oc$ ей дуальна. Мы будем говорить об этих категориях позже в связи с бесточечными топологиями (§ 4.2).

Примеры гейтинговых и булевых алгебр

Рассмотрим несколько простых примеров булевых и гейтинговых алгебр, которые будут нам также полезны при рассмотрении феноменологии Бадью. В последней они используются при определении трансцендентали, поэтому я буду сразу их так называть.

Пример 1. (Множество подмножеств) В определённом смысле парадигмальным примером булевой алгебры является совокупность подмножеств любого множества, упорядоченных по включению (алгебра множества-степени). $a \leqslant b$ означает тогда $a \subseteq b$. В этой алгебре $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ соответствуют операциям пересечения, объединения и дополнения множеств $\cap$, $\cup$ и $\sim$, а $\bot$ и $\top$ интерпретируются как пустое множество и всё множество.

Пример 2. (Трансцендентал T_0) Одним из простейших примеров трансцендентали является множество из двух элементов $\{ \bot, \top \}$, формализующее классическую логику. При этом $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ соответствуют логическим операциям конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, а $\bot$ и $\top$ интерпретируются как «ложь» и «истина». Именно по этой причине булева алгебра называется булевой. Она является обобщением алгебры обычной двузначной логики. Бадью обозначает эту алгебру T_0. Она важна тем, что задаёт то, что можно назвать трансценденталью онтологии. Действительно, в онтологии мы имеем лишь два значения для утверждений истинности и степеней явленности. В этом смысле, онтология у Бадью является частным случаем феноменологии: это ситуация, в которой «явлено всё и в полной мере».

Пример 3. (Множество экспертов) Рассмотрим частный случай алгебры множества-степени. Предположим, что у нас есть (конечное) множество экспертов, которые оценивают предлагаемые им предложения как истинные и ложные. Будем считать степенью истинности множество экспертов, оценивших предложение как истинное. Инфимум и супремум определяются как пересечение и объединение множеств, а дополнение — как дополнение подмножества до полного множества. Минимальной степенью будет случай, когда никто из экспертов не оценил предложение как истинное, а максимальной — когда так оценили все эксперты. Тогда мы получим булеву алгебру, которую я буду называть алгеброй множества экспертов. Она отличается от используемой Бадью в двух отношениях. Во-первых, последняя бесконечна и, во-вторых, является не булевой, а гейтинговой или псевдобулевой. Тем не менее, она будет удобна для простых иллюстраций.

Пример 4. (Множество неуверенных экспертов) Пусть теперь экспертам будет позволено давать три оценки предложений: «истинно», «ложно» и «возможно». Будем считать эти оценки упорядоченными, причём «возможно» это промежуточная оценка между двумя другими. Оценки составят гейтингову алгебру, если определить инфимум и супремум как $p \wedge q = \min(p, q)$ и $p \vee q = \max(p, q)$ (очевидно, что в данном случае они всегда существуют), а относительное псевдодополнение как:

$$p \Rightarrow q := \begin{cases} \text{«истинно»}, & \text{если } q \leqslant p; \\ q, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответственно, псевдодополнение $\neg p$ (определяемое как $p \Rightarrow$ «ложно») равно «истинно» при $p =$ «ложно» и «ложно» при всех остальных p. Далее, рассмотрим упорядоченные наборы оценок, данных каждым экспертом (т. е. на первом месте — оценка первого эксперта, на втором — второго и т. д.): $p = \langle p^1, p^2, \dots, p^N \rangle$, где p^n — оценка эксперта номер n. Если на этих наборах, мы определим операции покомпонентно:

$$\begin{aligned} p \wedge q &:= \langle p^1 \wedge q^1, p^2 \wedge q^2, \dots, p^N \wedge q^N \rangle \\ p \vee q &:= \langle p^1 \vee q^1, p^2 \vee q^2, \dots, p^N \vee q^N \rangle \\ p \Rightarrow q &:= \langle p^1 \Rightarrow q^1, p^2 \Rightarrow q^2, \dots, p^N \Rightarrow q^N \rangle \\ \neg p &:= \langle \neg p^1, \neg p^2, \dots, \neg p^N \rangle, \end{aligned}$$

то получим гейтингову алгебру[1]. Минимумом и максимумом в ней будут служить кортежи, состоящие, соответственно, из оценок «ложно» и «истинно» для всех экспертов.

Пример 5. (Семейство открытых подмножеств) Если одним из основных примеров булевой алгебры было множество всех подмножеств некоторого множества, то в некотором смысле каноническим примером гейтинговой алгебры является множество всех *открытых подмножеств* некоторого множества, что объясняет связь с топологией, которую мы находим в «Логиках миров». Мы будем рассматривать топологическую интерпретацию более подробно позднее (§ 4.2), сейчас же дадим лишь основные определения, необходимы для описания форсинга. Топология настолько важна для нас, что заслуживает отдельного раздела.

Введение в топологию

Интуитивно, топологическое пространство это набор точек, связанных между собой непрерывным образом (хотя существуют и бесточечные топологии). Это означает, что топология изучает свойства объектов, не изменяющиеся при непрерывных преобразованиях (так кружка и тор — обратимся к популярному примеру — неразличимы для топологии). Как оказывается, эти свойства удобно описывать в терминах так называемых открытых множеств. Существует несколько способов определения топологического пространства. Нам понадобится три основных.

---

[1] Доказательство этого факта можно найти, например, в *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. С. 169.

Через систему открытых подмножеств

Это наиболее распространённое определение, хотя Бадью в «Логиках миров» выбирает другое. *Топология* или семейство *открытых подмножеств* некоторого множества X определяется как семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. Пустое множество и всё множество X — открытые подмножества.
2. Пересечение конечного семейства открытых подмножеств есть открытое подмножество.
3. Объединение произвольного (т. е. также и бесконечного) семейства открытых подмножеств есть открытое подмножество.

Множество с заданной на нём топологией называется *топологическим пространством*. Отображение топологических пространств, при котором прообраз каждого открытого подмножества является открытым подмножеством, называется *непрерывным* (мы увидим основания для такого определения ниже). Отображение топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно 1) непрерывно, 2) взаимнооднозначно, и 3) обратное к нему также непрерывно. Важность гомеоморфизма для топологии обусловлена тем, что он устанавливает взаимнооднозначное соответствие не только между точками пространства, но и между их открытыми множествами. Поэтому гомеоморфные пространства топологически неразличимы (эквивалентны), они могут быть непрерывно трансформированы друг в друга. Можно сказать, что гомеоморфизм является основным отображением, изучаемым топологией, поскольку она занимается топологическими инвариантами, т. е. свойствами фигур, не изменяющимися при гомеоморфных преобразованиях. В этом смысле гомеоморфизм входит в определение топологии как таковой.

Через систему окрестностей

Этот способ играет важную роль при интерпретации форсинга и первоначальной теории субъекта Бадью. В этом случае топология задаётся путём определения для каждой точки множества X *системы окрестностей* или *фильтра окрестностей*. Интуитивно, окрестности точки это подмножества точек, «достаточно близких» к данной. Для всякой решётки (а фактически нижней полурешётки) *фильтром* называется подмножество F, такое, что

- F непусто,
- если $a \in F$ и $b \in F$, то $a \wedge b \in F$,
- если $a \in F$ и $a \leqslant b$, то $b \in F$.

Подмножества X составляют решётку относительно включения, и система окрестностей точки x определяется как фильтр (то есть система подмножеств) $F(x)$, такой, что

- x принадлежит каждому элементу $F(x)$,
- для каждого подмножества U из $F(x)$ существует некоторое V из $F(x)$, такое, что для каждого $y \in V$ множество U также принадлежит $F(y)$.

Фильтр обычно рассматривают как систему подмножеств, сходящихся к x, и x в этом случае называется пределом фильтра (строго говоря, x является пределом фильтра, если любая окрестность x принадлежит этому фильтру). Вообще говоря, фильтр может иметь более одного предела или не иметь его вовсе, и топологические пространства классифицируются по этому признаку (на хаусдорфовы, компактные и т. д.). Мы рассмотрим это немного подробнее в разделе о бесточечных топологиях.

После того, как система окрестностей задана, открытое множество определяется как множество, которое вместе с каждой точкой содержит какую-то её окрестность. Напротив, если мы задаём топологию через систему открытых множеств, то окрестность точки x определяется как множество, которое включает в себя какое-то открытое множество, содержащее x. Окрестность, таким образом, сама не обязана быть открытым множеством, но она должна быть «расширением» какого-то из них.

Вероятно, определение непрерывности интуитивно яснее в терминах окрестностей, чем открытых подмножеств: отображение $f : A \to B$ непрерывно в точке x, если прообраз всякой окрестности $f(x)$ является окрестностью x. Интуитивно это означает, что достаточно маленькими изменениями x мы можем добиться как угодно маленьких изменений $f(x)$, что и означает отсутствие «скачков» в их связи. Непрерывные функции выступают гомоморфизмом (т. е. отображением, сохраняющим структуру) для топологических пространств.

Через операцию взятия внутренности

Это способ, который выбирает Бадью в «Логиках миров». Здесь топологическое пространство определяется как множество, с определённой на нём функцией «внутренности» **Int**. Если X — топологическое пространство, а A, B — его подмножества, то эта функция удовлетворяет следующим аксиомам[1]:

$$\begin{array}{ll} \text{A-int}_1 & \mathbf{Int}(X) = X \\ \text{A-int}_2 & \mathbf{Int}(A) \subseteq A \\ \text{A-int}_3 & \mathbf{Int}(A \cap B) = \mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Int}(B) \\ \text{A-int}_4 & \mathbf{Int}(\mathbf{Int}(A)) = \mathbf{Int}(A) \end{array}$$

---

[1] *Badiou A.* Logiques des mondes. P. 462-463 ; *Энгелькинг Р.* Общая топология. М. : Мир, 1986. С. 38.

Связь трёх определений топологии

Три приведённых определения связаны друг с другом и могут быть определены друг через друга. Определение через систему открытых подмножеств является, в некотором смысле, каноническим, поэтому предположим, что мы имеем такую систему. Тогда подмножество $V \subset X$ называется *окрестностью* точки $x \in X$, если существует открытое подмножество $U \subset V$ такое, что $x \in U$. Окрестность может быть открытой или замкнутой в зависимости от того, является ли она открытым или замкнутым подмножеством. Внутренностью множества A будет его максимальное открытое подмножество. Границей множества называется разность между ним его внутренностью. Напротив, если мы определяем топологию через систему окрестностей, то открытые подмножества можно определить как такие подмножества, которые являются окрестностями каждой своей точки. Если точка имеет окрестность, то она — внутренняя. Соответственно, внутренностью множества является совокупность его внутренних точек. Наконец, при задании топологии через функцию внутренности открытое подмножество определяется как любое подмножество, совпадающее со своей внутренностью:

$$\mathbf{Int}(A) = A.$$

Иначе говоря, открытое подмножество не содержит граничных точек.

Таким образом, топологии, построенные на основании этих трёх определений эквивалентны и могут быть получены одна из другой.

Определение открытых множеств очень гибкое и накладывает минимальные условия на них, поэтому топологии оказываются очень разнообразными. Например, в дискретной топологии всякое подмножество является открытым, а в тривиальной топологии есть только два открытых подмножества — пустое и всё множество X. Обычно, однако, мы имеем дело с каким-то промежуточным случаем. Важно лишь понимать, что множества являются открытыми (а также замкнутыми) не сами по себе, а по отношению к определённой топологии.

Простейшим примером такого семейства открытых множеств на плоскости являются круговые области без границы (т. е. «открытые» области). Фильтром для точки x в них служат множества кругов, содержащих эту точку. Мы можем рассматривать его как набор сужающихся областей, имеющих эту точку пределом. Как мы видим, предел множества открытых подмножеств (т. е. их пересечение) сам может не быть открытым подмножеством. Более того, даже если все подмножества фильтра являются подмножествами некоторого открытого множества, его предел может лежать на границе, т. е. не принадлежать этому подмножеству.

Дополнением (отрицанием) для таких областей не может служить обычное теоретико-множественное дополнение, поскольку оно не является открытым множеством. Поэтому дополнение для них определяется как максимальное открытое множество, не имеющее с ними общих частей, другими словами, обычное дополнение за вычетом границы. Поэтому объединение такой области и её дополнения — т. е. $a \vee \neg a$ — не будет равно всему множеству, поскольку в него не входит граница. Мы имеем здесь аналогию с интуиционистским пониманием отрицания и, фактически, интуиционистская логика имеет прямую топологическую интерпретацию. Мы увидим её, продолжив рассмотрение моделей Крипке.

Семантика Крипке: продолжение

Мы видели, что в этих моделях возможно для каждой формулы ввести оценку $[\![\varphi]\!]$, равную множеству миров, в которых φ истинно. Как можно проверить, эта оценка является гейтинговой алгеброй, в которой порядок задаётся включением, операции $\wedge$ и $\vee$ задаются обычными пересечением и объединением множеств, а отрицание и импликация задаются правыми частями условий (4.2a) и (4.2b), т. е.

$$\neg S = \{\, w \mid u \notin S \text{ для всех } u\text{, таких, что } w \leqslant u \,\}$$
$$S \Rightarrow T = \{\, w \mid \text{для всех } u\text{, таких, что } w \leqslant u,\ \text{ если } u \in S,\ \text{ то } u \in T \,\}.$$

В таком виде эти два условия можно переписать следующим образом:

$$[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!], \qquad (4.4a)$$
$$[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!] = ([\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]),$$

где слева стоят логические операции, а справа — операции на алгебре Гейтинга (при этом условие (4.4a), вообще говоря, излишне, т. к. $\neg[\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!] \Rightarrow \varnothing$).

Посмотрим внимательнее, к какому результату мы пришли. Мы начали с представления частичного знания как упорядоченного множества возможных миров. Затем для каждой формулы мы определили оценку как множество миров, в которых эта формула истинна. Эти множества являются наследственными множествами и составляют полную гейтингову алгебру. В топологических терминах наследственные множества задают топологию или систему открытых множеств. Фильтры тогда описывают множества миров, «сходящихся» к таким мирам, в которых определена истинность всех формул: мы начинаем с пустого мира, в котором нет никакой информации об истинности, и фильтр описывает «сужающуюся» систему миров, нацеленных на некоторый «полностью определённый» мир. Можем ли мы, однако, всё ещё называть его миром? Здесь есть терминологическая ловушка. Дело в том, что финальный мир, к которому, возможно, сходится фильтр, сам не обязательно является открытым множеством. Аналогично, в топологии открытых кругов на плоскости точка, к которой сходится фильтр, сама не является открытым кругом. Поэтому — и это может быть не заметно с первого взгляда — точками в топологической интерпретации моделей Крипке являются не возможные миры W, а финальные миры фильтров (для простоты я предполагаю, что всякий фильтр имеет предел). Чтобы отличать их терминологически, я буду называть последние финальными мирами. Тогда открытое множество это множество финальных миров. Не всякое множество предельных миров будет открытым, а только то, которое можно представить как наследственное, то есть то, которое является «развитием» или расширением некоторого множества возможных миров из W. Наследственные множества описывают близость финальных миров, то есть финальные миры, получающиеся из данного некоторой «вариацией» истинных формул. В открытом множестве всякий мир внутренний, то есть его достаточно малые «вариации» лежат внутри открытого множества. Это означает, что такие вариации можно представить как достижимые из некоторого множества возможных миров. В произвольном (то есть не обязательно открытом) множестве финальных миров A могут существовать такие миры, у которых всякий возможный мир, из которого они получаются, имеет результатом также хотя бы один мир, выходящий за пределы A. Другими словами, как угодно малая окрестность таких миров всегда выходит за пределы A. Можно назвать такие миры граничными. Открытое множество не имеет граничных миров. Неоткрытые множества таковы, что не могут быть определены в терминах наследственных множеств, то есть как «наследование» какого бы то ни было множества возможных миров. Если мы оцениваем формулу φ открытым множеством, то существует такое множество возможных миров, что находясь в них, я могу быть уверенным, что φ будет истинна и в будущем. Если же формула оценена не открытым множеством, то не существует множества возможных миров, в каждом из которых я могу быть уверен, что φ останется истинной. Именно это происходит в классической математике, когда она утверждает закон исключённого третьего. В наших терминах это означает, что она оценивает истинность $\neg\varphi$ как дополнение к $[\![\varphi]\!]$, то есть как $W \setminus [\![\varphi]\!]$. С точки зрения интуиционизма это некорректно, так как в любом множестве возможных миров всегда существует возможность прийти к финальному миру, выходящему за пределы $W \setminus [\![\varphi]\!]$, то есть миру, в котором φ истинно. В результате, ни в каком возможном мире мы не сможем быть уверены в нашей оценке. Напротив, если мы оцениваем отрицание как внутренность $W \setminus [\![\varphi]\!]$, то существует такое множество возможных миров, находясь в котором мы можем быть уверены, что в будущем φ не станет истинным.

Чем при таком понимании является каждый возможный мир? Он соответствует так называемой базе топологии, то есть системе подмножеств $\mathcal{O}_w$, такой, что всякое другое открытое множество является их объединением. Каждый возможный мир соответствует подмножеству $\mathcal{O}_w = \{\, v \mid w \leqslant v \,\}$ (или W^+ в наших обозначениях выше).

Итак, оценку формулы посредством $[\![\varphi]\!]$ мы должны понимать как оценку множеством *финальных* миров, в которых она истинна. При этом наши определения таковы, что мы ограничиваемся открытыми подмножествами, то есть подмножествами, которые можно представить как «развитие» или «наследство» некоторого множества возможных миров. Именно это приводит нас к интуиционистской логике. В целом, эта логика является результатом нашего решения оценивать формулы, учитывая их наследование при движении по мирам, а само это решение связано с намерением отслеживать лишь истинность формул, определяя ложность лишь на этой основе (и понимая истинность как доказуемость).

Расширение до языка первого порядка

Нам осталось рассмотреть, каким образом оценка $[\![\cdot]\!]$ может быть расширена на логику первого порядка. Идея семантики остаётся прежней. Мы выбираем частично упорядоченное множество миров в качестве шкалы и привязываем к каждому его элементу (уровню знания) модель в обычном смысле, то есть, как и прежде, каждому миру мы ставим в соответствие множество истинных в нём формул. Это можно сделать для языка в общем виде, с произвольным набором предикатов и констант, однако нас прежде всего интересует теория множеств, поэтому ограничимся одним предикатом и одной константой, а именно, отношением принадлежности $\in$ и пустым множеством $\varnothing$ (при этом отношение $\in$, строго говоря, будет разным на разных уровнях, и я буду это указывать явно). Тогда для каждого уровня $w \in W$ мы имеем обычную модель $M_w = (A_w, \in_w, \varnothing_w)$, где A_w — множество, $\varnothing_w$ — выделенный элемент этого множества, а $R_w \subseteq A \times A$ — отношение на нём. Определим на моделях отношение достижимости, сопоставив каждым $w \leqslant u$ отображение $A_{wu} : A_w \to A_u$ так, чтобы

1. если $w \leqslant u$, то $A_{wu}(\varnothing_w) = \varnothing_u$, т. е. константа $\varnothing_w$ переходит в константу $\varnothing_u$;
2. если $w \leqslant u$ и $x \in_w y$, то $A_{wu}(x) \in_u A_{wu}(y)$, т. е. элементы, связанные отношением $\in$, остаются им связанными (несмотря на возможное изменение $\in$);
3. A_{ww}, т. е. отображение A_w в себя, — тождественное;
4. если $w \leqslant u \leqslant v$, то $A_{wv} = A_{wu} \circ A_{uv}$, т. е. отображение A_{wu} транзитивно (символ $\circ$ обозначает композицию отображений).

(4.5)

Эти условия показывают, в частности, что при $w \leqslant u$ модель M_u является расширением модели M_w. При этом константы переводятся в константы, и сохраняется истинность формул вида xRy. Кроме того, $A_w \subseteq A_u$, т. е. в мирах могут появляться новые элементы.

Аналогично предыдущему, возможно определить истинностные оценки для формул так построенной модели[1]. В результате, для каждой формулы φ мы

---

[1] Я опускаю детали, которые можно посмотреть, например, в *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный

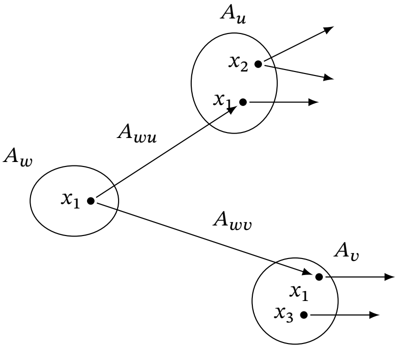

Рис. 4.2. Элементы в модели Крипке.

определим предикат $[\![\varphi]\!]$, равный множеству миров, в которых она истинна. В частности, для формул с кванторами можно написать:

$$[\![\exists t\varphi(t)]\!] = \bigcup_{t\in A_w} [\![\varphi(t)]\!],$$
$$[\![\forall t\varphi(t)]\!] = \bigcap_{t\in A_w} [\![\varphi(t)]\!].$$

Эти выражения полезно сравнить с формулами

$$\exists t\varphi(t) = \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \vee \ldots$$
$$\forall t\varphi(t) = \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \ldots .$$

Мы видим, что $[\![\varphi]\!]$ выполняет роль истинностного значения, причём, как можно проверить, соответствующая алгебра опять является гейтинговой.

Модель Крипке для «Бытия и события»

Построим теперь модель Крипке для случая Бадью.

Прежде всего, в качестве шкалы Крипке или множества миров мы возьмём определённое выше (с. 86) множество условий $\mathbb{P}$; соответствующие миры будем обозначать w_π. Для построения модели нам нужны модельные множества для каждого мира. Бадью, вслед за Коэном, строит их рекурсивно. Сначала определяется система имён $\mu_\alpha = \{\langle\mu_\beta, \pi\rangle \,:\, \pi — \text{условие}, \beta < \alpha\}$. Если обозначить множество условий через $\mathbb{P}$, то каждое имя, как видно, является функцией из множества имён нижнего уровня в множество $\mathbb{P}$. Затем строится интерпретация имён

анализ логики. М. : Мир, 1983. С. 269—270.

$A(\mu) = \{ A(\nu) \mid \langle \nu, \pi \rangle \in \mu \}$. Таким образом, в мире w_π выражение $A(\nu) \in A(\mu)$ истинно, если $\langle \nu, \pi \rangle \in \mu$. Мы имеем, таким образом, для каждого π множества с определённым на них отношением принадлежности. Чтобы говорить о модели Крипке, необходимо сохранение этого отношения при движении по порядку условий. У Бадью это обеспечивается наложением требований на генерическое множество. Действительно, Бадью ограничивается лишь множествами, в которых π принадлежит G: $R_G(\mu) = \{ R_G(\nu) : \ \langle \nu, \pi \rangle \in \mu \text{ и } \pi \in G \}$. При этом всякое условие принадлежит G вместе с превышающими его: $[(\pi_1 \in G) \text{ и } (\pi_1 \leqslant \pi_2)] \rightarrow \pi_2 \in G$. Поэтому для R_G верно, что если принадлежность двух из них выполняется на некотором уровне, то она выполняется и на более высоких уровнях. Роль A_w из модели Крипке играют именно R_G. Чтобы лучше понять, как связаны эти построения с первоначальным подходом Бадью, рассмотрим модель Крипке для форсинга[1]. У Коэна одно и то же множество играет роль как множества модели, так и множества, задающего порядок. Возьмём некоторое множество D и рассмотрим пары $P = \langle P_0, P_1 \rangle$ непересекающихся подмножеств множества D. Упорядочим их по включению P_0 и P_1, то есть $P_p \leqslant P_q$, если $P_{0p} \subseteq P_{0q}$ и $P_{1p} \subseteq P_{1q}$ (другими словами, P_q является расширением P_p). Будем считать, что объединения $P_0 \cup P_1$ задают модельные множества A_w на уровне w (ср. с построением множества условий на стр. 86). В результате, мы получим частично упорядоченное множество уровней w и соответствующие им модельные множества A_w.

Предположим теперь, что у нас есть язык, для простоты — с одним одноместным предикатом **P**. Положим по определению, что на уровне w множество, на котором истинен этот предикат, равно P_0. Тогда мы получим интерпретацию нашего языка на каждом уровне или, другими словами, частично упорядоченное множество моделей нашего языка или миров $M_w = (A_w, \mathbf{P})$. Иначе говоря, мы получим модель Крипке. Как можно проверить, она будет удовлетворять условиям (4.5), выписанным выше, поэтому в каждой из моделей мы можем определить истинность предложений нашего языка на каждом уровне w.

Рассмотрим теперь подмножество $G \subseteq D$. Будем говорить, что оно согласуется с миром M_w, если $P_{0w} \subseteq G$ и $P_{1w} \subseteq D \setminus G$, где $D \setminus G$ — дополнение G до D. Будем также говорить, что G вынуждает φ, если существует M_w, такой, что он согласуется с G и вынуждает φ. Наконец, G будем называть генерическим, если для любого φ оно вынуждает либо φ, либо $\neg\varphi$. Как показал Коэн, генерические множества существуют.

Коэн установил связь между вынуждением и истинностью формул, а именно доказал следующую теорему: Если G — генерическое множество и формула φ не имеет универсальных кванторов, то (относительно присваивания свободных

---

[1] Одна из лучших книг на эту тему: *Fitting M.* Intuitionistic logic, model theory and forcing. Amsterdam, London : North-Holland Pub. Co., 1969. 191 pp.

переменных) G вынуждает φ если и только если последняя истинна когда экзистенциальные кванторы (пробегающие над D) и пропозициональные связки интерпретируются классически, а $\mathbf{P}(x)$ интерпретируется как $x \in G$. Учитывая это, мы получим набор частично упорядоченных миров-моделей, в каждом из которых задана истинность одноместного предиката **P** и известно множество P_0, на котором он истинен. Это позволяет нам судить об истинности формул, использующих этот предикат, т. е. об истинности всех формул, что, в свою очередь позволяет нам для каждой формулы знать множество миров, в котором она истинна. При этом построение позволяет нам, зная (или выбирая) P_0, знать (или выбирать) истинность той или иной формулы. Выбор же P_0 означает выбор множества миров, в котором эта формула истинна. Поскольку миры упорядочены — по нашему предположению, темпорально — так, что P_0 не может убывать, то, став истинной, формула остаётся истинной. Таким образом, выбирая подмножество G так, чтобы оно содержало те или иные P_0, мы выбираем темпоральное поддерево (или даже одну ветвь), истинность формул которых мы можем знать и регулировать.

Крипке использует эту модель для интерпретации процедуры форсинга Коэна. При этом набор генерического множества соответствует ограничению при движении по дереву возможных миров (строго говоря, генерическое множество соответствует фильтру — оно выделяет в дереве лишь определённые ветви). Другими словами, мы получаем форсинг в том виде, который требуется для теории субъекта Бадью. Однако одновременно мы получаем темпоральную интерпретацию этой теории. В ней субъект продвигается по ветвям дерева миров в модели, набирая генерическое множество. Требования к множеству условий, формулируемые Бадью в (401–403) вляются естественными требованиями сохранения истинности формул и расширения информации, а требование генеричности — требованием «охвата» всех возможных формул.

Приведённое построение можно представить немного иначе. Как мы помним, речь у Бадью идёт о расширении некоторой исходной модели, в результате которого в ней появляются новые, нужные нам, структуры. В частности, можно рассматривать условия как последовательное построение функции — назовём её $e(x)$ — отображающей элемент в 1 или 0, в зависимости то того, положительно или отрицательно он связан с именем события. Область определения функции e бесконечна, а условия являются её конечными аппроксимациями, определенными на подмножестве $\pi^+ \cup \pi^-$. Поэтому при построении модели Крипке мы сопоставим каждому миру такую аппроксимацию. Другими словами, будем считать, что в мире w_π (соответствующем аппроксимации π) задана частичная функция $f(x)$, равная 1, если $x \in \pi^+$, 0, если $x \in \pi^-$, и не определённая для остальных x. Движение по дереву миров модели соответствует последовательному определению этой функции (зависящей от маршрута в дереве; пройдя различными маршрутами, мы получим в результате различные функции). Каждому миру w_π мы теперь должны сопоставить множество A_w.

Бадью, в соответствии с методом форсинга, определяет рекурсивно выстраиваемые имена вида $\mathit{имя} = \{ \langle \mathit{имя}, \pi \rangle \mid \pi \in \mathbb{P} \}$. Другими словами, имена являются множествами пар вида $\mu_\alpha = \{ \langle \mu_\beta, \pi \rangle \mid \pi - \text{условие и } \beta < \alpha \}$, где α и β — ординалы. Имена обозначают множества, которые в разных мирах будут различными. Будем писать $\hat{x}$ для имени множества x (опуская указание на мир там, где это не приводит к недоразумениям). Имена кодируют информацию о принадлежности множеств в различных мирах: будем считать, что в мире w_π множеству x принадлежат такие y, для которых пары $\langle \hat{y}, \pi \rangle$ принадлежит $\hat{x}$ для условия π и меньших его. Таким образом, если эта принадлежность выполняется для некоторого мира, то она выполняется и для последующих миров, что соответствует требованиям модели Крипке.

Рассмотрим примеры.

Пусть задано имя $\hat{e} = \{ \langle \hat{x}, \pi \rangle \mid x \in \pi^+ \}$. Оно соответствует некоторому множеству e. Выберем некоторое $\pi \in G$ и затем для него $x \in \pi^+$. Для такого x пара $\langle \hat{x}, \pi \rangle$ принадлежит $\hat{e}$, а так как при этом π принадлежит G, то это означает, что $x \in e$. Таким образом, если в некотором мире, принадлежащем G, элемент x принадлежит π^+, то он принадлежит и e. Иначе говоря, e представляет собой множество, аппроксимациями которого являются различные π^+ (само оно, конечно, зависит от выбранного G). Аналогично, $\{ \langle \hat{x}, \pi \rangle \mid x \in \pi^- \}$ представляет собой имя множества, аппроксимациями которого являются π^-. Это совпадает с нашим пониманием условий как аппроксимаций функции $e(x)$.

Рассмотрим ещё один пример. Поскольку π принадлежат множествам A_w, то они также имеют имена, а именно $\hat{\pi}$. Рассмотрим имя $\hat{G} = \{ \langle \hat{\pi}, \pi \rangle \mid \pi \in \mathbb{P} \}$. Его интерпретацией, как можно видеть, является множество G. Действительно, его элементами будут множества, интерпретирующие имена $\hat{\pi}$ для π, принадлежащих G, т. е. сами такие π: $G = \{ \pi \mid \pi \in G \}$. В соответствии с нашим построением модели Крипке, в мире w_π интерпретацией имени $\hat{G}$ будет множество условий из G, меньших π, т. е. $\{ \pi_1 \mid \pi_1 \leqslant \pi \ \& \ \pi_1 \in G \}$. Таким образом, множество G набирается последовательно, и переход к миру w_π соответствует получению знания о принадлежности ему условия π.

В результате, мы построили семантику Крипке для субъективной процедуры из «Бытия и события»[1]. Эта процедура начинается с исходной модели, которая постепенно расширяется при движении по мирам множества $\mathbb{P}$. Поскольку пустое множество всегда принадлежит G, то имена $\hat{x} = \{ \langle \hat{y}, \varnothing \rangle \mid y \in x \text{ в исходной модели} \}$ обозначают множества, присутствующие в исходном мире $\pi = \varnothing$ и во всех последующих мирах. Аппроксимации таких множеств совпадают во всех мирах и равны самим x. Каждый последующий мир соответствует дополнительному знанию о составе G и, следовательно, о

---

[1] Забегая вперёд, замечу, что переходя теперь к наследственным множествам, как описано выше, мы получим её интерпретацию в терминах объекта. Таким образом, в «Бытии и событии» мы имеем дело с частным случаем объекта поздней теории Бадью, а модели Крипке могут служить инструментом, позволяющим описывать эволюцию его подхода. См. подробнее § 7.3.

строении множеств, в определении которых оно участвует. По мере движения по дереву миров расширяется информация о принадлежности тех или иных множеств друг другу, но в каждом из миров эта информация остаётся частичной. Лишь после завершения (бесконечной) субъективной процедуры информация становится полной, и, в частности, истинносные значения всех формул оказываются определёнными. При этом генерическое множество является множеством возможных путей, ведущих к определённой расширенной модели $\mathfrak{M}[G]$, а субъективную процедуру можно понимать как движение по этим путям. Вывод субъекта Бадью об истинности формулы φ на основании истинности утверждения $\pi \in G$ соответствует «пребыванию» субъекта в мире w_π, в котором формула φ истинна. Субъект в «Бытии и событии» имеет дело с деревом возможных миров с постоянно расширяющейся информацией об истинности утверждений. Это, в частности, позволяет уточнить смысл набора генерического множества у Бадью. Этот набор основан на решении субъекта относительно некоторой, не вполне ясной связи элемента с событием. В случае интерпретации Крипке, это решение есть решение об истинности того или иного предложения, что может, например, требовать доказательства той или иной теоремы. В этом смысле, решение связано не с волей субъекта (хотя изложение Бадью этого не исключает), а с реализацией или нереализацией некоторой возможности, т. е. с устройством мира. Верность событию тогда оказывается верой в истинность положений, требующих доказательства и доказываемых субъектом в ходе субъективной процедуры. Продвижение субъекта по этому пути зависит от его способности сделать тот или иной шаг — способности доказать, изобрести, решиться на что-то.

Гейтингозначные модели

Структура субъективной процедуры становится ещё более прозрачной при описании её в терминах гейтингозначных моделей. Метод гейтингозначных моделей возникает как упрощение и уточнение метода Коэна. Исторически, он возникает как метод булевозначных моделей, т. е. моделей, в которых принадлежность множеств имеет не два истинностных значения («принадлежит», «не принадлежит»), а принимает значение из некоторой булевой алгебры. Однако метод Коэна, а также следующего ему Бадью, лучше описывается, если вместо булевой мы выберем гейтингову алгебру. А кроме того, гейтингозначные модели оказываются в определённом смысле более естественными при рассмотрении форсинга. По этим причинам основными в нашем изложении будут именно гейтингозначные модели.

Общая идея метода состоит в том, чтобы, начав с некоторой фиксированной модели, рассмотреть все её возможные расширения, а точнее, множество всех возможных предложений, которые могут быть истинными в расширенных моделях, а затем, наложив некоторый фильтр, определить, какие из них будут фактически истинны. Множество всех возможных предложений со всеми возможными значениями истинности можно рассматривать как множество «миров», различающихся истинностью тех или иных предложений. Полагая, аналогично предыдущему, в качестве истинностного значения формулы множество миров, в которых она истинна, мы получим так называемый гейтингозначный универсум, в котором формулы — прежде всего атомные формулы равенства и принадлежности — будут иметь значения истинности из гейтинговой алгебры. Мы, однако, можем рассуждать не в терминах возможных миров, а сразу положить некоторую гейтингову алгебру данной и построить соответствующую модель. Действительно, будем использовать гейтингову алгебру для оценки «частичного знания» в методе форсинга. Устройство гейтинговой алгебры позволяет нам естественным образом сформулировать условия на это промежуточное знание. Мы видели (§ 4.2), каким образом мы можем ввести оценку истинности, опираясь на модель Крипке. Однако мы можем действовать точно так же, но вместо возможных миров говорить о более общих условиях, «вынуждающих» истинность тех или иных формул. Тогда вместо «формула истинна в мире w» мы будем говорить «формула истинна при условии π» или «формула вынуждается условием π». При этом условия будут частично упорядочены, мы сможем перейти к гейтинговой алгебре наследственных множеств и определить оценки для формул аналогично (4.6). При построении гейтингозначных моделей сразу полагают данной некоторую гейтинговую алгебру и оценивают формулы в соответствии с ней. Рассмотрим подробнее, как это делается.

Будем, как и ранее, обозначать истинностное значение формулы φ как $[\![\varphi]\!]$. Мы считаем, что формулы теории множеств оценены некоторой гейтинговой алгеброй H, и нам нужно разработать способ построения моделей, которые могли бы их интерпретировать. Поскольку формулы принимают истинностные значения из алгебры Гейтинга, они удовлетворяют таким соотношениям, как

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!], \tag{4.7a}$$

$$[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!], \tag{4.7b}$$

$$[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!],$$

$$[\![\neg\varphi]\!] = \neg[\![\varphi]\!], \tag{4.7c}$$

$$[\![\exists x\varphi(x)]\!] = \sum_{u\in V} [\![\varphi(u)]\!], \tag{4.7d}$$

$$[\![\forall x\varphi(x)]\!] = \prod_{u\in V} [\![\varphi(u)]\!], \tag{4.7e}$$

где $\wedge$, $\vee$, $\neg$ и $\Rightarrow$ в левой части обозначают логические операции над формулами, а в правой — операции гейтинговой алгебры над истинностными значениями. Последнее выражение полезно сравнить с классическим случаем, когда

$\exists x\varphi(x)$ эквивалентно истинности $\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \vee \dots$. Перечисление здесь идёт по всем элементам универсума, который может быть и бесконечным. Поэтому для корректности этого условия нам требуется полнота гейтинговой алгебры, обеспечивающая существование $\sum$ для любого множества.

Перечисленные формулы аналогичны (4.2), (4.4) и (4.6).

Рассмотрим в качестве примера нашу алгебру экспертов. Тогда (4.7a) означает, что оценка истинности конъюнкции двух формул равна множеству экспертов, оценивших как истинные обе формулы, (4.7c) — что оценка истинности отрицания формулы есть множество экспертов, оценивших её как ложную. Выражение (4.7d) означает, что истинность выражения «существует x, такой, что $\varphi(x)$», равна множеству экспертов, оценивших $\varphi(x_1)$ как истинное для какого-то (или даже каких-то) x_1. Если, например, для какого-то индивида все эксперты дадут истинную оценку, то экзистенциальная формула будет максимально истинна. Выражение (4.7b) означает, что оценка истинности дизъюнкции двух формул равна множеству экспертов, оценивших как истинную хотя бы одну из них. В случае алгебры множества экспертов импликация оценивается как объединение множеств экспертов, которые при оценке φ как истинное также оценивают и ψ как истинное. (4.7e) оценивает универсальное утверждение «для любого x истинно $\varphi(x)$» как множество экспертов, признавших $\varphi(u)$ истинным для каждого u. Для того, чтобы оно стало максимально истинным, все эксперты должны посчитать его истинным для всех элементов универсума.

Сформулированные тождества дают нам правила для вычисления истинностных значений сложных формул по их компонентам. Для построения модели мы должны ввести набор объектов, утверждениями о которых будут служить наши формулы. Если речь идёт о моделях теории множеств, как в онтологии Бадью, то атомарными формулами должны служить формулы вида $x = y$ и $x \in y$. Таким образом, нам нужно задать некоторые объекты и определить для них оценку истинности для равенства и принадлежности. Сделаем это следующим образом.

Заметим сначала, что подмножества любого множества можно описывать с помощью характеристической функции. Если A — подмножество X, то она определяется следующим образом для всех элементов X:

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \notin A \\ 1, & \text{если } a \in A. \end{cases}$$

Но множество $\{0, 1\}$, как мы видели, составляет (булеву) алгебру T_0, поэтому характеристическую функцию можно представить как функцию $X \to T_0$ из множества X в двухэлементную булеву алгебру T_0. Тогда классический универсум множеств фон Неймана можно описать как множество таких функций. Действительно, мы можем начать с пустой функции $V_0 = \varnothing$ и строить затем универсум рекурсивно «по этажам» как объединение множеств двузначных функций из множеств предыдущего уровня в алгебру T_0. Элементы уровня V_α строятся как функции с областью определения из предыдущих уровней аналогично традиционному построению универсума множеств посредством операции множества-степени: действительно, каждая функция на уровне α соответствует подмножеству с элементами из предыдущих уровней. Полный универсум V^0 есть объединение всех V_α.

Обобщим теперь это наблюдение, заменив булеву алгебру T_0 произвольной полной гейтинговой алгеброй H, получив то, что называется гейтингозначным (или H-значным) универсумом V^H. Каждый элемент гейтингозначного универсума ранга $\alpha + 1$ состоит из элементов нижнего уровня вместе с оценкой их принадлежности этому элементу, т. е. из пар вида: $\langle x \in V_\alpha, y \in H\rangle$. Иными словами, элементы универсума V^H строятся рекурсивно по рангам и являются функциями с областью определения в предыдущем ранге и множеством значений в гейтинговой алгебре:

$$\begin{aligned}
V_0 &= \varnothing,\\
V_{\alpha+1} &= \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ — функция с областью определения } \mathrm{dom}(f) \subseteq V_\alpha \text{ и} \\ \text{множеством значений из } H \end{array} \right\},\\
V_\alpha &= \bigcup_{\beta \leqslant \alpha} V_\beta, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал},\\
V^H &= \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha.
\end{aligned}$$

Таким образом, V_0 пусто, V_1 состоит из единственной (пустой) функции f_0, V_2 — из функций, переводящих f_0 в различные значения из H, а также самой f_0 и т. д. Универсум, как видим, состоит из (характеристических) функций $X \to H$, которые можно интерпретировать как «частичную принадлежность». Это функции, которые каждому элементу X (самому являющемуся H-множеством) сопоставляет «степень принадлежности» этого элемента X; если в обычном случае элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству, то теперь у нас возможны промежуточные степени принадлежности, измеряемые алгеброй H. Можно также понимать эти значения как истинностные значения утверждений о принадлежности. Они определены для каждого множества лишь на его элементах, но мы можем попытаться их расширить на весь универсум так, что формулы $x \in y$ и $x = y$ для всех x, y из V^H также получат значения истинности из алгебры H, обозначаемые как $[\![x \in y]\!]$ и $[\![x = y]\!]$. Строя из этих атомарных формул более сложные, мы получим оценку истинности для всех формул с переменными из гейтингозначного универсума. Я не буду приводить вывод истинности атомарных предложений с равенством и принадлежностью[1], приведу лишь окончательные формулы. Пусть v, u — элементы универсума V^H,

---

[1] Подробности и обоснования можно найти, например, в *Bell J. L.* Set Theory : Boolean-Valued Models and Independence Proofs. Clarendon Press, 2005. Pp. 20 sqq.

т. е. функции, имеющие области определения $\operatorname{dom} v$, $\operatorname{dom} u$ и значения в алгебре H. Тогда

$$\begin{aligned}
[\![u \in v]\!] &= \sum_{y \in \operatorname{dom} v} (v(y) \wedge [\![u = y]\!]) \\
[\![u = v]\!] &= \prod_{x \in \operatorname{dom} u} \Big(u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!]\Big) \wedge \prod_{y \in \operatorname{dom} v} \Big(v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!]\Big).
\end{aligned}$$

Как и в других случаях, эти выражения не циркулярны, а рекурсивны. Согласно первому выражению u настолько принадлежит v, насколько оно равно каждому из элементов y, входящих в область определения v (т. е. оценённых как принадлежащие v). Второе выражение полезно сравнить с аксиомой экстенсиональности **ZF1**:

$$u = v \text{ тттк } [\forall x(x \in u \Rightarrow x \in v) \wedge \forall y(y \in v \Rightarrow y \in u)].$$

Оценка атомарных формул и предыдущие определения истинности позволяют нам получить истинностные значения всех формул и завершить построение модели. Результатом является универсум частично принадлежащих и частично равных друг другу множеств. Например, для алгебры экспертов эта частичность сводится к частичности экспертной оценки, т. е. частичности знания.

Наши определения позволяют ввести простое отношение форсинга:

$$p \Vdash \varphi \text{ тттк } p \leqslant [\![\varphi]\!]. \tag{4.8}$$

Белл[1] называет его интуиционистским форсингом, чтобы отличить его от форсинга, возникающего в булевозначных моделях и подчиняющегося законам классической логики. Определение форсинга у Коэна и в гейтингозначных моделях совпадает за одним исключением. А именно, он определяет[2]:

$$\begin{aligned}
&p \Vdash \exists x \varphi(x) \text{ тттк } p \Vdash \varphi(a) \text{ для некоторого } a \in V^H, \\
&p \Vdash \forall x \varphi(x) \text{ тттк } p \Vdash \neg\exists\neg\varphi(x),
\end{aligned}$$

тогда как в H-моделях вместо последнего мы имеем:

$$p \Vdash \forall x \varphi(x) \text{ тттк } p \Vdash \varphi(a) \text{ для всех } a \in V^H.$$

Поэтому форсинг Коэна, как и замечает Крипке, подчиняется интуиционистской, а не классической логике.

---

[1] *Bell J. L.* Set Theory. P. 167.

[2] *Коэн П.* Теория множеств и континуум-гипотеза. С. 217.

Ультрафильтр

Каким образом мы переходим от гейтингозначной модели к обычной? Для этого используется понятие ультрафильтра. В нашей модели некоторые формулы имеют неклассические значения истинности; мы переходим к обычной модели, определяя некоторое подмножество гейтинговой алгебры и считая истинными все формулы, оценки истинности которых попадают в это множество. Другими словами, мы выбираем множество, которое содержит $[\![\varphi]\!]$ для всех формул φ, которые мы хотим сделать истинными в новой модели. Как мы увидим, это будет соответствовать выбору генерического множества у Бадью, поэтому обозначим это множество G. Оно должно удовлетворять следующим условиям согласованности и полноты:

UF1 $\top \in G$,
UF2 $\bot \notin G$,
UF3 если $p, q \in G$, то $p \wedge q \in G$,
UF4 если $p \in G$ и $p \leqslant q$, то $q \in G$.

Действительно, формулы, истинные во всех «мирах» или при всех «условиях» должны быть истинными и в расширенной модели $\mathfrak{M}[G]$, а ложные, напротив, не должны. Если формула, истинная в множествах миров p и q, истинна в $\mathfrak{M}[G]$, то в ней должна быть истинна и формула, истинная в множестве $p \wedge q$. Наконец, если формула истинна в $\mathfrak{M}[G]$, то в ней должны быть истинными все формулы, которые из неё выводятся. Условия UF представлены у Бадью под названием условий Rd1 и Rd2 (см. § 4.1). Подмножество гейтинговой алгебры, удовлетворяющее им, называется *фильтром*: мы определённым образом фильтруем наши формулы, проводим границу и считаем все формулы, значения которых её превосходят, истинными, а остальные — ложными. Простого фильтра, однако, недостаточно. Он должен удовлетворять ещё одному условию:

UF5 для всех $p \in H$ либо $p \in G$, либо $\neg p \in G$.

Оно гарантирует, что для всякой формулы либо она сама, либо её отрицание фиксируются как истинные выбором множества G. Фильтр, удовлетворяющий такому условию, называется *ультрафильтром* (или максимальным фильтром). Понятие ультрафильтра важно тем, что при любой интерпретации классов эквивалентности пропозиций как элементов гейтинговой (или булевой) алгебры множество истинных пропозиций будет составлять в точности ультрафильтр. Другими словами, если мы с помощью гейтинговой алгебры приписали каждой формуле вероятность её истинности, то ультрафильтр есть способ сказать, какие утверждения в конце концов истинны. Тем самым, аннулируются промежуточные степени принадлежности, истинности, равенства и т. д., и остаются лишь $\bot$ и $\top$. Делая это для формул типа $[\![x = y]\!]$ и $[\![x \in y]\!]$, мы полностью отождествляем элементы, степень равенства которых принадлежит G, и устанавливаем полную принадлежность элементов, если степень принадлежности принадлежит G[1]. Тем самым мы получаем классические равенство и принадлежность: фильтр сводит исходную алгебру H к алгебре T_0. Более того, как можно показать, существует взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами из произвольной гейтинговой алгебра H в алгебру T_0: для всякого такого гомоморфизма $h : H \to T_0$ множество $h^{-1}(\top)$ является ультрафильтром, и обратно, всякий ультрафильтр F задаёт гомоморфизм, для которого $h(p) = \top$ тттк $p \in F$.

Рассмотрим в качестве примера, как в случае множества экспертов выглядят условия на ультрафильтр. Ему принадлежит всё множество и не принадлежит пустое множество. Если два множества экспертов оценивают некоторую формулу как истинную, то мы, естественно, должны считать, что их общая часть оценивает её так же. Если некоторое множество экспертов принадлежит G, то ему принадлежит и всякое его расширение (полученное добавлением других экспертов). Для нашего множества (но не для булевой алгебры вообще) всё это означает, что имеется минимальный набор экспертов, такой, что все остальные элементы G являются его расширениями. Другими словами, выбирая G, мы выбираем экспертов, мнения которых для нас достаточно, чтобы сделать вывод об истинности формул. Мы им доверяем, и это позволяет нам перейти от многозначной истинности к классической.

Чтобы ещё немного прояснить, что такое фильтр, рассмотрим топологическую иллюстрацию. Мы видели выше (§ 4.2), что топология задаётся системой открытых подмножеств. Пусть для примера это будут подмножества, состоящие из открытых кругов на плоскости — то есть кругов, не включающих их границы. Рассмотрим семейство всех подмножеств, включающих некоторое выделенное множество a — т. е. всех подмножеств, бóльших a. Как нетрудно видеть, это семейство будет удовлетворять условиям **UF**, за исключением **UF5**. Таким образом, на фильтр можно смотреть как на совокупность элементов, «сходящихся» к одному элементу (в нашем случае, a). Условие **UF5** при этом не выполнено, так как для любого p, меньшего a, ни оно, ни его дополнение не входит в фильтр. Выполнение этого условия означает, что фильтр сходится не к подмножеству, а к точке (это утверждение требует корректировки для так называемых бесточечных топологий; см. ниже § 8.5). Таким образом, в топологических терминах условие генеричности означает, что уточнение знания приводит не к подмножеству — т. е. всё ещё неточному знанию, — а к точке, т. е. к полной определённости относительно каждой формулы. В нашей топологической иллюстрации каждая точка соответствует определённому «миру» с классической алгеброй истинности. Каждое наследственное множество является множеством миров с определёнными истинностными значениями для некоторых формул. Фильтр, состоящий из наследственных множеств можно рассматривать как процесс

---

[1] Фактически, эта процедура несколько сложнее, я опускаю детали, которые можно посмотреть, например, в *Bell J. L.* Set Theory. Pp. 88 sqq.

уточнения, становления мира всё более определённым. Условие ультрафильтра означает тогда, что этот процесс сводится к «полной определённости», то есть к ситуации, в которой истинностное значение каждой формулы известно.

Гейтингозначные модели можно рассматривать как модели для синтаксического форсинга, то есть форсинга, который задаётся формально как отношение между условиями и формулами. С синтаксическим форсингом можно работать с самим по себе, без всякой интерпретации, то есть без построения моделей[1]. Тем не менее, гейтингозначная модель предоставляет семантику для синтаксического форсинга. При этом, однако, как мы видели, мы не использовали понятие форсинг, и, фактически, он здесь и не нужен. Соотношение (4.8) устанавливает связь между двумя подходами: с одной стороны, мы можем определить форсинг как отношение между элементами частичного множества и формулами, определить имена и интерпретации и т. д.; но с другой стороны, мы можем строить гейтингозначные модели, приписывать степени истинности формулам и понимать форсинг просто как $p \leqslant [\![\varphi]\!]$. В последнем случае мы можем даже не упоминать термина «форсинг» и не давать ему определения. Вся техника форсинга будет скрыта в технике построения гейтингозначных моделей.

Это, в частности, означает, что не нужна оказывается интерпретация форсинга, предлагаемая Бадью. Тем не менее, большинство свойств субъекта Бадью мы всё же можем описать. Этот субъект обитает в ситуации $\mathfrak{M}$ и пользуется именами, имеющими значения в ситуации $\mathfrak{M}[G]$. Он не знает этих значений, но принимает решения относительно расширенной ситуации. Формально, это решения о принадлежности некоторой оценки p генерическому множеству G, однако содержательно они сводятся к двум видам. Во-первых, субъект утверждает истинность некоторых формул: $p \in G$ означает, что формулы с оценкой p в гейтингозначной модели будут истинными в расширенной модели. Во-вторых, он утверждает принадлежность тех или иных множеств: $p \in G$ означает, что в расширенной модели множеству x принадлежат те y, для которых $x(y) = p$. Мы получаем систему, в которой истинность формул связана с функцией принадлежности и обе могут регулироваться путём некоторых ограничений. После этого мы можем накладывать эти ограничения, полагая те или иные утверждения истинными или ту или иную принадлежность множеств установленной.

Булевозначные модели

Мы использовали для построения моделей гейтинговы алгебры, однако в математике более привычным является использование булевых алгебр и построение булевозначных моделей. С точки зрения форсинга, однако, этот метод оказывается более сложным и ограниченным. Мы не можем просто перейти

---

[1] См. обзор подходов к определению форсинга в *Кunen K.* Set Theory. Pp. 232 sqq.

от частично упорядоченного множества к булевой алгебре, как мы перешли в § 4.2 к гейтинговой. Мы начали там с частично упорядоченного множества миров, затем перешли к наследственным множествам, которые, как оказалось, составляют алгебру Гейтинга. Эта процедура имеет общий характер. Действительно (для дальнейшего будет удобнее принять порядок, обратный к тому, о котором идёт речь у Бадью и Крипке), будем считать, что $p \leqslant q$, если p расширяет q или, в терминах Бадью, p доминирует q. Пусть теперь мы имеем частично упорядоченное множество $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$. Рассмотрим для каждого $p \in \mathbb{P}$ подмножества $\mathcal{O}_p = \{ q \in \mathbb{P} \mid q \leqslant p \}$. Как можно показать, они составляют базу топологии, которой соответствует гейтингова алгебра открытых подмножеств (последние являются замкнутыми снизу подмножествами $\mathbb{P}$). При этом отображение $p \mapsto \mathcal{O}_p$ можно рассматривать как вложение $\mathbb{P}$ в эту алгебру. Другими словами, последнюю можно рассматривать как расширение исходного частично упорядоченного множества. Таким образом, всегда существует естественный переход от частично упорядоченного множества условий (или возможных миров) к гейтинговой алгебре. Более того, как нетрудно видеть, эта алгебра будет полной.

Напротив, для перехода к булевой алгебре недостаточно взять топологию наследственных подмножеств, поскольку она, вообще говоря, не будет булевой. Нам потребуется обращение к так называемым регулярным открытым множествам, которые для любого топологического пространства составляют полную булеву алгебру. Мы можем выделить такую алгебру в множестве условий форсинга, но для этого оно само должно обладать дополнительными свойствами (соответствующими свойству регулярности). В частности, мы можем говорить о расширении $\mathbb{P}$ до булевой алгебры, но только при определённых условиях на $\mathbb{P}$[1]. Таким образом, работа с гейтинговыми алгебрами не только упрощает технику, но и, что для нас важнее, соответствует подходу Коэна и Бадью. А кроме того, они играют ключевую роль в феноменологии Бадью. Проведённый выше обзор роли гейтинговых алгебр в первоначальном подходе Бадью по необходимости схематичен и груб. Она станет более ясной при рассмотрении его феноменологии. Но прежде нам следует рассмотреть понятие события, как оно представлено в первом томе «Бытия и события».

Дополнительная литература

Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / под ред. Д. А. Бочвара ; пер. с англ. В. Н. Гришина, В. В. Шокурова. М. : Мир, 1983. 488 с.

Йех Т. Теория множеств и метод форсинга / под ред. В. Н. Гришина ; пер. с англ. В. И. Фуксона. М. : Мир, 1973.

---

[1] См, подробности, например, в: *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М. : Мир, 1973. С. 56.

Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза / пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина. М. : Мир, 1969.

Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики / пер. с англ. В. А. Янкова. М. : Наука, 1972. 591 с. (Математическая логика и основания математики).

Bell J. L. Set Theory : Boolean-Valued Models and Independence Proofs. 3rd ed. Clarendon Press, 2005. 216 pp. (Oxford Logic Guides ; 47).

Fitting M. Intuitionistic logic, model theory and forcing. Amsterdam, London : North-Holland Pub. Co., 1969. 191 pp. (Studies in logic and the foundations of mathematics).

Kripke S. Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I // Formal Systems and Recursive Functions (Eighth Logic Colloquium, Oxford, July 1963) / ed. by J. N. Crossley, M. A. E. Dummett. Amsterdam : North Holland Publishing Co., 1965. Pp. 92–130.

Kunen K. Set Theory : An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam, New York : North-Holland Pub. Co, 1980. xvi, 313 p. (Studies in logic and the foundations of mathematics: v. 102).

5

Теория события

После своего появления теория события у Бадью претерпела существенную трансформацию. Почти двадцать лет спустя он пишет об этом в предисловии к одной из глав «Логик миров»:

> в то время, не имея в своём распоряжении никакой теории бытия-здесь [т. е. теории явления — ОД], я думал, что возможна чисто онтологическая характеристика события. [...] Мы увидим, что теперь я способен полностью отождествить «место» и «множество события» — не впадая тем самым в банальные апории диалектики структуры и истории — и минимизировать обращение к таинственному именованию. Более того, вместо жёсткой оппозиции ситуации и события у меня теперь имеются нюансы трансформации, начиная с модификации подвижного—неподвижного, через нейтральность факта, вплоть до события в собственном смысле.[2]

Бадью называет событие транс-сущим[3], поскольку, согласно ему, оно выходит за пределы онтологии. Причина этого состоит в том, что оно является множеством, принадлежащим самому себе, и поэтому не может быть описано теорией Цермело—Френкеля. Для своего появления оно требует специальной субъективной процедуры. Для нас, однако, важно заметить, что теория события и теория субъекта мало зависит друг от друга. По крайней мере, последняя может быть вполне развита без упоминания первой, что мы и делали в предыдущей главе. Все существенные свойства субъекта Бадью при этом сохраняются. Одна из основных задач данной главы состоит в демонстрации этого обстоятельства. Другая важная задача — прояснение понятия неконсистентности. Мы

---

[2] *Badiou A.* Logiques des mondes. P. 381.

[3] *Badiou A.* The Event as Trans-Being // Theoretical Writings. London, New York : Continuum, 2006. P. 100.

увидим, что субъект и событие требуют разных видов неконсистентности, мало связанных друг с другом.

§ 5.1. Понятие события

Начнём с понятия события, как оно представлено в первом томе «Бытия и события». Событие выходит за пределы онтологии, оно — «то, что не есть сущее, поскольку оно сущее». Событие всегда локально, т. е. случается в некотором месте. *Местом события* (site événementiel) называется множество, принадлежащее ситуации, элементы которого сами не принадлежат ситуации (195). Место события, таким образом, является элементом ситуации, но не его подмножеством. Оно находится «на границе пустоты» (au bord du vide) поскольку, его элементы скрыты от субъекта-обитателя ситуации. В этом смысле, места событий лежат в основании, учреждают или фундируют (fondent) ситуацию. При этом места определяются относительно ситуации, и место события одной ситуации может не быть таковым в другой, если его элементы ей принадлежат. Кроме того, ситуация не обязательно обладает хотя бы одним непустым местом события (аксиома фундирования утверждает, что всякое множество фундировано, т. е. в любой ситуации имеется место события, однако в некоторых из них эту роль выполняет пустое множество), и те, что ими обладают, Бадью называет *историческими*, а ситуации, в которых фундирующим является только пустое множество — *природными*. Таким образом, событие возможно лишь в исторических, а не природных ситуациях. Событие места X определяется как множество, состоящее из элементов X и из самого себя[1] (200): $e_X = \{ x \in X, e_X \} = \{ e_X \} \cup X$. Если событие принадлежит ситуации, то оно не является её подмножеством, поскольку элементы места ей не принадлежат, однако оно само не находится «на границе пустоты», поскольку есть один элемент, который ситуации принадлежит, а именно, оно само. Оно, как формулирует Бадью, «отделено от пустоты самим собой»: «Утверждать, что событие принадлежит ситуации, равнозначно тому, что сказать, что оно концептуально отличает себя от своего места путём помещения самого себя между пустотой и собой» (203). По этой причине Бадью называет его ультра-одно: оно считает себя за единицу одновременно как представленное и как представленное в представлении. Если же событие не принадлежит ситуации (не представлено), то вообще ничего не имеет места. В этом случае имя события является пустым и ничего не обозначает. Событие представляет не только само себя, но и элементы своего места, они присутствуют в ситуации, лишь если присутствует оно, если же событие не принадлежит ситуации, то ей не принадлежит и никакой из его элементов. В результате:

---

[1] К слову сказать, уже это делает событие проблематичным с точки зрения теории субъекта, поскольку последняя требует транзитивных моделей, в которых так определённое место события невозможно. Это один из симптомов фактической независимости теории события от теории субъекта в «Бытии и событии».

> если событие не принадлежит ситуации, то ничто не имеет места, поскольку, с другой стороны, элементы места события не представлены; если оно ей принадлежит, оно располагается между пустотой и самим собой и оказывается определено как ультра-одно. (223)

Как множество, принадлежащее самому себе, событие не удовлетворяет аксиомам ZF[1]. Оно остаётся неопределённым в смысле аксиомы экстенсиональности: если множество определяется своими элементами, то событие определено лишь при условии того, что оно определено. В случае события мы сталкиваемся с неразрешимостью: чтобы событие принадлежало ситуации, оно должно предварительно принадлежать ситуации. В результате, принадлежность события ситуации является предметом пари, которое никогда не сможет подтвердиться. Это означает, что принадлежность события ситуации зависит от решения субъекта об этой принадлежности, которое Бадью называет *интервенцией*, — принадлежность события может быть удостоверена лишь практикой, т. е. актом интервенции (199). Интервенция состоит в признании некоторого множества событием, что означает, во-первых, признание неразрешимости (того, что событие не может принадлежать ситуации без решения) и, во-вторых, принятие решения об этой принадлежности.

Важнейшим в интервенции является то, что в ней вводится новое имя для множества, каким является событие:

> Акт именования события есть то, что его конституирует, не как *реальное* — поскольку мы всегда полагаем, что это множество уже случилось (advenu), — но как пригодное для решения относительно его принадлежности ситуации. [Событие «имеется (il y a)» и] сущность интервенции состоит в том, чтобы дать имя этому «имеется» и развернуть следствия этого именования в пространстве ситуации, которой это место принадлежит. (225)

Согласно Бадью, интервенция именует то, что не представлено в ситуации, а именно, элемент места события. Она состоит в том, чтобы «дать имя элементу, не представленному на месте, для того, чтобы назвать событие, для которого это место является местом события» (226). В этом смысле, имя события «извлечено из пустоты». Оно, однако, не совпадает ни с одним из элементов места, поскольку тогда оно было бы излишним. Интервенция вводит имя для неопределённого элемента, элемента «вообще». Имя это некоторый дополнительный,

---

[1] Что, в частности, заставило Рикардо и Давида Ниренбергов категорически утверждать о событии ни больше, ни меньше как: «Множества такого сорта никогда не появляются в математике — не в последнюю очередь потому, что приводят к нематематическому mise-en-abîme: если мы заменим e_X внутри скобок на его выражение, данное скобками, то сможем продолжать так до бесконечности, — что вряд ли может быть названо „матемой“» *Nirenberg R. L., Nirenberg D.* Badiou's Number : A Critique of Mathematics as Ontology // Critical Inquiry. 2011. Vol. 37, Summer, no. 4. JSTOR: `10.1086/660983`. Pp. 598–9. Однако в лице ZFA (см. § 5.2 ниже) мы имеем математическую теорию, в которой такие множества появляются как вполне рядовые объекты.

сверхштатный (surnuméraire) элемент, в этом смысле, приходящий в ситуацию извне. Однако именно это именование позволяет субъекту говорить о ситуации в целом изнутри самой ситуации (один из показательных примеров Бадью — циркуляция имени революции внутри самой Французской революции (201)). Событие тем самым оказывается термином внутри самого события, что является для Бадью одним из мотивов для того, чтобы эксплицировать его как рефлексивное множество.

Будучи вне онтологии, вне сущего, событие опознаётся только по своим результатам, поскольку всё, что в конце концов остаётся представленным, это имя события e_X, введённое интервенцией. В результате, событие остаётся неопределённым для всех, кроме субъектов, принявших решение о его принадлежности ситуации. Никто, кроме них, не опознаёт в следствиях результаты случившегося события:

> Настоящая сложность заключается в том, что следствия события, будучи подчинены структуре, не опознаются как таковые. [...] событие возможно только, если следствия события удерживаются посредством специальных процедур как событийные, как относящиеся к событию. (233)

Таким образом, событие связывается с онтологией только при посредстве субъективной процедуры, которую Бадью называет верностью событию. Чтобы лучше понять, какую роль в этих построениях играет рефлексивность, рассмотрим один из примеров Бадью.

Христианство является для Бадью в определённом смысле каноническим примером: «в христианстве, и только в нём одном, утверждается, что сущность истины предполагает событийное ультра-одно и что отношение к ней подчиняется не созерцанию — или неизменяемому знанию — но интервенции» (235). Поэтому «все параметры учения о событии уже присутствуют в христианстве» (235). Важнейшими фигурами, к которым Бадью в этой связи обращается являются Паскаль (235–246) и апостол Павел[1]. Для Паскаля Бог это предмет не созерцания, но веры, требующей пари — ставки на его существование. Апостол Павел является для Бадью примером активиста, основывающего некоторую субъективную процедуру не на личном опыте встречи или на божественных заповедях, а на событии смерти и воскрешения Христа, которое не может быть пережито. Христианский субъект, таким образом, существует благодаря событию. Однако истина при этом полностью субъективна. Согласно Павлу, утверждая истину события, мы становимся детьми Бога и становимся ими только утверждая её. Ситуация здесь аналогична парадоксу, описываемому Руссо, который говорит об общественном договоре: только народ может

---

[1] *Бадью А.* Апостол Павел. Обоснование универсализма. М.: Московский философский фонд; СПб.: Университетская книга, 1999.

заключить договор, однако договор не предполагает и не именует народ, существующий до его заключения, а конституирует сам этот народ актом своего заключения. Народ как бы предшествует сам себе, конституирует себя, называя себя, и остаётся народом, лишь продолжая быть верным этому событию. Аналогично, кантовский моральный субъект существует как моральный, если и в тот момент, когда он принял решение быть таковым. Более того, он не может быть моральным субъектом без этого решения — Кант требует не просто следования закону, а следования ему из чувства уважения. В этом случае поступки, которые иначе могли бы быть случайными или вызванными естественными или квазиестественными причинами (например, усвоенными в детстве привычками), получают особую значимость и помещаются в контекст морального поведения, становятся моральными. Таким образом, говоря о циркулярности, мы прежде всего должны говорить о циркулярности решения, причём решение становится циркулярным, если оно относится к способу существования субъекта, его принимающего, — другими словами, если решение входит в структуру субъекта, относится к способу его бытия: быть христианином означает принимать решение о бытии христианином, быть народом означает принимать решение о бытии народом. Как кажется, мы имеем здесь ситуацию, в которой решение о существовании само приводит к существованию. Речь идёт о том, что нечто может существовать и существует лишь в рамках и посредством решения. Не случайно в качестве примеров Бадью часто приводит решения некоторой группы людей составлять общность и действовать сообща. Но действительно ли здесь идёт речь о циркулярности? Существование такой общности зависит от решений этих людей и должно подтверждаться каждый раз при каждом поступке. Что именно при этом подтверждается? С одной стороны, согласно Бадью, подтверждается присутствие (вне ситуации) события как множества, которое не может быть представлено в ситуации, поскольку оно неконсистентно, и поэтому выход события, как рефлексивного множества, за пределы онтологии является ключевым. Но, с другой стороны, в «Бытии и событии» есть иной способ описания этого подтверждения, которое, как кажется, не требует рефлексивности. Но прежде чем, его рассматривать, нам нужно разобраться с понятием рефлексивности или нефундированности.

§ 5.2. Нефундированные множества

Современная математика не относится к циркулярности с таким подозрением, с каким относилась большую часть XX века. В ней существуют средства работы с нефундированными множествами как с вполне легитимными объектами. Этот аппарат развивается с 80-х годов прошлого века и активно используется не только в математике, но и в философии, физике, компьютерных и когнитивных науках и т. д. Классическая книга по теории нефундированных множеств или гипермножеств[1] вышла в том же году, что и «Бытие и событие», однако Бадью не был незнаком с этим подходом. В «Бытии и событии» он ссылается на работы Барвайса и Перри по нефундированным множествам как на «позитивистскую версию» своей собственной теории (523). Между тем, в такой теории оказываются легитимными не только принадлежащее себе событие, но и неконсистентное множество, по крайней мере в том смысле, на который указывает Бадью, обсуждая «многое без единого» из платоновского «Парменида». Более того, в этой теории оказывается возможным определить форсинг, что делает её ещё более пригодной для «Бытия и события». В данном разделе исследуются некоторые из возможных результатов расширения подхода Бадью в этом направлении. В отношении к его философии в целом оно имеет скорее исторический интерес, поскольку последующий сдвиг Бадью от теории множеств к теории категорий привёл к трансформации его первоначального подхода. Кроме того, этот сдвиг в большой степени является развитием теории субъекта, которая в «Бытии и событии» почти не зависит от тех аспектов онтологии, которые касаются нефундированности. Тем не менее, некоторые стороны первоначального подхода представляют самостоятельный интерес.

Теория, которую я, вслед за Барвайсом и Моссом, буду называть ZFA, представляет собой ZFC, в которой аксиома фундирования заменена так называемой аксиомой антифундирования (AFA — Anti-Foundation Axiom). Эта теория является результатом расширения понятия множества. Существуют разные понимания этого расширения и, соответственно, разные формулировки AFA (более того, существуют разные варианты этой аксиомы[2]). Я приведу две из них, неформально описывая понятия, которые имеют вполне формальные и точные представления. В первой формулировке AFA множества изображаются направленными графами, со стрелками, соответствующими отношению принадлежности. Тогда аксиома антифундирования утверждает, что для всякого такого графа каждой его вершине может быть сопоставлено множество так, что стрелки будут изображать их принадлежность друг другу. При этом очевидно, что, если граф содержит циклы или бесконечные ветви, то ему не может соответствовать никакое фундированное множество, что означает, что аксиома допускает гораздо большее разнообразие множеств, чем ZFC. Другая формулировка AFA утверждает, что имеет решение всякая система уравнений вида $x_i = e(x_i)$, где x_i — определяемые переменные, а $e(x_i)$ — множества образованные с помощью определённых операций из x_i и набора констант, которые для

---

[1] *Aczel P.* Non-well-founded sets.

[2] Они различаются способом отождествления множеств, который в ZFA представляет особую проблему. Существует несколько подходов к определению равенства двух множеств и, соответственно, несколько вариантов аксиомы антифундирования, которым соответствуют различные универсумы (все, однако, включающие в себя универсум фон Неймана). Для наших целей эти нюансы не имеют значения.

данной системы называются атомами (данной системы). Другими словами, всегда существуют множества, после подстановки которых в эти уравнения вместо x_i мы получим правильные равенства. Список упомянутых операций ограничен, в него, например, не входит образование степени, так что уравнение вида $x = \mathcal{P}(x)$ не имеет решения. Тем не менее, не все из таких систем могут быть решены, если мы ограничимся фундированными множествами. Например, система из одного уравнения $x = \{ x \}$ не имеет фундированного решения, но имеет его в ZFA в виде так называемого атома Куайна. Как оказывается, теория ZFA является расширением ZFC, универсум последней включён в её универсум. В ZFA выполнены все аксиомы ZFC, за исключением аксиомы фундирования. Можно также доказать, что ZFA непротиворечива, если ZFC непротиворечива; в этом смысле, в качестве средства формализации она, по крайней мере, столь же пригодна. Более того, в ZFA возможно определить форсинг совершенно аналогичным образом, хотя это и требует дополнительных ухищрений, связанных с невозможностью рекурсивных определений[1].

По сравнению с ZFC в ZFA разрешены множества двух видов: 1) с самопринадлежностью или с «циклом» принадлежности, 2) с бесконечными цепями принадлежности вида $\ldots \in a_2 \in a_1 \in a_0$. Это как раз те типы множеств, которые возникают у Бадью при построении онтологии и теории события, поэтому можно надеяться, что в каких-то отношениях она окажется более подходящей для их экспликации. Онтология Бадью может быть построена не на ZFC, а на ZFA. В этом случае мы не сможем рассматривать событие как выходящее за пределы онтологии. Как его рефлексивность, так и возможная бесконечная делимость могут быть корректно описаны онтологически. Между тем, основная роль события в построениях Бадью состоит как раз в установлении связи с тем, что не есть сущее-поскольку-оно-сущее. Согласно Бадью, событие необходимо для определения субъекта. Но в чём состоит эта необходимость?

Как мы видели выше, в основании теории субъекта лежит понятие генерического множества. В свою очередь, генерическое множество строится на основе «атомарных» утверждений о позитивной или негативной связи тех или иных множеств с событием. Бадью не конкретизирует эту связь, но каждый элемент генерического множества оказывается (конечной) совокупностью таких утверждений. Мы также видели, что эту структуру можно понимать как частичный предикат, т. е. как часть предиката E = «быть связанным с событием», истинную на одной части объектов ситуации, ложную на другой и не определённую

---

[1] *Esser O.* Forcing with the Anti-Foundation axiom // Mathematical Logic Quarterly. 2012. Feb. Vol. 58, no. 1/2. Pp. 55–62. DOI: 10.1002/malq.201020079 ; *Tzouvaras A.* Forcing and antifoundation // Archive for Mathematical Logic. 2005. July. Vol. 44, no. 5. Pp. 645–661. DOI: 10.1007/s00153-004-0268-5 ; *Sato K.* Forcing under Anti-Foundation Axiom : An expression of the stalks // Mathematical Logic Quarterly. 2006. June. Vol. 52, no. 3. Pp. 295–314. DOI: 10.1002/malq.200410060.

на остальных[1]. В конце субъективной процедуры, когда становится определённым генерическое множество, предикат E также становится определённым на всех элементах ситуации. Таким образом, генерическое множество можно рассматривать как множество различных (конечных) аппроксимаций (бесконечного) предиката E, а субъективную процедуру — как процедуру построения этого предиката. Субъективная процедура состоит, фактически, в выстраивании предиката «быть связанным с событием», и каждый шаг субъекта состоит в расширении аппроксимации этого предиката, в его уточнении. Предикат, в свою очередь, описывает разделение ситуации на две части: в случае христианства — на христианскую и нехристианскую, в случае общественного договора — на национальную и ненациональную и т. д. Тем самым, можно сказать, что субъект выделяет некоторое свойство («христианское», «национальное»), и событие связано тогда с «появлением» этого свойства в ситуации. Мы не можем сказать, появляется ли это свойство в какой-то момент или оно было всегда, а субъект лишь обнаруживает возможность такого деления, но для нас важно, что такое понимание субъективной процедуры делает проблематичной циркулярность события.

Действительно, эта циркулярность перестаёт, как кажется, быть нам нужной, поскольку мы можем описать основанные на ней свойства события в терминах генерического множества. Тогда в решении речь пойдёт о существовании генерического множества. Тогда интервенция вводит в игру имя этого множества, которое не является элементом ситуации, т. е. не представлено (представлены, т. е. принадлежат ситуации, лишь его аппроксимации). При этом интервенцию нельзя мыслить как одномоментную — решение о существовании принимается всякий раз, когда субъект судит о принадлежности или непринадлежности ему того или иного множества. Само же решение есть решение о возможности — о том, что определённый предикат может быть построен. Субъект воспринимает некоторое (конечное) множество не как случайное образование, а как часть — т. е. аппроксимацию — бесконечного генерического множества. Субъект уверен, что это множество может быть расширено, приведя в результате к новому предикату, т. е. к новому свойству. Верность событию есть ориентация субъекта на эту бесконечную цель, которая не может быть схвачена имеющимся у него языком. В конечном подмножестве субъект предвосхищает новое свойство, которым элементы этого подмножества обладают, и при этом не имеет возможности выразить это свойство явно. Некоторые следствия являются — и могут являться лишь — следствиями определённого сущего, для того, чтобы они имели место, это сущее (например, христианская община) должно иметь место. Решение есть решение об этом существовании, когда христианин совершает некоторый поступок именно как христианин, а не, например, как

---

[1] См. с. 109 выше.

моральный или сопереживающий человек. Он принимает решение о существовании определённой общности, без которой этот поступок невозможен как христианский. Поступки представлены как следствия существования христианства, дискурс о них содержит термин «христианство» или «христианский» как означающее. Более важно, однако, то, что субъект, совершающий поступок тем самым утверждает своё существование как принадлежащего к христианству и, следовательно, существование христианства как сообщества. Таким образом, субъект утверждает себя как элемент множества и посредством этого утверждает существование этого множества. Решение состоит в том, чтобы признать нечто представленное как аппроксимацию чего-то непредставленного.

Мы видели при анализе понятий единого и многого, что выход за пределы онтологии ZF (неконсистентность) может пониматься в нескольких смыслах, из которых сейчас нам важны два. Во-первых, Бадью указывает на самореферентность и нарушение аксиомы фундирования. Но во-вторых, для него важна неконсистентность другого рода, а именно, «противоречивость» парадоксальных множеств, подобных множеству всех множеств и других классов. Первое, как мы видели, не является фатальным для онтологии, и небольшая коррекция позволяет сделать самореферентность рядовой онтологической категорией. Поэтому для Бадью не менее важной является неконсистентность, связанная с характером множественности как класса, открываемого в событии. То, что нефундированные множества являются обычными объектами этой теории, не предотвращает возникновение в ней парадоксов, а также классов[1]. Хотя аксиома фундирования, запрещающая самопринадлежность, играет важнейшую роль в блокировании теоретико-множественных парадоксов, отказ от неё сам по себе ещё не ведёт к противоречиям. Как замечают Барвайс и Мосс, для блокирования парадоксов важно не запретить самопринадлежность, а различить классы и множества[2]. Другими словами — различать классы, имеющие синглетон и не имеющие синглетон, т. е. части, которые могут и не могут быть посчитанными за одно.

Это появление класса в качестве элемента очень важно для Бадью. В одном из примеров события (202) речь идёт о крестьянах во времена Великого страха, которые появляются в ситуации в том смысле, что начинают влиять на неё. Они, конечно, существовали во Франции и до этого, но лишь начав захватывать поместья и сжигать феодальные документы о собственности, стали частью ситуации и, в частности, способствовали падению феодальных порядков как таковых. Присоединение к ситуации состоит не в «рождении из ничего», а в

---

[1] См. об этом подробнее: *Barwise J., Moss L. S.* Vicious Circles : On the mathematics of non-wellfounded phenomena. Stanford, Calif : CSLI Publications, 1996. 400 pp. ; *Barwise J., Etchemendy J.* The Liar : An Essay on Truth and Circularity. Oxford University Press, USA, 1989. 194 pp.

[2] *Barwise J., Moss L. S.* Vicious Circles : On the mathematics of non-wellfounded phenomena. Stanford, Calif : CSLI Publications, 1996. P. 45.

том, что новые элементы начинают использоваться в построении других множеств этой ситуации. Однако для самого Бадью подобные примеры указывают на одну из главных интуиций «Бытия и события»: новое появляется в ситуации благодаря тому, что единица в ней является на самом деле множеством, даже если её элементы сами не принадлежат ситуации. Событие состоит тогда в присоединении «неявно» присутствующих элементов в качестве «явных». Подобный переход от «неявного» к «явному» мы также видим в теории субъекта, где, однако, его механизм совершенно отличается. «Неявное присутствие» генерического множества состоит в том, что оно является подмножеством, не являясь одновременно элементом. Мы имеем здесь две различные, хотя и параллельные, экспликации события как появления нового. Они соответствуют двум пониманиям неконсистентности: одному, связанному с нефундированностью, а другому — с возможностью собственных классов. По мысли Бадью, имеется связь между ними, которую устанавливает субъект, однако она остаётся плохо определённой, что приводит к тому, что теория субъекта фактически оказывается не зависящей от теории события и основанной на ней идее транссущего или «того, что не сводится к сущему, поскольку оно сущее». В то же время, дальнейшее развитие подхода Бадью в «Логиках миров» связано с продолжением линии именно теории субъекта. В этом смысле, теория события и интервенции является отдельной теорией, вообще говоря, мало связанной с поздней философией Бадью (говоря осторожнее, роль онтологии «Бытия и события» в феноменологии «Логик миров» требует отдельного анализа).

Важно заметить, что понимание события как проявления класса в качестве элемента не требует различия фундированных и нефундированных множеств, а также скрытых «под» местом события элементов, не представленных в ситуации. Непредставленность (соответственно, неконсистентность) имеет здесь иной характер: а именно, генерическое множество не является элементом (будучи при этом подмножеством; все его элементы являются также элементами ситуации). Его нахождение вне ситуации не связано с его рефлексивностью. Таким образом, многие характеристики события могут быть сохранены без обращения к идее нефундированности. Более того, анализ роли события в «Бытии и событии» показывает, что эта роль скорее вспомогательна. Действительным фундаментом теории субъекта является понятие генерического множества и генерической процедуры (что, впрочем, подтверждает и Бадью). Связь генерического множества с событием остаётся неясной. Единственная его функция в теории Бадью сводится к фиксации генерического множества, в то время как способ этой фиксации остаётся непрояснённым.

Таким образом, с одной стороны, нефундированности недостаточно для того, чтобы говорить о выходе за пределы онтологии, коль скоро возможна теория нефундированных множеств. С другой стороны, необходимые для теории субъекта свойства могут быть получены из свойств генерического множества, без обращения к нефундированности. Возникает вопрос, требуется ли нам всё ещё теория события в том виде, который мы находим у Бадью? Быть может, мы можем просто положить, что событие представляет собой явление бесконечной истины в её аппроксимации, и избавиться от события вместе с предположением о его нефундированности? Имеется, однако, одно обстоятельство, которое нам следует учесть.

§ 5.3. Событие как основание

Проблема отличия интервенции, основанной на событии, от пустого именования, не имеющего оснований, очень важна для Бадью. С точки зрения развиваемой Бадью теории субъекта событие служит основанием непроизвольности бесконечного субъективного процесса: верность субъекта событию состоит в уверенности в обоснованности выделения некоторого бесконечного множества. Интервенцию можно рассматривать как утверждение об этой обоснованности, как указание на некоторую новую возможность. Решение принимается не на пустом месте, а опираясь на то, что это нечто существует, иначе мы попадаем в «спекулятивный гошизм», полагающий, что возможно «порвать с ситуацией, опираясь исключительно на собственную отрицающую волю» (232). Таким образом, решение опирается на событие, которое в своём существовании опирается на решение. Событие как факт требует интервенции как интерпретации факта и не существует без него. Однако для Бадью не существует «героя события»: «Интервенция порождает дисциплину, она не несёт никакой оригинальности. Нет никакого героя события» (229). Событие, таким образом, никогда не порождается субъектом, никогда нельзя сказать, что оно было инициировано субъектом. Субъект всегда опирается на уже случившееся: интервенция предполагает событие прежде себя. Именно в этом смысле теория субъекта требует некоторой выходящей за пределы онтологии инстанции.

Но почему эту инстанцию следует мыслить как принадлежащее себе множество? Даже если мы решим построить онтологию на основе ZFA вместо ZFC, циркулярность всё равно не кажется необходимой. Действительно, принадлежность события самому себе призвана эксплицировать его свойство быть условием самого себя: Французская революция происходит только если она уже некоторым образом произошла. Рассмотрим в качестве примера фрейдовское понятие последействия (Nachträglichkeit), обозначающее переработку раннего психического опыта на поздних стадиях развития. Фрейд использует его при объяснении травмы как причины невроза. Некоторая сцена, которая в своё время не была травматической, обретает значение травмы и причины невроза в более позднем возрасте. Существенно, однако, что раннее событие не просто переинтерпретируется, но выступает как причина невроза, тем самым нарушая простую линейную причинность. Для описания этой структуры Фрейд позднее вводит понятие первофантазма, существующего прежде всякого травматического опыта. Воспоминание о некоторой сцене может существовать в психике, не будучи травмой, но в какой-то момент, например, благодаря новому опыту, «привязывается» к первофантазму и приобретает значение травмы. Первофантазм должен по форме соответствовать событию (например, как сценарий он должен быть структурирован сходным образом — с точностью, конечно, до искажений бессознательного), но этого сходства недостаточно для того, чтобы событие произошло. Это обстоятельство описывается у Фрейда понятиями фиксации и нагрузки: нечто произошло раньше, но оно становится событием лишь в момент фиксации, когда нагружается энергией либидо. Сама по себе эта нагрузка, по-видимому, не может быть формализована (хотя Бадью предлагает некоторую формализацию), но мы можем попытаться формализовать её результат. Парадокс последействия состоит в том, что, с одной стороны, невротическое искажение имеет причиной событие прошлого, но, с другой стороны, это событие становится травматическим лишь после того, как появляется невроз, т. е. после того, как травма проявляется в настоящем. Другими словами, нагрузка передаётся, с одной стороны, от первосцены к травматическому событию в настоящем, а с другой стороны, от этого события к первосцене. Формализуем событие как упорядоченную пару $\langle a, x\rangle$, где a — сцена, а x — событие, от которого передаётся нагрузка. Тогда для событий прошлого и настоящего имеем, соответственно, два уравнения: $x = \langle b, y\rangle$ и $y = \langle a, x\rangle$, где a, b — сцена в настоящем и прошлом, соответственно. Получившаяся система двух уравнений имеет решение в ZFA, а именно, множества $s_1 = \langle b, \langle a, \langle b, ...\rangle\rangle\rangle$ и $s_2 = \langle a, \langle b, \langle a, ...\rangle\rangle\rangle$. Их можно представить как последовательности передачи нагрузки: $s_1 = (b, a, b, ...)$ и $s_2 = (a, b, a, ...)$. Таким образом, нагрузка передаётся из бесконечной точки попеременно от a к b и от b к a, причём на последнем этапе события получают нагрузку друг от друга, поскольку, как видно, $s_1 = \langle b, s_2\rangle$, а $s_2 = \langle a, s_1\rangle$. Вместо циркулярного события Бадью мы имеем два зависимых друг от друга события. Таким образом, экспликация события как принадлежащего самому себе множества не является единственно возможной, и оно может эксплицироваться поразному в случае разных событий (замечу, что определение Бадью также представляет собой уравнение $x = \{\, a, b, ..., x \,\}$, где $a, b, ...$ — элементы места события; это уравнение имеет решение в ZFA).

Кроме того, «разговор о ситуации в целом изнутри самой ситуации» вовсе не обязательно требует обращения к рефлексивным множествам. Речь может идти о событии как термине, обозначающем множество, присутствующее в ситуации как подмножество, но не как элемент, как, например, присутствует множество всех множеств или генерическое множество. Такое множество также не представлено — и не может быть представлено — в ситуации, но по иным причинам. Именно это демонстрирует переход к ZFA: рефлексивные множества могут быть представлены, однако это не приводит к представлению неконсистентные множества, такие как множество всех множеств или множество Рассела. Мы видели, что «принятие-за-единое» само по себе не достаточно для превращения класса в синглетон, требуется ещё использование этого класса для построения элементов другого класса. Однако эта недостаточность не препятствует циркуляции имени такого непредставленного класса в качестве объекта аппроксимации, как это и происходит, в конце концов, с генерическим множеством. Важно, что для этого не требуется предположений о нефундированности. Но, может быть, ещё важнее то, что, вне зависимости от наличия или отсутствия теории рефлексивного события, теория субъекта остаётся практически неизменной.

Дополнительная литература

Бадью А. Апостол Павел. Обоснование универсализма / пер. с фр. О. Головой. М.: Московский философский фонд; СПб.: Университетская книга, 1999.

Aczel P. Non-well-founded sets / with a forew. by J. Barwise. Stanford, CA : Stanford University, Center for the Study of Language, Information, 1988. xx, 137. (CSLI Lecture Notes ; 14).

Barwise J., Etchemendy J. The Liar : An Essay on Truth and Circularity. Oxford University Press, USA, 1989. 194 pp.

Barwise J., Moss L. S. Vicious Circles : On the mathematics of non-wellfounded phenomena. Stanford, Calif : CSLI Publications, 1996. 400 pp.

Часть III

Феноменология

6

Общая характеристика феноменологии Бадью

Две основные книги Бадью, «Бытие и событие» и «Логики миров»[2], разделены почти двадцатилетним временным промежутком и существенно отличаются по применяемой математической технике. Первая посвящена онтологии, вторая — феноменологии или логике мира (точнее говоря, логикам миров, поскольку речь идёт об их множестве), и это оправдывает смену аналитического аппарата: от теория множеств в первой, к теории топосов — во второй. В то же время, сама эта смена небезобидна. Развиваемая с середины прошлого века теория категорий, ветвью которой является теория топосов, претендует на замену теории множеств в роли основания математики. И если в «Бытии и событии» теория множеств выступает в качестве «фундаментальной онтологии», то переход к топосам ставит под вопрос эту фундаментальность, тем более, что теория категорий предполагает иные философские решения[3]. Поэтому возникает вопрос о преемственности между двумя подходами Бадью, на который сегодня существуют различные ответы — от признания полной последовательности до подозрения в «позитивизации события», а также обвинений в противоречивости по причине сохранения приверженности теории множеств вопреки фактическому переходу к совершенно иному математическому аппарату. Может создаться впечатление, что речь здесь идёт о существенном изменении взгляда и, соответственно, о радикальном отличии онтологии от феноменологии. Однако, если мы восстановим некоторые промежуточные этапы, то окажется, что поздний подход Бадью является естественным продолжением раннего, и тогда вопрос о преемственности предстанет в новой форме: насколько феноменология Бадью является на самом деле трансформацией его онтологии, насколько

---

[2] Поскольку в этой части изложение опирается, в основном, на «Логики миров», второй том «Бытия и события», то в виде страниц в скобках будут даваться ссылки именно на него: *Badiou A.* Logiques des mondes : L'être et l'événement, 2. P. : Seuil, 2006. 638 p. (Collection « L'Ordre philosophique »).

[3] См., например, *Krömer R.* Tool and Object.

Бадью отходит от своих первоначальных принципов (или, несколько предвосхищая ответ, насколько он должен был бы отойти, учитывая его обращение к теории топосов, но не отходит, сохраняя приверженность теории множеств)? В полной форме ответ на этот вопрос требует отдельного исследования, мы будем иметь дело лишь с его частью, которая посвящена связи математической техники первого и второго тома. Наша цель — восстановить не упоминаемые Бадью промежуточные этапы при переходе от теоретико-множественного к теоретико-категорному подходу. Основное место в «Логиках миров» занимает построение новой теории объекта. В поздних произведениях помимо события ещё одним условием существования субъекта становится тело, в свою очередь основанное на развиваемой Бадью теории объекта. Последняя потребовала построения теории явления и, в связи с этим, существенного обогащения математического аппарата. При этом зависимость поздних построений Бадью от его раннего подхода, связанная с эволюцией математических идей, не всегда оказывается видна. Для ответа на него и потребуется восстановить некоторые промежуточные конструкции, позволяющие лучше понять математику, на которую опирается Бадью.

Итак, мы переходим теперь к феноменологии Бадью, как она представлена в «Логиках миров». Подход здесь существенным образом трансформируется по сравнению с «Бытием и событием». Если раньше речь шла об онтологии или учении о бытии как таковом, то теперь — о феноменологии или учении о бытии-здесь (l'être-là). Если раньше основным теоретическим аппаратом служила классическая теории множеств, то теперь — теория категорий и пучков. Преемственность, безусловно, сохраняется, однако она не всегда отчётливо видна. Бадью сам говорит об отличии второго тома от первого в пятой книге «Логик миров»:

> В самом деле, в то время, не имея в своём распоряжении никакой теории бытия-здесь, я думал, что возможна чисто онтологическая характеристика события. Внимательные читатели (а именно, Десанти, Делёз, Нанси и Лиотар) быстро обратили моё внимание, что я ограничил своё онтологическое определение «того-что-грядёт» сверху и снизу. Снизу, полагая существование места события, которого требует всякое событие и формальную структуру которого я с большим трудом описал. Сверху, настаивая, что всякое событие получает имя. Можно, следовательно, сказать, что на самом деле имелась, с одной стороны, «мировая» структура события (его место, обращённое к пустоте всякой ситуации), а с другой стороны, менее ясная трансцендентальная структура (имя, присвоенное анонимным субъектом). Мы увидим, что теперь я способен полностью отождествить «место» и «множество события» — не впадая тем самым в банальные апории диалектики структуры и истории — и минимизировать обращение к таинственному именованию. Более того, вместо жёсткой оппозиции ситуации и события у меня теперь имеются нюансы трансформации, начиная

> с модификации мобильного-немобильного, минуя нейтральность факта и заканчивая событием в собственном смысле. (381)

Таким образом, важнейшие изменения касаются понимания события, появляются различные варианты (нюансы) трансформации, одним из которых оно является, минимизируется значение именования, переосмысляется структура решения. Чтобы лучше понять эти модификации, нам нужно восстановить математику, используемую Бадью. В этом отношении он даёт достаточно ясные указания, хотя и не приводит подробностей, в то же время, нас интересуют именно последние. Чтобы к ним подойти, я сначала приведу обзор теории объекта Бадью, как она представлена в «Логиках миров», а затем мы рассмотрим математические структуры, на которые он при этом опирается (Ω-множества, категории, пучки и пр.), и их связь с форсингом Коэна и гейтингозначными моделями. Основным вспомогательным материалом и иллюстрацией будут при этом служить модели Крипке. Наконец, в заключении мы рассмотрим модификацию теории события и субъекта.

§ 6.1. Трансценденталь

Как я уже говорил, одно из главных различий между первым и вторым томом состоит в том, что «Бытие и событие» посвящено онтологии, тогда как «Логики миров» — феноменологии или теории явления (при этом «логика» и теория «явления» — это одно и то же (109)). В отличие от онтологии, феноменология описывает множества, которые могут быть явлены лишь частично. Важнейшей характеристикой феноменологии, в отличие от онтологии, является то, что объекты в ней могут иметь различные степени сходства и различия. Это означает, что, если в онтологии мы могли говорить лишь о принадлежности или непринадлежности множества другому множеству, то теперь возможна частичная, неполная принадлежность — мы можем говорить о степени явленности множеств. Математически, это означает, что, если раньше утверждение о принадлежности имело лишь два значения истинности, то теперь мы вводим промежуточные значения. Трансценденталь есть математическая структура, позволяющая это делать. Она представляет собой множество возможных значений степени явленности вместе с набором условий и операций на них. Трансценденталь — характеристика мира, а не объекта. Каждый мир имеет *трансцендентальную организацию* (111). Кроме того, она не зависит от субъекта, о чём Бадью прямо говорит (111). Будучи множеством с операциями, трансценденталь образует алгебру. Бадью обозначает её через T. Как мы увидим, она является гейтинговой алгеброй. Трансценденталь характеризует мир в целом, т. е. является общей для всех его объектов, и служит алгеброй истинностных значений в нём. Каждый мир имеет свою систему сходств и различий, поэтому, вообще говоря, имеется много трансценденталей — своя для каждого мира (131).

Они, однако, не относятся, как в случае Канта, к некоторому общему центру, трансценденталь является свойством мира и не предполагает никакого субъекта (129-131). Она описывает сущее-в-мире, т. е. то, как чистое сущее (относящееся к онтологии) является в мире, однако само это явление а-субъективно. Бадью говорит также о *локализации* сущего в мире: явление сущего есть бытие-здесь (112). При этом существует множество миров (112), и одно и то же многое может со-являться в нескольких мирах (124).

Формально, трансценденталь задаётся тремя условиями (113-114): 1) имеется минимальная степень, 2) для каждых двух степеней имеется их соединение или конъюнкция, 3) для любого (в том числе бесконечного) множества степеней существует *оболочка* (фр. enveloppe), задающая, в некотором смысле, их объединение. Остальные свойства трансцендентали выводятся из этих условий, и она оказывается полной гейтинговой алгеброй (178-180). Соответственно, мы можем заметить сходство этих условий с определением открытых множеств (4.2). Таким образом, степени трансцендентали находятся в отношении частичного порядка. Пересечение двух степеней определяется как максимальная степень, меньшая их обеих (как мы помним, при частичном порядке не всякие две степени сравнимы с точки зрения их величины). Это соответствует инфимуму гейтинговой алгебры. Оболочка же определяется Бадью не для двух, а для множества степеней как минимальная степень, превосходящая их все. Обычно, эта операция определяется симметрично к пересечению для двух степеней: как минимальная степень, превосходящая их, и затем распространяется на множество степеней. При этом может потребоваться дополнительное условие, утверждающее существование оболочки для произвольного множества степеней. Бадью, однако, действует обратным образом, сразу постулируя это существование, причём для бесконечного множества. Эти способы, как очевидно, эквивалентны, и, в любом случае, оболочка соответствует супремуму гейтинговой алгебры.

Будем обозначать отношение порядка трансцендентали через $\leqslant$, а инфимум и супремум — через $\wedge$ и $\vee$. Помимо этого определены также минимум и максимум, которые Бадью обозначает μ и M, но для которых я буду использовать, как и раньше, $\bot$ и $\top$. Одним из самых важных производных понятий является отрицание или дополнение (фр. envers, изнанка, обратная сторона). Оно определяется как степень, не имеющая с данной «ничего общего», т. е. дающая в пересечении с ней минимальную степень, в минимальной степени с ней сходная: $\neg p \wedge p = \bot$. Она совпадает с псевдодополнением гейтинговой алгебры и поэтому отличается от классического отрицания. Поскольку мы говорим о степенях существования, то это означает, что мы имеем здесь дело с неклассическим пониманием несуществования. Речь идёт о несуществовании в конкретном мире, т. е. о минимальной явленности именно в этом мире.

Ещё одно важное понятие Бадью называет *зависимостью*:

> «Зависимость» (dépendance) являющегося *B* по отношению к другому являющемуся *A* есть наибольшая интенсивность, которую можно присоединить ко второй, оставаясь при этом меньше, чем первая. Зависимость есть, таким образом, оболочка сущих-здесь, таких, что их соединение с *A* остаётся по значению меньше, чем значение *B*. (144-146)

Как мы видим, зависимость соответствует относительному псевдодополнению и логической импликации. Интуитивно, мы можем сказать, что всякая степень в определённом смысле «следует» из степеней, меньших её: все такие степени могут быть «расширены» так, что они «достигнут» её. Поэтому q «следует» из p, если последнее «содержит» некоторую часть, меньшую первой. Это «содержание» формализуется как конъюнкция с p, а зависимость определяется как максимальная степень, допускающая такую конъюнкцию. Если зависимость максимальна, то любая степень при соединении с p остаётся меньше q, а это означает, что само p меньше q: $p \leqslant q$. Если же она не максимальна, то это означает, что в p «содержится» часть, из которой q не следует. При минимальной зависимости эта часть оказывается наибольшей из возможных, что означает, что сама конъюнкция p и q равна минимуму. С другой стороны, если q равно минимуму, то степень зависимости равна дополнению, т. е. степени, конъюнкция которой с исходной будет равна минимуму. Таким образом, отрицание является частным случаем зависимости. Если зависимость есть мера связи двух степеней, то отрицание означает минимум этой связи.

Место являющихся сущих Бадью называет миром (122-123). Сущее мыслимо лишь как принадлежащее к некоторому миру (123). Другими словами, о сущем мы можем говорить лишь в его отношении к другим сущим. Это позволяет Бадью сделать вывод, что феноменология должна строиться, исходя не столько из степени явленности, сколько из степени различия. Именно функцию, задающую различие, Бадью определяет, в конечном итоге, как функцию явления: «фактически, трансцендентальная организация мира измеряет и оценивает степень интенсивности различия явления двух сущих в мире, а не интенсивность явления, взятого „в себе“» (133). В частности, являющееся сущее отличается не только от других, но и от себя. В этом состоит отличие феноменологии от онтологии:

> Онтологическое тождество не предполагает никакого отличия сущего ни от самого себя, ни от какого-то другого. Чистое многое полностью определяется своим внутренним составом, так что не имеет никакого смысла говорить, что оно «более или менее» идентично самому себе. Если оно отличается от какого-то другого, пусть даже единственным элементом из бесконечного числа, то оно отличается абсолютно. (128)

Таким образом, онтологическое и феноменологическое определения существенно различаются.

§ 6.2. Теория объекта

Теория объекта образует ядро книги «Логики миров». При её построении Бадью использует аппарат Ω-множеств. В контексте его феноменологии этот аппарат допускает прямую интерпретацию, однако во многих случаях более ясным и прозрачным оказывается иной подход, основанный на понятии пучка. Поэтому следующий далее текст посвящён связи теории пучков и теории объекта Бадью. То, что я буду излагать, это хорошо известные факты теории пучков, адаптированные, однако, к терминологии и способу представления, выбранными Бадью. Как и ранее, я буду опускать доказательства,[1] и уделять основное внимание конструкциям, которые в них строятся, а также примерам этих конструкций. Сначала мы рассмотрим теорию объекта Бадью, в особенности определение объекта и его связь с Ω-множествами. Затем мы перейдём к определению пучка, для чего потребуются базовые сведения из теории категорий. После этого мы рассмотрим, в каком смысле пучок эквивалентен объекту Бадью, и каким образом мы можем переходить от одного к другому. В ходе изложения мы рассмотрим несколько примеров пучков и построим объекты на их основе.

Перейдём к определениям.

Пусть имеется мир с трансценденталью T и принадлежащее ему множество A. Функция $\mathbf{Id}(a, b)$, устанавливающая степень идентичности двух элементов $a, b \in A$ и принимающая значения в трансцендентали, называется *функцией явления*, если подчиняется следующим аксиомам (258):

Id1 $\mathbf{Id}(x, y) = \mathbf{Id}(y, x)$,
Id2 $\mathbf{Id}(x, y) \wedge \mathbf{Id}(y, z) \leqslant \mathbf{Id}(x, z)$.

Первая из них утверждает естественное свойство симметричности идентичности. Что же касается второго, то для его понимания полезно вспомнить связь между порядком гейтинговых алгебр и логическим выводом. Тогда второе условие оказывается просто условием транзитивности, также естественным для идентичности.

Функция явления описывает то, каким образом элементы A — и, следовательно, само A — являются в мире. Как мы видим, явление относительно, и являются не сами множества, а их сходства с другими множествами. Очевидную параллель такой феноменологии мы находим в фонологии[2]. Мы имеем здесь дело с феноменологией структуралистского типа.

Величину $\mathbf{E}x = \mathbf{Id}(x, x)$ Бадью называет *степенью существования* элемента x. Она, как мы видим, производна от функции сходства.

---

[1] Их можно посмотреть в многочисленных книгах, таких, например, как *Borceux F.* Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. 522 pp. DOI: `10.1017/CBO9780511525872`; *Bell J. L.* Set Theory; *Голдблатт Р.* Топосы, а также у самого Бадью

[2] *Трубецкой Н. С.* Основы фонологии. М. : Аспект Пресс, 2000. 352 с.

Явлением (или феноменом) a относительно A называется множество, состоящее из a и степеней его идентичности со всеми элементами A, т. е.

$$\Phi(a/A) = \{\, a, \mathrm{Id}(a, x_1), \mathrm{Id}(a, x_2), \dots \mid x_i \in A \,\}.$$

Феноменальной компонентой A (composante phénoménale) называется функция $\pi : A \to T$, сопоставляющая каждому элементу A степень из трансцендентали T. Бадью интерпретирует её как нечёткое подмножество, т. е. подмножество, для которого $\pi(x)$ обозначает степень принадлежности элемента x компоненте (т. е. подмножеству) π (261). Элемент может принадлежать компоненте в разной степени от минимальной до максимальной, максимальная принадлежность называется также абсолютной.

Атомной компонентой или *атомом* называется компонента с одним элементом в том смысле, что в ней может существовать только один максимально принадлежащий ей элемент:

> Я называю атомной компонентой или просто «атомом» компоненту объекта, которая, интуитивно, имеет самое большее один элемент в следующем смысле: если имеется элемент A, о котором можно сказать, что он принадлежит компоненте абсолютно, то такой элемент может быть только один. Это означает, что всякий другой элемент, абсолютно принадлежащий компоненте, идентичен, в явлении, первому (функция явления принимает значение $\top$ при оценке идентичности этих двух рассматриваемых элементов). (262)

Формально, это означает, что атом $\alpha(x)$ подчиняется следующим двум аксиомам (262-263) (впрочем, первая из них верна для всякой феноменальной компоненты):

α1 $\alpha(x) \wedge \mathrm{Id}(x, y) \leqslant \alpha(y)$
α2 $\alpha(x) \wedge \alpha(y) \leqslant \mathrm{Id}(x, y)$.

Здесь для второго соотношения также полезно вспомнить связь порядка и выводимости.

Несложно показать, что для всякого элемента a функция $a(x) = \mathrm{Id}(a, x)$ является атомом. Обратное, вообще говоря, неверно, поэтому мы можем определить *реальный атом* как такую функцию $\alpha(x)$, для которой существует единственный $a \in A$, такой, что для всякого $x \in A$ имеет место равенство $\alpha(x) = a(x) = \mathrm{Id}(a, x)$. Другими словами, этой функции соответствует единственный элемент множества A, такой, что соответствующий ему атом $\mathrm{Id}(a, x)$ совпадает с ней.

Для реального атома определяется понятие локализации: *локализацией* реального атома a на степень p называется функция, ставящая в соответствие каждому $x \in A$ значение $a(x) \wedge p$ (268). Можно показать, что локализация атома сама является атомом. Бадью определяет локализацию только для атома, причём реального (268), однако, вообще говоря, локализация или ограничение имеет смысл для любого атома или даже компоненты. Определение Бадью означает, что для него с самого начала элементы объекта являются «проявлением» или частичным явлением заранее данных элементов, относящихся к онтологии. Тем самым, онтология оказывается первичной по отношению к феноменологии. Степени явленности предполагают «позади себя» то, что является. В этом смысле, как критика Канта, так и декларируемый Бадью переход от феноменологии к онтологии оказываются проблематичными. Однако особенность теории объекта у Бадью состоит в том, что в ней, в отличие от Канта, возможен переход от явления к являющемуся множеству.

Понятие реального атома позволяет сформулировать *постулат материализма*, на который опирается определение объекта. Он звучит следующим образом: *всякий атом реален*. Другими словами, какую бы функцию, удовлетворяющую аксиомам атома α, мы ни взяли, ей всегда соответствует реальный элемент множества A. По этой причине Бадью противопоставляет этот постулат «примату виртуального» у Бергсона и Делёза (265). Интуитивно: всякая «атомообразная» функция соответствует реальному атому. Постулат материализма упрощает построения Бадью. В частности, он позволяет определять некоторые понятия только для атомов, а не для компонент вообще. Однако его необходимость проблематична. Действительно, этот постулат эквивалентен условию полноты для Ω-множеств. При этом можно показать[1], что всякое Ω-множество в определённом смысле изоморфно некоторому полному Ω-множеству, что позволяет, в частности, всегда предполагать полноту, которую Бадью устанавливает в качестве постулата. В связи с этим возникает вопрос, не является ли постулат материализма излишним в теории Бадью, а также как можно интерпретировать упомянутый изоморфизм (особенно в контексте противостояния «примату виртуального»). Но мы оставим это за рамками нашего обсуждения.

При условии выполнения постулата материализма мы можем, наконец, сформулировать определение объекта. *Объектом* называется

> пара множества A и трансцендентальной индексации $\mathbf{Id}$, обозначаемая как $(A, \mathbf{Id})$, при условии, что всякий атом, который можно построить на основе A, является реальным, иначе говоря, при условии, что всякая феноменальная компонента явления A имеет эквивалент в реальном атоме $\mathbf{Id}(a, x)$, предписанном элементом $a \in A$. (265)

Такова формальная теория. Она может иметь самые разнообразные интерпретации, и Бадью в «Логиках миров» предлагает множество примеров объектов. Одной из простейших трансценденталей может служить множество из двух элементов $\bot$ и $\top$, так что степени сходства и различия принимают лишь два значения. Это трансценденталь онтологии, которая, в этом смысле, оказывается

---

[1] Например, *Голдблатт Р.* Топосы. С. 404.

частным случаем феноменологии. Другим простым примером трансцендентали являются подмножества некоторого множества экспертов, упорядоченные по включению. Минимальной степенью такой трансцендентали будет пустое множество экспертов (например, дающих некоторую оценку сходства), а максимальной — множество всех экспертов. Однако существует в определённом смысле выделенная семантика для теории объекта Бадью. Она полезна для интерпретации не только этой теории, но и его раннего подхода, основанного на методе форсинга Коэна. Эту семантику предоставляют модели Крипке. По этой причине они будут играть ключевую роль в дальнейшем изложении.

Дополнительная литература

Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / под ред. Д. А. Бочвара ; пер. с англ. В. Н. Гришина, В. В. Шокурова. М. : Мир, 1983. 488 с.

7

Математика феноменологии Бадью

§ 7.1. Объект как Ω-множество

Бадью несколько упрощает математику, которой он пользуется. Это приводит к тому, что некоторые существенные детали становятся не видны. Например, хотя Бадью вводит трансценденталь как полную гейтингову алгебру, она фактически является такой алгеброй в рамках более сложной структуры — Ω-множества или Ω-значного множества. Поэтому трансценденталь содержит в себе, помимо структуры алгебры Гейтинга, также дополнительную структуру Ω-значного множества. Настоящий и следующий разделы посвящены восстановлению математики, на которую опирается Бадью. Структура, которую Бадью описывает под именем объекта, называется Ω-значным множеством или просто Ω-множеством[2]. Это множество, для которого задана некоторая алгебра истинностных значений так, что теоретико-множественные формулы, которые можно построить с элементами этого множества, обладают значениями истинности из этой алгебры. Название Ω-множества связано с тем, что эта алгебра обычно обозначается как Ω. Она является гейтинговой алгеброй и соответствует трансцендентали у Бадью. Однако он в своей теории объекта использует обозначение T, и я буду ему следовать, надеясь, что это не создаст особой путаницы. Формально, Ω-множество определяется как множество с определённой на нём функцией равенства, принимающей значения в полной гейтинговой алгебре. Функция равенства сопоставляет каждой паре (x, y) элементов Ω-множества элемент гейтинговой алгебры T, который обозначается $[\![x = y]\!]$ и подчиняется

---

[2] См., например, *Голдблатт Р.* Топосы. С. 288 и сл. ; *Borceux F.* Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. DOI: `10.1017/CBO9780511525872`. Pp. 144 sq.

аксиомам, аналогичным (Id1) и (Id2):

$$[\![x = y]\!] = [\![y = x]\!]$$
$$[\![x = y]\!] \wedge [\![y = z]\!] \leqslant [\![x = z]\!].$$

Они соответствуют свойствам симметричности и транзитивности отношения равенства. В результате рассуждений, аналогичным тем, с которыми мы встречались при определении истинности для булево- и гейтингозначных моделей, для кванторов можно определить:

$$[\![\exists x \in B(\varphi(x))]\!] = \sum_{x \in B} [\![\varphi(x)]\!]$$
$$[\![\forall x \in B(\varphi(x))]\!] = \prod_{x \in B} [\![\varphi(x)]\!].$$

Для Ω-множества можно определить *подмножества* как функции $\pi : A \to T$, где $\pi(x)$ равно степени истинности формулы $x \in \pi$ (степень принадлежности элемента x подмножеству π). Формально, она удовлетворяет условиям:

$$[\![x \in \pi]\!] \wedge [\![y = x]\!] \leqslant [\![y \in \pi]\!] \tag{7.1}$$
$$[\![x \in \pi]\!] \leqslant [\![x = x]\!].$$

Первое из них соответствуют аксиоме экстенсиональности, а смысл второго мы увидим ниже.

Подмножество, состоящее (в некотором смысле) из одного элемента, называется *синглетоном*. Это означает, что, если функция $s : A \to T$ — синглетон, то она определяется дополнительным условием:

$$[\![x \in s]\!] \wedge [\![y \in s]\!] \leqslant [\![y = x]\!].$$

Его полезно сравнить с тождеством обычной теории множеств: $(x \in s) \wedge (y \in s) \Rightarrow (x = y)$.

Наконец, *ограничение* подмножества π на степень p определяется как функция $A \to T$, такая, что каждому $x \in A$ она ставит в соответствие $\pi(x) \wedge p$. Обозначим ограничение π на p через $\pi \upharpoonright p$. Можно показать, что эта функция также будет подмножеством, и, более того, если s — синглетон, то $s \upharpoonright p$ — также синглетон. Ω-множество называется *полным*, если каждый его синглетон имеет вид функции $s(x) = [\![x = a]\!]$ для единственного $a \in A$.

Нетрудно видеть, что в теории объекта Бадью мы находим все определённые только что понятия. Равенство соответствует функции явления **Id**, подмножество — феноменальной компоненте, синглетон — атому, ограничение — локализации (с той разницей, что Бадью определяет локализацию только для атома, а не для произвольной компоненты). Объекты Бадью, таким образом, являются Ω-множествами, на что указывает и он сам (563). При этом существенно, что они являются полными Ω-множествами. С учётом переформулирования, определение полноты соответствует постулату материализма. Таким образом, этот постулат определяет объект как полное Ω-множество.

§ 7.2. Объект как пучок

Объект Бадью также является пучком, т. е. категорной конструкцией особого рода, поэтому для дальнейшего полезно вспомнить базовые сведения из теории категорий (см. выше § 3.6). Бадью работает с категорией специального вида, которая называется *топосом*. В топосе гарантируется существование некоторых специальных объектов, важнейшим из которых является так называемый классификатор подобъектов. Поскольку подобъекты в категории являются аналогом подмножеств, классификатор служит для задания характеристической функции и, таким образом, служит алгеброй истинностных значений для топоса. Это позволяет говорить о присущей топосу логике, которая оказывается интуиционистской. Топос является обобщением понятия множества, и интуитивно его можно рассматривать как совокупность изменяющихся множеств. Одна из неформальных мотиваций для развития теории топосов состояла вообще в том, чтобы определить категорию, наиболее близкую к теории множеств. В частности, множества и функции любой (даже нестандартной) модели теории множеств образуют топос[1]. В топосе имеется всё, что можно определить или доказать в обычной или интуиционистской теории множеств. В частности, стратегия Коэна и метод форсинга также могут быть переписаны в терминах топоса. Всё это делает топос привлекательным при анализе теоретико-множественных конструкций и их обобщений. Кроме того, — что исключительно важно в контексте теории субъекта Бадью — топос предоставляет семантику для интуиционистской формальной логики. По этим причинам, переход к нему у Бадью можно считать закономерным. Определение топоса в общем виде потребовало бы введения довольно сложных понятий, которые нам, однако, не понадобятся. Поэтому я не буду его здесь приводить, мы будем просто предполагать, что все необходимые для дальнейших построений объекты существуют.

Нашей ближайшей целью будет понять объект Бадью как пучок. Поскольку понятие пучка тесно связано с моделями интуиционистской логики, оно позволяет Бадью перейти от онтологии и форсинга к феноменологии становящихся объектов. Дальнейшее изложение в значительной степени опирается на книгу Голдблатта о топосах[2], куда я отсылаю читателя за возможно требующимися деталями и пояснениями. Нашей первой задачей будет рассмотреть

---

[1] *Blass A.* The Interaction Between Category Theory and Set Theory // Contemporary Mathematics. 1984. Vol. 30. P. 14.

[2] *Голдблатт Р.* Топосы.

связь пучков и Ω-множеств и тем самым понять последние как становящиеся объекты. Мы начнём с общего определения пучка, а затем рассмотрим в качестве иллюстрации пучки сечений, определённые как расслоения с добавленной топологической структурой. Бадью пользуется общей формулировкой, однако пучок сечений будет нам служить хорошей иллюстрацией и поможет установить связь с моделями Крипке (но вообще говоря, можно показать[1], что любой пучок изоморфен пучку сечений). В определённом смысле, топология — локализация, в терминах Бадью, — является прямым следствием интуиционистской логики субъекта, поскольку топология как совокупность открытых подмножеств образует гейтингову алгебру. Мы увидим, в каком смысле мир топологически эквивалентен частично упорядоченному множеству. Если в качестве последнего выступает время, как это происходит в моделях Крипке, то речь может идти о темпоральной структуре мира.

Общее определение пучка

Вероятно, наиболее удобно определять пучок как определённого рода функтор. Как мы помним (с. 64), функтором называется отображение между категориями, сохраняющее их структуру. Для целей анализа философии Бадью нам понадобятся отображения категории порядка в категорию множеств. Пучок можно определить на произвольной категории,[2] но нам понадобятся только пучки на гейтинговых категориях, поэтому в определении будут участвовать только они. В контексте теории пучков они часто называются локалями, а в контексте феноменологии Бадью являются трансценденталями.

Таким образом, из разного вида функторов нам пока понадобятся лишь функторы вида $T \to \mathcal{S}et$, т. е. отображающие трансценденталь в категорию множеств. Рассматривая их в качестве объектов, а естественные преобразования — в качестве стрелок, мы получим категории функторов, которые будем обозначать как $\mathcal{S}et^T$. Соответственно, для категорий контравариантных функторов будем иметь $\mathcal{S}et^{T^{op}}$.

Предпучком на локали (трансцендентали) T называется контравариантный функтор $F\colon\ T \to \mathcal{S}et$, т. е. ковариантный функтор $T^{op} \to \mathcal{S}et$. Предпучки вместе с естественными преобразованиями составляют категорию предпучков. Каждому объекту p из T предпучок ставит в соответствие множество $F(p)$, элементы которого называются *сечениями*. Каждой стрелке $f\colon\ p \to q$ из T он ставит в

---

[1] *Голдблатт Р.* Топосы. С. 372 и сл.

[2] Минимальным требованием к категории для того, чтобы на ней возможно было определить пучок, является определение на ней покрытия или системы покрытий для каждого её объекта. Соответственно, на одной и той же категории можно определить различные пучки в в зависимости от различных семейств покрытий. Для гейтинговой категории покрытие объекта p определяется как семейство объектов p_i, таких, что $p = \sum_i p_i$. Категория с определённым на ней покрытием называется местом или *ситусом* (англ. site). Мы будем более подробно говорить об этом ниже (§ 8.5).

соответствие стрелку $F(f): F(q) \to F(p)$ в категории $\mathcal{S}et$ (т. е. функцию на множествах, обратите внимание на изменение направления стрелок). Последняя переводит сечение $x \in F(q)$ в сечение $F(f)(x)$, которое называется *ограничением* x на p и обозначается как $x \upharpoonright p$. Мы видим, что в предпучке множества связаны между собой ограничением, причём эта связь «отражает» стрелки категории, над которой определён предпучок. Интуитивно, предпучок представляет собой категорию, к каждому объекту которой «привязано» множество, причём связь этих объектов «индуцирует» связь множеств (см. рис. 7.1). Предпучок можно рассматривать как множество, изменяющееся при «пробегании» объектов локали, или как множественно-значный функтор с категорией T в качестве области определения.

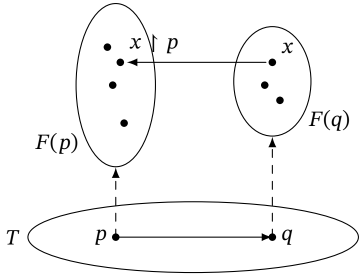

Рис. 7.1. Пучок и ограничение сечения

Пусть теперь F — предпучок на T, а p_i — семейство элементов локали, проиндексированное некоторым множеством I (т. е. $i \in I$). Выбрав из каждого $F(p_i)$ по одному сечению, мы получим семейство сечений x_i. Оно называется *совместимым*, если для любых i и j совпадают следующие ограничения:

$$x_i \upharpoonright (p_i \wedge p_j) = x_j \upharpoonright (p_i \wedge p_j).$$

Другими словами, отображением ограничения они переводятся в один и тот же элемент множества $F(p_i \wedge p_j)$.

Наконец, предпучок F называется *пучком*, если для любого набора p_i, такого, что $\sum_{i \in I} p_i = p$, и любого совместимого семейства $x_i \in F(p_i)$ существует единственный элемент $x \in F(p)$, такой, что для всех i его ограничения на p_i будут равны x_i, т. е. $x \upharpoonright p_i = x_i$. Таким образом, в пучке элементы всякого совместимого семейства могут быть «склеены» в один элемент, причём единственным образом.

Прежде чем демонстрировать роль этих определений и структур в феноменологии Бадью, рассмотрим в качестве иллюстрации пучки сечений топологических пространств.

Расслоения

Как обычно, начнём с ряда определений. Пусть имеется совокупность взаимно непересекающихся множеств A_i, индексированных (т. е. помеченных) элементами некоторого множества I (например, натуральными числами):

$$\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}, \quad (\forall i \neq j)(A_i \cap A_j = \varnothing).$$

Определим вслед за Голдблатом:

> Если определить A как объединение всех A_i, т. е.
>
> $$A = \{ x \mid \text{ для некоторого } i \;\; x \in A_i \},$$
>
> то возникает очевидное отображение $p\colon A \to I$. Если $x \in A$, то поскольку множества A_i не пересекаются, существует ровно одно множество A_i, такое, что $x \in A_i$. Положим $p(x) = i$. Таким образом, все элементы из A_i отображаются в i, все элементы из A_j — в j и т. д. Мы можем теперь восстановить A_i как прообраз при отображении p множества $\{ i \}$. Действительно, $p^{-1}(\{ i \}) = \{ x \mid p(x) = i \} = A_i$. Множество A_i называется *слоем* над i, элементы из A_i называются *ростками* в i, а вся структура — *расслоением* множеств над *базисным* пространством (*базой*) I. Множество A называется *пространством расслоения*.[1]

Эту структуру удобно пояснить рисунком (рис. 7.2).

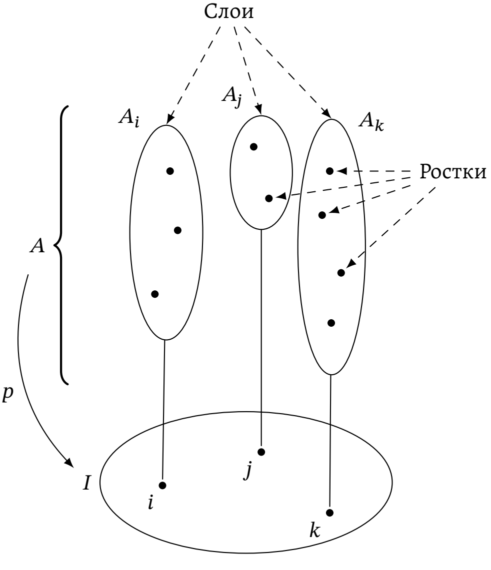

Рис. 7.2. Расслоение над базисным пространством I

Несмотря на сложное определение, расслоения не относятся к экзотике. Они возникают везде, где есть функции. Действительно, если мы имеем функцию $p\colon A \to I$ для некоторых множеств A и I, то можем определить: $A_i = p^{-1}(\{ i \})$ где $i \in I$. Поэтому расслоение множеств над I порождается просто функцией с областью значений I.

---

[1] *Голдблатт Р.* Топосы. С. 102.

Мы можем далее ввести категорию расслоений $\mathcal{B}n(I)$ над I, которая окажется топосом. Её объектами являются пары (A, f), где f — функция $A \to I$, а стрелками — такие функции $h \colon A \to B$, что $g \circ h = f$, т. е. такие, что отображают ростки в i расслоения (A, f) в ростки в i расслоения (B, g) (см. рис. 7.3). Объекты категории $\mathcal{B}n(I)$ можно рассматривать как обобщённые множества, т. е. как множества, расслоённые над пространством I.

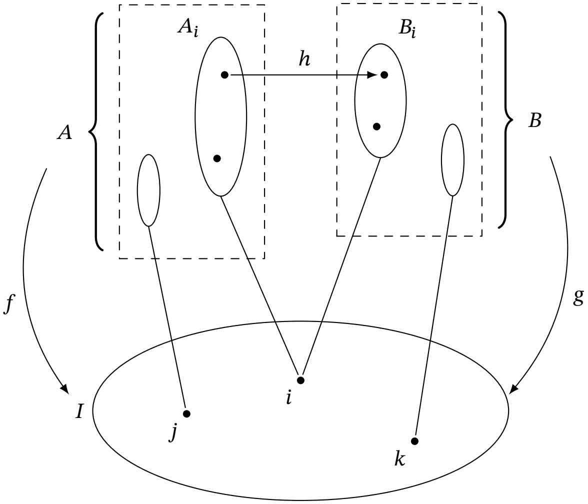

Рис. 7.3. Объекты и стрелки категории $\mathcal{B}n(I)$

Сечением называется функция из базисного множества I, выбирающая один росток из каждого слоя. Другими словами, $s \colon I \to A$ является сечением расслоения $f \colon A \to I$, если $s(i) \in A_i = f^{-1}(\{i\})$ для всех $i \in I$, т. е. если $f(s(i)) = i$ для всех $i \in I$. Поскольку сечение содержит по одному элементу для каждого индекса i, его можно рассматривать как расслоение элементов или как обобщённый элемент. Фактически, сечение и является элементом категории $\mathcal{B}n(I)$ в строгом смысле слова (элемент в категории определяется как единственная стрелка из конечного элемента категории: $1 \to a$).

Добавив к расслоениям определённую топологическую структуру, мы получим пучок.

Конкретно, пусть I — топологическое пространство, а Θ — совокупность его открытых множеств. Θ является категорией порядка (более того, гейтинговой алгеброй), в которой стрелками служат включения $U \hookrightarrow V$. *Предпучком над* I называется контравариантный функтор из категории Θ в категорию множеств, т. е. $F \colon \Theta \to \mathcal{S}et$. Каждому открытому множеству V соответствует множество $F(V)$, а каждой стрелке включения — функция $F_U^V : F(V) \to F(U)$, которая называется *отображением ограничения*. При этом, в силу определения функтора,

1. $F_U^U = \mathrm{id}_U$,
2. для $U \subseteq V \subseteq W$ верно $F_U^W = F_U^V \circ F_V^W$.

Это можно изобразить на рисунке (рис. 7.4). Мы видим, картину, аналогичную расслоению (рис. 7.2), если в качестве базисного пространства расслоения взять множество Θ. В этом случае, каждый из элементов $F(V)$ представляет собой сечение, и для того, чтобы превратить этот предпучок в пучок, нам нужно определить склейку для этих сечений.

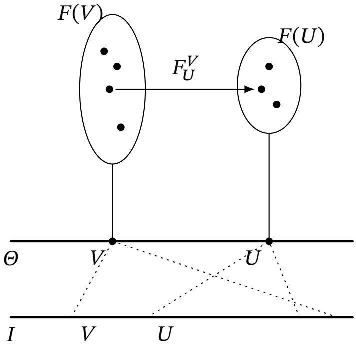

Рис. 7.4. Предпучок над I

В геометрии пучок определяется как локальный гомеоморфизм $p: A \to I$ между топологическими пространствами. Гомеоморфизм, как мы помним, является непрерывным изоморфизмом, а локальность означает, что для всякого $x \in A$ найдётся такая открытая окрестность U, которая отображается отображением p в открытое множество в I. Иначе говоря, гомеоморфизм называется *локальным*, если для каждой точки исходного пространства имеется такая окрестность, что ограничение отображения на неё является гомеоморфизмом. Локальный гомеоморфизм (в отличие от глобального) накладывает более слабые ограничения на отображение. Пространства могут быть не гомеоморфны глобально, но гомеоморфны локально. Например, тор нельзя непрерывно трансформировать в плоскость, однако для каждой точки тора существует окрестность, которая может быть непрерывно трансформирована в окрестность на плоскости.

Если теперь мы имеем пучок $p: A \to I$, то можем определить предпучок

$$F_p(V) = (\text{множество локальных сечений над } V) =$$
$$= \left\{ V \xrightarrow{s} A \;\middle|\; s \text{ непрерывна и } p \circ s = V \hookrightarrow I \right\}.$$

Другими словами, s устроена таким образом, что при отображении $p \circ s$ элементы множества V отображаются сами в себя, причём отображаются все эти элементы (см. рис. 7.5). В качестве отображения ограничения возьмём теперь отображение F_{pU}^V, которое сечению $s: V \to A$ ставит в соответствие его ограничение на U, т. е. $s \restriction U : U \to A$. Будем отождествлять сечения s с их образами, т. е. с подмножествами A. F_p называется *предпучком сечений над* I (рис. 7.6).

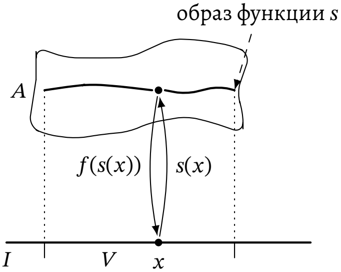

Рис. 7.5. Локальное сечение. Функция s (или её образ) — элемент множества $F_p(V)$.

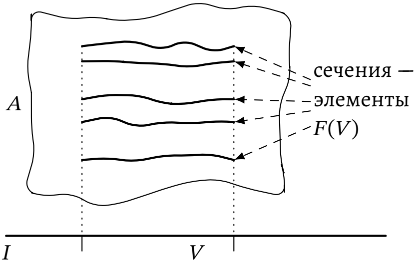

Рис. 7.6. Предпучок сечений над I

Чтобы превратить его в пучок, нам потребуется ещё одно условие. Оно определяет, в каких случаях мы можем «склеивать» сечения, объединяя их в одно. Предположим, что у нас есть набор сечений s_j с областями определения V_j, заиндексированными элементами некоторого множества J (например, натуральными числами). Другими словами, мы имеем множество $\{ V_j \xrightarrow{s_j} A \mid j \in J \}$. Пусть все V_j являются подмножествами открытого множества V. В каком случае мы можем склеить все s_j и получить единое сечение $s : V \to A$? Для этого, прежде всего, требуется, чтобы V было объединением всех V_j. Тогда говорят, что V_j образуют *открытое покрытие* множества V. Выберем теперь некоторое $x \in V$. Оно одновременно должно принадлежать одному или более множеств V_j, при этом согласованность требует, чтобы значения функций $s_j(x)$ были для всех j одни и те же. Именно это значение мы должны будем взять в качестве значения $s(x)$. Следовательно, в общем виде, мы должны потребовать, чтобы для любых двух сечений s_i, s_j их ограничения на пересечение V_i и V_j совпадали для всех $i, j \in J$:

$$s_i \upharpoonright (V_i \cap V_j) = s_j \upharpoonright (V_i \cap V_j).$$

При этом условии сечения называются *совместимыми*.

В результате, при выполнении условия совместимости множество I проектируется в подмножество множества A с сохранением его структуры, т. е. системы открытых множеств. При этом с точки зрения теории объекта Бадью существенны два обстоятельства. Во-первых, на упомянутом подмножестве A — которое является сечением — индуцируется отношение порядка, поскольку стрелки Θ, отвечающие за этот порядок, также проецируются в сечение. Во-вторых, поскольку это отношение в данном случае является обычным включением множеств, порядок на сечении можно интерпретировать в терминах роста, т. е. большей и меньшей «величины». На этом у Бадью основывается идея субъективного тела и его «становления». Связь пучка сечений с рассмотренным ранее пучком ростков может быть схематически (с некоторым упрощением) изображена на рисунке (рис. 7.7, ср. рис. 7.2).

Мы выше сформулировали условие совместимости на примере предпучка сечений. Но его можно сформулировать и для любого предпучка, т. е. в терминах отображений $F(V)$ и F_U^V. Действительно, введём обозначения $F_x : F(V) \to F(V_x)$, $F_y^x : F(V_x) \to F(V_x \cap V_y)$, $F_x^y : F(V_y) \to F(V_x \cap V_y)$ (см. рис. 7.8). Тогда для элементов $s_x \in F(V_x)$ и $s_y \in F(V_y)$ попарная совместимость будет означать: $F_y^x(s_x) = F_x^y(s_y)$, т. е. должны совпадать их ограничения на пересечение областей определения. Тогда существует единственный $s \in F(V)$, такой, что $F_x(s) = s_x$ для всех $x \in X$. Таким образом, условие совместимости формулируется для произвольного предпучка. Если оно выполняется, то предпучок называется *пучком над* I.

Таким образом, пучки являются топологическими пространствами, эквивалентными I в смысле локального гомеоморфизма, т. е. такие, в которые I может быть локально непрерывно трансформировано. Мы видим здесь, о чём идёт речь в феноменологии Бадью. Она предполагает некоторое понятие непрерывности, такое, что изменения (становление) объектов может быть понято как непрерывное отображение трансцендентали в мир. Причём мы увидим ниже, что эта топологическая структура присутствует уже в первоначальном подходе Бадью, основанном на понятии форсинга.

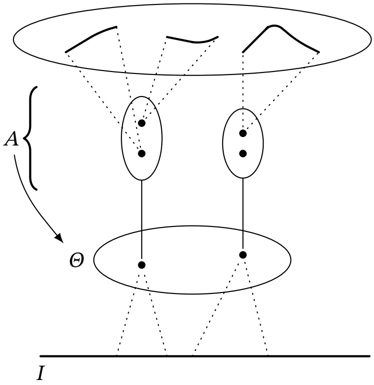

Рис. 7.7. Пучки ростков и сечений.

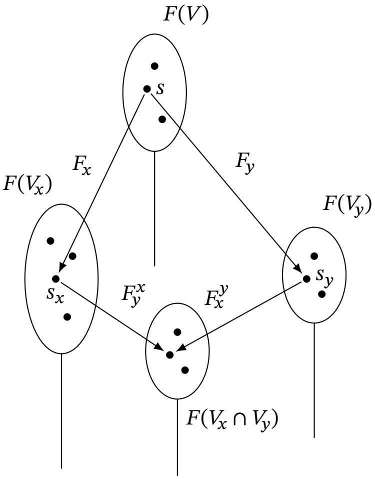

Рис. 7.8. Совместимость для произвольного предпучка $F : \Theta \to \mathcal{S}et$

Примеры пучков

Рассмотрим несколько более простых примеров пучков.

Пример 1. (Неизменяющееся множество) Если в качестве T взять единичную категорию с одним объектом и одной стрелкой (идентичностью), то пучок будет эквивалентен единственному множеству («неизменяющееся множество»), а категория таких пучков — изоморфна категории множеств.

Пример 2. Возьмём в качестве трансцендентали бинарную трансценденталь T_0. Она, как мы помним, состоит из двух элементов $\perp$, $\top$ и единственной неединичной стрелки $\perp \to \top$. Соответствующий пучок переводит эту стрелку в стрелку категории $\mathcal{S}et$, т. е. в функцию на множествах.

Пример 3. (Растущее множество) Пусть $F(p)$ — множество множеств, а ограничение состоит в переходе к подмножеству. Другими словами, для $F(q) \to F(p)$ и x, принадлежащего $F(q)$, положим $x \upharpoonright p \subseteq x$, т. е. $x \upharpoonright p \hookrightarrow x$. Тогда, если $p \leqslant q$, то всякое множество из $F(q)$ отображается пучком в некоторое своё подмножество, которое принадлежит $F(p)$. Поэтому мы можем рассматривать пучок как множество, «растущее» при движении по порядку трансцендентали, — «растёт» как оно само, так и его элементы. Совместимость двух множеств (сечений) означает равенство подмножеств, получающихся при их ограничении на произведение степеней локали. Объединение семейства сечений в смысле пучка («склейка») совпадает с обычным объединением множеств. Это соответствует совместимости «роста» различных множеств.

Пример 4. (Пучок функций) Пусть локалью служит множество подмножеств Θ (открытых или нет) некоторого множества I, упорядоченное по включению. Стрелки в нём соответствуют включениям $U \hookrightarrow V$, где $U \subseteq V$. Рассмотрим множество функций на этих подмножествах и построим $F(U)$ как множество функций с областью определения U и множеством значений из некоторого множества A. Тогда предпучок переводит подмножества U в множества функций $F(U)$, и элементами $F(U)$ (сечениями) являются функции вида $f^U : U \to A$. Под ограничением $f \upharpoonright V$ будем понимать обычное ограничение функции на области её определения, т. е. $f^U|_V$. Это означает, что стрелка $V \hookrightarrow U$ переводится предпучком в стрелку $F(U) \to F(V)$, где $F(V)$ обозначает множество функций из $F(U)$, ограниченных на множество V, т. е. $F(V) = \{\, f^U|_V \mid f^U \in F(U)\,\}$. Соответственно, образы таких функций также связаны включением: $\mathrm{Img}(f^U|_V) \hookrightarrow \mathrm{Img}(f^U)$. Таким образом, предпучок состоит из функций из множества I в множество A, на которые наложено условие, связывающее друг с другом соответствующие подмножества. В случае открытых подмножеств I и A данное отображение будет гомеоморфизмом, и мы получим пучок сечений над топологическим пространством в описанном выше смысле.

Условие совместимости для функций $f_i : U_i \to A$ и $f_j : U_j \to A$ теперь выглядит следующим образом:

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Другими, словами, сечения совместимы, если совпадают как функции на пересечении их областей определения. Данный предпучок является пучком, поскольку всякое семейства совместимых функций мы всегда и единственным образом можем «склеить» в одну функцию, определённую на объединении их областей определения и принадлежащую пучку. При этом образом объединённой функции будет объединение образов склеиваемых функций.

Пример 5. (Значения свойств) Любое множество функций, построенных описанным в предыдущем примере образом, соответствует пучку. В частности, мы можем считать, что I состоит из различных свойств, а A — из значений, которые могут принимать эти свойства. Тогда элементами трансцендентали будут различные множества свойств, упорядоченные по включению, а сечение будет представлять собой набор пар из свойства и его значения. Мы можем интерпретировать последнее как информацию о свойствах некоторого предмета (цвет: красный, длина: 10 см. и т. д.).

Значением функции явления для двух элементов A будем считать множество свойств, величины которых для этих элементов совпадают. Другими словами, степень идентичности индивидов измеряется множеством свойств, оказавшихся одинаковыми для этих индивидов. При этом само значение свойства не имеет значения, важен лишь факт совпадения: если, например, два индивида совпадают по цвету, то цвет входит в множество, измеряющее степень их совпадения вне зависимости от того, каким именно цветом они обладают. Степень существования элемента равна множеству свойств, которыми он обладает, точнее говоря, свойств, обладание которыми явлено в данном мире. Подобно сходству, существование здесь зависит не от значения свойств, а только от их наличия. Минимальное существование означает, что элемент не обладает ни одним из свойств трансцендентали, что говорит не о том, что он не существует, а лишь о том, что он не является в данном мире. Если, например, трансценденталь содержит лишь чувственные качества, то нечувственные предметы (такие как мысли, понятия и т. д.) не будут являться в соответствующем мире, их степень существования будет равна пустому множеству (минимуму для данной трансцендентали).

Феноменальной компонентой или подобъектом будет множество индивидов, каждый со своим набором свойств (возможно, лишь частью того набора, которым каждый индивид обладает). Атомом, однако, не будет компонента, состоящая только из одного элемента, как можно было бы предположить. Он будет таковым, только если степень существования этого элемента равна максимальной, т. е. если он обладает всеми свойствами данного мира (неважно, с какими значениями). Но атом может также состоять из нескольких индивидов, таких, что либо их набор свойств не пересекается, либо значения их свойств на этом пересечении равны; атом может состоять из индивидов, которые, хотя и не обладают максимальным существованием, но потенциально могут быть «склеены» в один элемент, таким существованием обладающим. Совместимость же означает совпадение значений общих свойств, а условие склеивания — то, что мы можем соединить несколько наборов информации в один, который может быть приписан некоторому «объединённому» предмету.

Несмотря на то, что данная алгебра является булевой, а не гейтинговой, многие из примеров Бадью в гл. II можно понять именно в свете описанной модели свойств. Она позволяет продемонстрировать некоторые детали строения трансцендентали и функции идентичности, хотя в целом, особенно в части, связанной с субъектом, теория Бадью требует алгебры Гейтинга существенным образом.

Пример 6. (Картина Робера) Рассмотрим один из примеров Бадью. На картине Юбера Робера «Купальня» изображена ротонда. Некоторые из её колонн находятся на первом плане и освещены солнцем, другие — в тени и заслонены деревьями или другими колоннами. Бадью говорит об этом, что они обладают различными степенями явленности, однако не формализует её. Попробуем это сделать, усложнив предыдущий пример. Будем опять считать, что у нас есть набор свойств, которые мы можем приписывать колоннам, но теперь эти свойства могут иметь несколько линейно упорядоченных степеней того, насколько ясно они выражены на картине. В простейшем случае этих степеней может быть три — свойство не выражено, выражено частично или выражено ясно — и мы можем обозначить их через 0, ½ и 1. Это множество, как и всякое конечное линейно упорядоченное множество, образует гейтингову алгебру, в которой $p \wedge q = \min(p, q)$, $p \vee q = \max(p, q)$, а операция $\Rightarrow$ определяется следующим образом:

$$p \Rightarrow q = \begin{cases} 1, & \text{если } q \leqslant p; \\ q, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответственно, псевдодополнение $\neg p$ (определяемое как $p \Rightarrow 0$) равно 1 при $p = 0$ и 0 при всех остальных p.

Если у нас есть N таких свойств, то определим упорядоченные n-ки или кортежи $p = \langle p^1, p^2, \dots, p^N \rangle$, где p^n — степень выраженности для свойства n. Мы получим декартово произведение гейтинговых алгебр, которое, как можно показать[1], само является гейтинговой алгеброй, если операции определены покомпонентно:

$$\begin{aligned} p \wedge q &= \langle p^1 \wedge q^1, p^2 \wedge q^2, \dots, p^N \wedge q^N \rangle \\ p \vee q &= \langle p^1 \vee q^1, p^2 \vee q^2, \dots, p^N \vee q^N \rangle \\ p \Rightarrow q &= \langle p^1 \Rightarrow q^1, p^2 \Rightarrow q^2, \dots, p^N \Rightarrow q^N \rangle \\ \neg p &= \langle \neg p^1, \neg p^2, \dots, \neg p^N \rangle . \end{aligned}$$

Минимумом и максимумом в ней будут служить кортежи, состоящие, соответственно, из минимумов и максимумов для каждого свойства. Мы получили

---

[1] Например, *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. С. 169.

трансценденталь, которую можем использовать для определения объекта, причём можно показать, что она является гейтинговой, но при этом не булевой алгеброй. В этом смысле, гейтинговы алгебры появляются в теории Бадью вполне естественным образом.

Построим теперь пучок, используя описанную трансценденталь. Для этого будем считать сечениями предметы (в нашем случае, колонны на картине), обладающие разными значении свойств и степенями их выраженности. Объединим в $F(p)$ всевозможные предметы, степень выражения свойств которых равна p. Например, в случае трёхэлементных множеств, в $F(0)$ содержатся предметы, у которых ни о каком свойстве мы не можем сказать ничего определённого, а в $F(1)$ — предметы, у которых каждое свойство имеет точно определённое значение. Промежуточные множества $F(p)$ состоят из предметов, для некоторых свойств которых мы имеем определённую информацию, однако не полную. Например, мы различаем, что цвет предмета относится к красной части спектра, а не к синей, но не можем определить его точно. Определим ограничение $x \restriction p$ как огрубление, т. е. как такой предмет, информация о котором согласуется с более точной информацией об x. Например, если x имеет красный цвет, то должно быть возможно, чтобы цвет $x \restriction p$ относился к красной части спектра, иначе говоря, неточная информация о $x \restriction p$ не должна исключать возможность красного цвета. Для каждой стрелки $p \to q$ мы можем определить такую стрелку огрубления $F(q) \to F(p)$ так чтобы выполнялись условия на функтор. Мы получим, тем самым, предпучок.

Совместимость двух предметов $x_i \in F(p_i)$ и $x_j \in F(p_j)$ означает, что соответствующая им информация совпадает при огрублении до $p_i \wedge p_j$. Пусть теперь мы имеем семейство совместимых предметов x_i, таких, что $\sum_i p_i = p$ (т. е. кортеж p состоит из максимумов p_i^n по всем i). Предмет, имеющий значения свойств, совпадающие с максимальными значениями каждого свойства для каждого i, будет, во-первых, принадлежать $F(p)$, а, во-вторых, совпадать с x_i при огрублении до p_i. Поскольку такой предмет единственнен, построенный предпучок является пучком.

§ 7.3. Связь всех подходов

Мы имеем два подхода к описанию объекта Бадью — Ω-множества и пучки множеств — а также несколько подходов к описанию его первоначальной теории, такие как гейтингозначные множества и модели Крипке. В этом разделе мы установим между ними связь и выясним, в какой мере возможно говорить о преемственности при переходе от первого ко второму тому «Бытия и события».

Мы видели выше при рассмотрении моделей Крипке (§ 4.2), что $M(\varphi)$ в них выполняет роль истинностного значения. Это позволяет надеяться, что её можно сопоставить с трансценденталью Бадью. Действительно, пусть атомарными будут формулы вида $x = y$ и $x \in y$. Тогда модель Крипке даёт для них истинностную оценку, и мы могли бы считать первую из них эквивалентной функции явления теории объекта Бадью. Трудность, однако, состоит в том, что она окажется определена не на всех элементах объекта. Тем не менее, существует процедура, позволяющая расширить область её определения до необходимых пределов. За недостатком места[1] я не буду её приводить и ограничусь лишь результатом: возможно определить оценку формулы равенства в модели Крипке, удовлетворяющую условиям на функцию **Id**. Пусть оценка принадлежности для $x \in v$ обозначается гейтингозначной функцией $v(x)$. В случае семантики Крипке она равна множеству миров, в которых нам известно о принадлежности x к v. Мы видели на с. 115, что тогда для любого x, y можно расширить атомарные формулы следующим образом:

$$[\![u \in v]\!] = \sum_{y \in \mathrm{dom}\, v} \Big(v(y) \wedge [\![u = y]\!] \Big)$$

$$[\![u = v]\!] = \prod_{x \in \mathrm{dom}\, u} \Big(u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!] \Big) \wedge \prod_{y \in \mathrm{dom}\, v} \Big(v(y) \Rightarrow [\![y \in u]\!] \Big).$$

Здесь $\mathrm{dom}\, v$ и $\mathrm{dom}\, u$ — области определения соответствующих функций, а сами оценки строятся рекурсивно. Далее можно показать, что последнее выражение удовлетворяет условиям на функцию $\mathbf{Id}(u, v)$, и мы можем его с ней отождествить:

$$\mathbf{Id}(u, v) := [\![u = v]\!].$$

При этом сами элементы в модели Крипке можно рассматривать как имена множеств, которые в различных мирах получают различные интерпретации, так что, например, в одних мирах два из них могут быть равны, а в других — нет. Можно также рассматривать их как множества, меняющиеся при переходе от одного мира к другому (см. рис. 4.2 выше). Отображение A_{wu} связывает элементы разных миров, и мы можем рассматривать цепочки связанных таким образом элементов как элементы объекта Бадью. Они играют роль имён изменяющихся множеств. Частичная принадлежность интерпретируется здесь как принадлежность, выполненная в некоторой части возможных миров. Частичное существование соответствует существованию в части возможных миров.

В результате, мы получаем модель, состоящую из частично упорядоченных возможных миров с переходами между ними, соответствующими темпоральному «развитию» мира, появлению новых элементов и установлению истинности новых формул. Эта модель, как мы видим, эквивалентна некоторой гейтингозначной модели теории множеств. Покажем, что от неё мы можем перейти к теории объекта Бадью.

---

[1] См., например, *Bell J. L.* Set Theory. Pp. 20 sqq., а также *Голдблатт Р.* Топосы. С. 272.

От гейтингозначных моделей к теории объекта

Нашей задачей в этом разделе является демонстрация того, что категории гейтингозначных множеств и Ω-множеств эквивалентны в том смысле, что существует взаимнооднозначное (точнее, квази-взаимнооднозначное, но эта деталь нам сейчас не важна) преобразование из одной из них в другую[1]. Для этого нам предварительно нужно построить категорию Ω-множеств, а для этого требуется определить функцию на этих множествах. Сделаем это с помощью вычисления оценки $[\![f(x) = y]\!]$ следующим образом. Функцией из Ω-множества A в Ω-множество B, называется функция $f\colon A \times B \to T$, переводящая пару $\langle x, y\rangle$ в элемент трансцендентали $f(x, y) = [\![f(x) = y]\!]$, так, что:

$$\begin{aligned}
&[\![x = x']\!] \wedge f(x, y) \leqslant f(x', y),\\
&f(x, y) \wedge [\![y = y']\!] \leqslant f(x, y'),\\
&f(x, y) \wedge f(x, y') \leqslant [\![y = y']\!],\\
&[\![x = x]\!] = \bigcup_{y \in B} f(x, y).
\end{aligned}$$

Первые два условия определяют неразличимость элементов при отображении f. Третье соответствует единственности образа согласно обычному определению функции. Последнее утверждение говорит, что каждый элемент множества A имеет образ в множестве B (точнее, каждый элемент из A существует в той мере, в какой он имеет образ в B), что также соответствует обычному определению функции. Можно показать, что Ω-множества вместе с так определёнными на них функциями составляют категорию.

Пусть теперь имеется универсум гейтингозначных множеств V^H. Каждому его элементу u (напомню, что эти элементы являются функциями) сопоставим Ω-множество $\tilde{u} = \big\langle \operatorname{dom} u, \mathbf{Id}_u \big\rangle$, где $\operatorname{dom} u$ — область определения функции u, а $\mathbf{Id}_u(x, y)$ определяется как $[\![x \in u \wedge x = y]\!]$. Каждой стрелке (функции) $f\colon u \to v$ сопоставим стрелку (функцию) $\tilde{f}\colon \tilde{u} \to \tilde{v}$, определяемую как $\tilde{f}(x, y) = [\![f(x) = y]\!]$. Тем самым, топос гейтингозначных множеств преобразуется в топос Ω-множеств, при этом каждому H-множеству будет соответствовать Ω-множество.

Аналогичным образом мы можем построить обратное отображение.[2] Пусть $(A, \mathbf{Id})$ — Ω-значное множество (объект). Для каждого $x \in A$ определим определим функцию с $\operatorname{dom}(\dot{x}) = \{\, \hat{z} \mid z \in A \,\}$ и $\dot{x}(\hat{z}) = \mathbf{Id}(x, z)$. Определим $A^\dagger \in V^H$: $\operatorname{dom}(A^\dagger) = \{\, \dot{x} \mid x \in A \,\}$ и $A^\dagger(\dot{x}) = \mathbf{Id}(x, x)$. $A^\dagger$ будет соответствовать A. Для стрелки $f\colon (A, \mathbf{Id}) \to (A', \mathbf{Id}')$ определим $f^\dagger \in V^H$: $\operatorname{dom}(f^\dagger) = \{\, \langle \dot{x}, \dot{y}\rangle \mid x \in A, y \in A' \,\}$ и $f^\dagger(\langle \dot{x}, \dot{y}\rangle) = f(x, y)$. Можно показать, что тем самым мы получим требуемый функтор из Ω-множеств в гейтингозначные множества.

---

[1] *Bell J. L.* Set Theory. Pp. 179 sqq.

[2] Строго говоря, функтор; подробности и ссылки на литературу можно посмотреть в Ibid.

Таким образом, мы имеем процедуру, позволяющую переходить от гейтингозначных множеств к Ω-множествам (т. е. объектам) и обратно.

Обратимся к нашему основному примеру и построим теперь Ω-множества, соответствующие модели Крипке. Как мы видели выше, рассмотренная как гейтингозначная, модель Крипке имеет в качестве элементов (множеств с частичной принадлежностью) цепочки элементов $x^w \in A_w$, связанных отображением A_{wu} (изменяющиеся множества). Для каждого такого элемента u мы имеем функцию $u(x)$, имеющую значением множество миров, для которых известно, что x принадлежит u (что, как мы видели при построении гейтингозначных моделей, совпадает с $M(x \in u)$ только на области определения u). Согласно предыдущему, мы должны взять в качестве Ω-множества пару $\tilde{u} = \langle \operatorname{dom} u, \mathbf{Id}_u \rangle$, где $\mathbf{Id}_u(x, y) = [\![x \in u \wedge x = y]\!] = M(x \in u) \cap M(x = y)$. Другими словами, функция явления для $\tilde{u}$ равна пересечению множеств миров, в которых один из элементов принадлежит u и равен другому элементу, т. е. в которых u имеет элемент, равный обоим аргументам функции явления. Степень существования $\mathbf{E}_u x = \mathbf{Id}_u(x, x)$ будет равна множеству миров, в которых x присутствует в качестве элемента. Поскольку мы рассматриваем здесь наследственные множества миров, элементы, существующие в мире w, будут существующими в любом мире u, таком, что $w \leqslant u$, — элементы «не исчезают». Таким образом, каждому изменяющемуся множеству модели Крипке будет соответствовать Ω-множество или объект. Мир (объектов) соответствует модели Крипке в целом, а его трансценденталь составляют наследственные множества шкалы Крипке. Хотя Бадью большей частью рассматривает объект отдельно от других объектов, нужно понимать, что они ни в коем случае не изолированы. Как гейтингозначные множества, они являются элементами мира как гейтингозначной модели и как таковые подчиняются аксиомам этого мира (аксиомам топоса). Сами объекты являются (гейтингозначными) элементами других объектов, а их элементы также являются объектами.

Мы имеем, таким образом, альтернативные описания одной и той же структуры. В терминах онтологии и феноменологии Бадью это означает, что дискурс объекта структурно эквивалентен дискурсу гейтингозначных множеств и, следовательно, форсинга. Элементы ситуации (т. е. модели) первого тома «Бытия и события» превращаются в объекты во втором томе, сама же ситуация становится миром. Одновременно меняется интерпретация. Если в первом томе речь шла о возможностях (каждое множество гейтингозначной модели определяло возможное множество, и модели соответствовала совокупность предложений с «вероятностями» их осуществления), то во втором гейтингова алгебра интерпретируется как трансценденталь, которая допускает самое широкое толкование. Если раньше субъект имел дело со спектром возможностей, из которого он выбирал, ориентируясь (не слишком ясным образом) на событие, то теперь он имеет дело с явлением, т. е. с частичной явленностью множеств, и принимает решение, дополняя частичную информацию до полной. Однако, несмотря на эту широту возможного толкования, Бадью остаётся привязан к теории множеств. Онтология множественности остаётся в основании его подхода, несмотря на то, что категории допускают — и в определённой мере провоцируют — совершенно другие онтологические решения. Аркадий Плотницкий, сравнивая понятие топоса у Бадью и Гротендика, демонстрирует, что Бадью использует теорию топосов как логику, не задействуя её онтологические интенции, присутствовавшие у Гротендика. Он пишет:

> Бадью, как кажется, не рассматривает возможность онтологий, отличных от теоретико-множественных, не говоря уже о нематематических. Напротив, теоретико-топосная онтология Гротендика это онтология множества множеств — без единств: это множественность возможных онтологий, каждая из которых может управляться множеством возможных логик. Расширение подобного способа мышления на другие области позволит нам получить огромное разнообразие и богатство соответствующих множеств множеств, которое больше не будет связано не только теоретико-множественной, но вообще математической онтологией, какой бы множественной она ни была.[1]

Согласно Плотницкому, существуют онтологии множества-без-единства, выходящие за пределы теоретико-множественных структур. Но феноменология Бадью это расширенная теория множеств, а явление множества это изменение — постепенное про-явление. Объекты это частично явленные и изменяющиеся в своей явленности множества. Поскольку логика изменяющихся множеств оказывается интуиционистской, появляется место для субъекта и его решения.

Чтобы ближе рассмотреть, каково это место, нам нужно перейти к топосу пучков, которому окажутся эквивалентны два рассмотренных топоса.

Связь пучков с Ω-множествами

Имеется прямая связь между пучками и объектами или полными Ω-множествами[2]. Рассмотрим, каким образом мы можем переходить от одного к другому.

Построим сначала пучок по имеющемуся объекту. Положим для каждого элемента p из T

$$F_A(p) = \{\, x \in A \mid \mathbf{E}x = p \,\}.^3$$

---

[1] *Plotnitsky A.* Experimenting with ontologies : sets, spaces, and topoi with Badiou and Grothendieck // Environment and Planning D: Society and Space. 2012. Vol. 30, issue 2. DOI: `10.1068/d6610`. P. 352.

[2] *Голдблатт Р.* Топосы. С. 402—403 ; *Borceux F.* Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. DOI: `10.1017/CBO9780511525872`. Pp. 156 sq.

[3] Это выражение в точности является трансцендентальным функтором, как он определён в «Логиках миров» (306). Далее (311) Бадью прямо говорит, что это пучок.

Если $p \leqslant q$, то, сопоставляя элементу x элемент $x \upharpoonright p$, получим функцию $F_A(q) \to F_A(p)$, которую возьмём в качестве образа стрелки $p \to q$. Как можно показать, таким способом мы действительно получим пучок.

Это построение можно распространить на любую категорию порядка, нужно лишь определить для неё понятие покрытия. Чтобы не усложнять изложение, я не буду этого делать, вместо этого обратимся к нашему примеру пучка сечений. Тогда в качестве трансцендентали будет выступать совокупность открытых множеств Θ, для которого $p \leqslant q$ соответствует $U \subseteq V$, а стрелка совпадает с $U \hookrightarrow V$. Соответственно, $F_A(U) = \{x \in A \mid \mathrm{E}x = U\}$. Мы можем рассматривать элементы A как функции с областью определения из Θ, причём степень их существования совпадает с областью определения. Тогда $F_A(U)$ состоит из функций или сечений, область определения которых равна U. При этом для каждого x функция $x \upharpoonright U$ будет просто ограничением x как функции на подмножество U. Тогда функция ограничения, переводящая $F_A(V)$ в $F_A(U)$, является ограничением соответствующего набора сечений на подмножество. Совместимость элементов A совпадает с их равенством как функций на пересечении их областей определения. В этом случае функции можно склеить в одну. Равенство или степень идентичности функций задаётся множеством U, на котором эти функции совпадают.

Для Ω-множества, согласно (7.1), подмножество или феноменальная компонента определяется как функция $\pi(x)$ со значениями в трансцендентали, задающая истинность формулы $[\![x \in \pi]\!]$, и такая, что

$$[\![x \in \pi]\!] \wedge [\![y = x]\!] \leqslant [\![y \in \pi]\!]$$
$$[\![x \in \pi]\!] \leqslant [\![x = x]\!].$$

В нашем случае компонента задаёт для каждого x некоторое открытое подмножество U. Тогда первое тождество означает: $\pi(x) \cap \mathbf{Id}(x, y) \subseteq \pi(y)$, т. е. если x входит в π на области, в которой оно совпадает с y, то последнее также должно входить в π на этой области. Это соответствует условию обычной теории множеств: $x \in \pi \wedge x = y \Rightarrow y \in \pi$.

Второе тождество переписывается как $\pi(x) \subseteq \mathbf{E}x = \operatorname{dom} x$, т. е. локализация x не может превышать область его определения. Поэтому компонента, фактически, состоит из фрагментов сечений, выделяемых функцией π, — область определения каждого сечения x (которое, как мы помним, является функцией $\Theta \to A$) ограничивается до множества $\pi(x)$. Этими фрагментами, как видно, являются $x \upharpoonright \pi(x)$. Таким образом, компонента соответствует набору функций (сечений), полученному путём ограничения каждого из сечений x на компоненту $\pi(x)$. Для синглетона или атома этот набор таков, что $[\![x \in s]\!] \wedge [\![y \in s]\!] \leqslant [\![y = x]\!]$. В нашем случае это означает: $s(x) \cap s(y) \subseteq \mathbf{Id}(x, y)$, т. е. пересечение областей ограничения двух функций не может превышать область, в которой они совпадают. Другими словами, атом это такой набор сечений, что, если два его элемента локализованы на одном и том же множестве, то они на этом множестве совпадают. Это означает, что ни на каком множестве мы не можем иметь более одного значения функций, входящих в s, — даже если гипотетически мы имеем на нём две или более таких функций, их значения на нём фактически совпадают. Это, в частности, означает, что элементы атома можно склеить так, что они оказываются частью единственного сечения. Можно показать, что при этом для каждого покрытия и множества совместимых сечений на нём можно построить единственное сечение, являющееся объединением этих сечений (при этом используется полнота Ω-множества). Таким образом, наш предпучок оказывается пучком сечений. Мы построили пучок по Ω-множеству.

Проделаем теперь обратную процедуру и построим объект или Ω-множество по данному пучку. Прежде чем делать это в общем виде, рассмотрим пучок функций из примера 4 на с. 154.

Пусть у нас есть пучок $F\colon\ \Theta \to \mathcal{S}et$. В качестве множества объекта A_F возьмём параметрическое (дизъюнктивное) объединение сечений $F(U)$ для всех $U \in \Theta$, т. е. $A_F = \{\langle s, U\rangle \mid s \in F(U)\}$. Поскольку сечения представляют собой функции с областью определения U, то элементы A_F представляют собой пары функций вместе с их областями определения. Множество A_F разбивается на подмножества, соответствующие каждому U, и мы будем считать последние степенями существования всех элементов этих подмножеств. Другими словами, для каждого $a = \langle s, U\rangle$ положим $\mathrm{E}a = U$, т. е. интерпретируем степень существования элемента как область определения соответствующего сечения. Затем определим ограничение для произвольного V:

$$a \restriction V = \left\langle F^U_{U\cap V}(s), U \cap V\right\rangle .$$

Так как $F^U_{U\cap V}$ является отображением ограничения, переводящим сечение над U в сечение над $U \cap V$, то $a \restriction V$ является элементом со степенью существования $U \cap V$. Это ограничение функции a на множество $U \cap V$.

Мы могли бы теперь для любых элементов a и b определить равенство следующим образом:

$$[\![a \approx b]\!] = \bigcup \{\, U \in \Theta \mid a \restriction U = b \restriction U \,\}.$$

То есть область равенства двух элементов равна объединению областей, на которых эти элементы (как функции) совпадают. Однако это определение не слишком удобно, т. к. в случаях, когда U не пересекается с областью определения ни a, ни b, элементы всё равно оказываются равными. Другими словами, если они в какой-то области не существуют, то по этому определению считаются в ней равными. В частности, $[\![a \approx a]\!] = I$, что не очень удобно, а главное — и не соответствует определению функции равенства **Id** у Бадью. Поэтому мы определим равенство так, чтобы учитывались только области определения сечений, т. е. степени существования элементов:

$$\mathrm{Id}(a,b) = [\![a \approx b]\!] \cap \mathrm{E}a \cap \mathrm{E}b.$$

В результате, степень равенства элементов равна подмножеству I, на котором соответствующие сечения определены и совпадают — мера равенства элементов есть мера области, на которой эти элементы определены и равны. Можно проверить, что так определённое равенство удовлетворяет аксиомам равенства Id, причём операция $\wedge$ и отношение $\leqslant$ совпадают с пересечением и включением множеств. В частности, мы видим, что в нашем случае степень существования элемента $\mathrm{Id}(a,a) = \mathrm{E}a$ есть просто область его определения как функции (рис. 7.9). Мы получили, таким образом, объект или Ω-множество. Его элементами являются сечения над I, которые в контексте теории Бадью интерпретируются как элементы являющегося объекта.

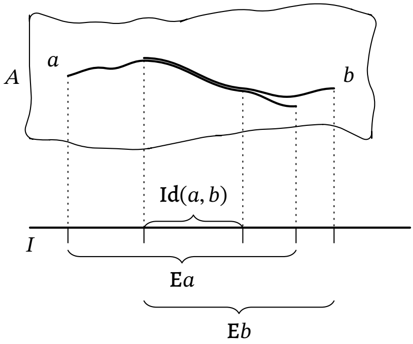

Рис. 7.9. Построение Ω-множества по пучку сечений.

Определим теперь объект по пучку в общем виде. Построение будет совершенно аналогичным.

Пусть у нас есть пучок $F\colon T \to \mathcal{S}et$. Множество объекта A_F определяется как

$$A_F = \{\,\langle x, q\rangle \mid x \in F(q) \text{ и } q \in T\,\}.$$

Множество A_F разбивается на подмножества для каждого q, и мы определяем для каждого $a = \langle x, q\rangle$ степень существования как $\mathrm{E}a = q$. Затем определим ограничение для произвольного p:

$$a \restriction p = \left\langle F^q_{p\wedge q}(x), p \wedge q\right\rangle.$$

$F^q_{p\wedge q}$ является отображением ограничения, переводящим сечение над q в сечение над $p \wedge q$, поэтому $a \restriction p$ является элементом со степенью существования $p \wedge q$. Для определения равенства мы сначала определяем:

$$[\![a \approx b]\!] = \sum \{\, p \in T \mid a \restriction p = b \restriction p \,\}.$$

А затем:

$$\mathrm{Id}(a,b) = [\![a \approx b]\!] \wedge \mathrm{E}a \wedge \mathrm{E}b. \tag{7.2}$$

Можно проверить, что так определённое равенство удовлетворяет требуемым аксиомам и мы получили, таким образом, объект или Ω-множество.

Итак мы видим, каким образом мы можем, имея пучок, построить по нему объект, а имея объект — построить по нему пучок. Общий результат состоит в том, что категория пучков над T оказывается эквивалентной категории Ω-множеств с алгеброй истинностных значений T[1]. Поэтому мы можем переносить утверждения и конструкции из одного языка в другой. Рассмотрим, например, атом объекта $\alpha(x)$. Для каждого элемента объекта его ограничение $x \upharpoonright \alpha(x)$ также будет элементом, «фрагментом, принадлежащим этому атому» (поскольку $\alpha(x)$ это «степень принадлежности атому»). Для двух таких элементов ограничение на общую степень $\alpha(x) \wedge \alpha(y)$ будет удовлетворять неравенству **α2**:

$$\alpha(x) \wedge \alpha(y) \leqslant \mathbf{Id}(x, y).$$

Это, в свою очередь, означает, что они будут равны на этом пересечении и, следовательно, совместимы. Таким образом, рассматривая атом с точки зрения пучка, мы можем сказать, что «фрагменты», входящие в атом, попарно совместимы, и поэтому все они могут быть «склеены» в один элемент, причём единственным образом. По этой причине, атом можно рассматривать как набор таких фрагментов каждого элемента объекта, которые могут быть объединены в единственный элемент. Кратко говоря, атомом является любое семейство совместимых фрагментов.

Для пучка сечений это означает, что для любого его синглетона существует такое сечение с областью определения I (т. е. полным множеством или максимально существующее), что сечения, составляющие синглетон будут его ограничениями или фрагментами. Для пучка сечений это оказывается верным автоматически. Можно также показать[2], что это верно для любого пучка, т. е. для предпучка с выполненным условием склеивания. Таким образом, это последнее условие эквивалентно постулату материализма.

Только что сказанное позволяет утверждать, что теория объекта Бадью может быть построена, начиная с понятия пучка[3]. Для этого нужно определить предпучок как множество, с определёнными на нём двумя функциями $\upharpoonright : A \times T \to A$ и $E : A \to T$, определить совместимость, ограничение и объединение и наложить ограничение вида «для каждого подмножества попарно совместимых элементов существует их единственное объединение». Этого достаточно, чтобы построить пучок, который по описанной процедуре можно преобразовать в полное Ω-множество. Таким способом можно было бы строить теорию объекта Бадью, начиная с двух понятий — локализации и существования. Например, для обычных функций два указанных понятия естественно интерпретируются как ограничение и область определения. Поэтому любое множество таких функций (при соблюдении перечисленных условий) будет объектом в смысле Бадью.

---

[1] См., например, *Borceux F.* Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. DOI: `10.1017/CBO9780511525872`. P. 162.

[2] *Голдблатт Р.* Топосы. С. 403, упр. 14.

[3] Ср. Там же. С. 403—404.

В результате, язык пучков оказывается эквивалентным языку Ω-множеств, и его также можно использовать для описания объекта Бадью. Фактически, он сам использует их оба, хотя основным в «Логиках миров» выступает последний.

Примеры объектов

Пример 7. (Растущее множество) Построим объект по пучку из примера 3. Если мы интерпретируем трансценденталь как упорядоченные стадии роста некоторого множества, то элементом $\langle x, q\rangle$ объекта A можно считать состояние этого множества на стадии q. При этом сама стадия будет иметь смысл степени существования множества, его «времени жизни» (причём время здесь нелинейно). Ограничением множества на p будет тогда его предыдущее состояние — множество на стадии p. Степень равенства двух состояний равна максимальной стадии, до которой «траектории» роста, имеющие результатом эти состояния, совпадают. Два состояния совместимы, если их расширение может привести к одному и тому же состоянию. Соответственно, всякий набор совместимых состояний можно расширить, получив наименьшее состояние, до которого эти множества могут дорасти одновременно. Подмножество, как мы видели, «вырезает» из каждого состояния его ограничение на некоторую степень. В нашем случае оно сопоставляет каждому состоянию одну из его предыдущих стадий. Соответственно, атомом является функция, которая «вырезает» таким способом семейство совместимых состояний, т. е. семейство фрагментов, которые в результате роста могут прийти к одному и тому же состоянию.

Мы интерпретировали описанный объект как набор стадий роста одного множества, однако Бадью в некоторых из своих примеров интерпретирует его как набор нескольких элементов, каждый из которых находится на своей стадии. Строго говоря, это не совсем верно, и мы, скорее, должны говорить в этом случае о нескольких объектах. Однако, поскольку они одинаковы (а с категорной точки зрения тождественны), т. е. имеют одну и ту же функцию **Id**, то последнюю можно использовать для сравнения не только состояний одного объекта, но и различных объектов, находящихся на своих стадиях роста.

Пример 8. (Значения свойств) Построим объект для пучка из примера 5. Элементом $\langle x, U\rangle$ объекта является набор свойств U вместе со значением каждого из этих свойств. Будем интерпретировать его как состояние знания о некотором предмете, а сам объект — как расширяющееся знание. Степенью существования $\mathbf{E}a$ является тогда полное множество свойств, которые нам уже известны о предмете, а ограничением — знание о некоторой части этих свойств. Равенством двух состояний знания будет множество свойств, которые в этих состояниях совпадают. При этом само значение свойства не имеет значения, важен лишь факт совпадения. Если, например, два предмета совпадают по цвету, то цвет входит в множество, измеряющее степень их совпадения вне зависимости от того, каким именно цветом они обладают. Как и в предыдущем случае, два состояния знания совместимы, если могут быть расширены до одного и того же состояния, а атом есть функция, выделяющая набор совместимых состояний. Минимальное существование означает, что элемент не обладает ни одним из свойств трансцендентали, что говорит не о том, что он не существует, а лишь о том, что он не является в данном мире. Если, например, трансценденталь содержит лишь чувственные качества, то нечувственные предметы (такие как мысли, понятия и т. д.) не будут являться в соответствующем мире, их степень существования будет равна пустому множеству (минимуму для данной трансцендентали). Атомом, таким образом, не будет компонента, состоящая только из одного элемента, как можно было бы предположить. Он будет таковым, только если степень существования этого элемента равна максимальной, т. е. если он обладает всеми свойствами данного мира (неважно, с какими значениями). Но атом может также состоять из нескольких состояний, таких, что либо их набор свойств не пересекается, либо значения свойств на этом пересечении равны.

Пример 9. (Картина Робера) Построим объект по пучку из примера 6. Он также будет расширенной версией предыдущего примера. Множество объекта будет равно

$$A_F = \{\, \langle x, q \rangle \mid x \in F(q) \text{ и } q \in T \,\}.$$

При этом для каждого $a = \langle x, q \rangle$ его степень существования $\mathbf{E}a = q$ будет описывать то, насколько точно мы знаем каждое из его свойств. Ограничение $a \restriction p$ для такого элемента будет огрублением на степень $p \wedge q$, т. е. равно $\langle x \restriction p \wedge q, p \wedge q \rangle$. Соответственно, для двух элементов их степень идентичности будет равна максимальной степени, при огрублении до которой они всё ещё совпадают. Другими словами, на этой степени сечения ещё совпадают, но при уточнении, превышающем её, начинают различаться. При огрублении до минимальной степени все элементы совпадают, поскольку значения их свойств становятся полностью неопределёнными. При повышении степени они начинают различаться после какого-то этапа, и тогда этот последний является степенью их идентичности **Id**.

В результате, мы построили объект для данного примера. Его элементами является информация (частичная или нет) о значениях свойств, которые мы можем приписывать колоннам на картине Робера. Фактически, элемент можно рассматривать как набор степеней явления каждого свойства вместе с конкретными значением этих свойств. Как и в общем случае, атом это набор фрагментов, которые можно «склеить» в одно сечение с максимальной для них степенью явления.

Степенью существования $\mathbf{E}a$ элемента объекта a служит кортеж, состоящий из степеней явления каждого свойства — показатель того, насколько хорошо мы его знаем (или — если быть ближе к феноменологии Бадью — насколько он явлен в мире). Ограничением элемента служит элемент с теми же самыми значениями свойств (теми же цветом, размером и пр.), но с меньшей (либо равной) степенью их явления. Другими словами, ограничение элемента это уменьшение степени его явления при сохранении значений всех свойств. Степенью равенства элементов служит кортеж, элементы которого равны максимальным степеням явления для свойств, значения которых совпадают для этих элементов. Действительно, определение равенства (7.2) выглядит теперь следующим образом:

$$[\![a = b]\!] = \sum \{\, p \mid a \restriction p = b \restriction p \,\} \wedge \mathrm{E}a \wedge \mathrm{E}b.$$

При этом сумма здесь означает кортеж, в котором элементами являются максимальные степени явления, на которых свойства a и b совпадают.

Модели Крипке на языке теории пучков

Рассмотрим теперь как связаны модели Крипке с пучками. Описать модели Крипке на языке пучков позволяет нам эквивалентность Ω-множеств и пучков. Мы видели связь моделей Крипке с гейтингозначными моделями и Ω-множествами. Теперь мы можем описать их на языке пучков.

Итак, мы уже построили Ω-множества, соответствующее модели Крипке. Ограничимся одним из них и обозначим его, как обычно, (A, Id). В качестве трансцендентали у нас выступает совокупность наследственных подмножеств W^+ множества миров W. Степень существования элемента $\mathrm{E}x$ есть наследственное множество миров, в которых этот элемент существует. Аналогично предыдущему, для каждого элемента $U \in W^+$ определим

$$F_K(U) = \{\, x \in A \mid \mathrm{E}x = U \,\}.$$

Другими словами, сечение на наследственном множестве U равно множеству элементов, существующих в точности в мирах U. Оно представляет собой «фрагмент» изменяющегося множества, т. е. его «историю», соответствующую множеству миров U. Этот фрагмент состоит из элементов x^w различных множеств A_w, связанных отображением A_{wu}. Атомом или синглетоном является совокупность сечений, которые могут быть склеены в одно изменяющееся множество или в его фрагмент. Другими словами, в разных мирах мы имеем различную разрозненную информацию о принадлежности элементов объекту. Они соответствуют знанию в различные моменты времени. Атом представляет собой набор фрагментов знания о принадлежности, которые могут быть склеены в единственное изменяющееся множество. Эта склейка, вообще говоря, может быть сделана разными способами, но постулат материализма гарантирует, что каждой такой склейке соответствует «реальное» изменяющееся множество. Таким образом, частичное знание в модели Крипке оказывается знанием о реально существующих множествах, меняющих свой состав. Однако это реальное существование не следует понимать как какого-либо рода «предшествование» онтологии феноменологии. «Реальное» существование в модели Крипке означает существование в возможности, поскольку она имеет дело с возможными мирами. Элементы модели Крипке, существование которых гарантируется постулатом материализма, сами являются элементами возможных миров.

Пучок для первоначального подхода Бадью

Рассмотрим в качестве заключения более сложный пример, позволяющий установить связь теории объекта Бадью, с одной стороны, с его первоначальным подходом, основанном на форсинге, а с другой — с интуиционистской логикой.

Возьмём частично упорядоченное множество $\mathbb{P}$ и определим для него наследственное подмножество как множество, которое вместе со всяким своим элементом содержит все, превышающие его. Множество наследственных подмножеств $\mathbb{P}^+$ будет гейтинговой алгеброй (а также задавать топологию на $\mathbb{P}$). Этой алгебре соответствует категория $\mathcal{P}^+$, для которой аналогично примеру 4 на с. 154 мы можем построить категорию пучков вида $F\colon\ \mathcal{P}^+ \to \mathcal{S}et$. Для такого пучка определим модель Крипке как функтор $F^* :\ \mathcal{P} \to \mathcal{S}et$. Для этого сопоставим каждому элементу $\mathbb{P}$ множество $F^*_p = F(p^+)$, где p^+ — элемент $\mathcal{P}^+$. Если $p \leqslant q$, то $q^+ \subseteq p^+$, и в качестве отображения $F^*_{pq} :\ F_p \to F_q$ можно взять образ включения $q^+ \hookrightarrow p^+$ для контравариантного функтора F, т. е. $F^*_{pq} = F(p^+) \to F(q^+)$. Мы построили, таким образом, модель Крипке, эквивалентную пучку $\mathcal{P}^+ \to \mathcal{S}et$. Фактически, верно более общее утверждение[1]: имеется точное соответствие между категорией функторов $\mathcal{S}et^{\mathcal{P}} :\ \mathcal{P} \to \mathcal{S}et$ и категорией пучков $\mathcal{S}h(\mathcal{P})$. Другими словами, на частично упорядоченном множестве $\mathbb{P}$ можно построить либо модель Крипке, в которой $\mathbb{P}$ служит шкалой (множеством возможных миров), либо эквивалентный ему пучок с локалью $\mathbb{P}^+$. В традиционной интерпретации моделей Крипке шкала $\mathbb{P}$ представляет собой множество возможных миров, упорядоченное отношением достижимости. Пучок $F\colon\ \mathcal{P}^+ \to \mathcal{S}et$ состоит из функций, каждая из которых переводит степени p в элементы сечений множества $F(p^+)$. Таким образом, каждое сечение представляет собой функцию с областью определения p^+, т. е. множеством таких q, что $p \leqslant q$. Если понимать достижимость как темпоральное отношение, то сечения будут представлять собой возможную историю одного из элементов, начинающуюся с p, а $F(p^+)$ — множество возможных историй. Ограничение сечения на q будет частью этой истории, начинающейся с мира q. Поэтому для пучка F^* (собственно, модели Крипке) переход по стрелке $p \to q$ будет означать «сужение» истории в смысле перехода вперёд по времени и реализации тех или иных возможностей. Две истории совместимы, если они совпадают на общей части их области определения, т. е. на общих для них мирах. Соответственно, склейкой семейства

---

[1] *Голдблатт Р.* Топосы. С. 378.

историй будет история, совпадающая с каждой из них на общих им мирах, причём условие склейки гарантирует, что такая история существует и единственна.

Рассмотрим частный случай. Пусть сечения соответствуют множествам, причём отображение ограничения переводит множества в их расширения, т. е. при $p \leqslant q$ (или $q^+ \subseteq p^+$) будет верно $x \subseteq x \restriction q$. Каждая история тогда будет соответствовать расширению некоторого множества, и мы получим модель Крипке в смысле предыдущего определения. Для элементов x_i и x_j двух миров w_i и w_j условие совместимости означает, что при переходе к общему миру $w_i^+ \wedge w_j^+$ «выше» по шкале времени они могут расширится до одного и того же множества. Тогда для мира $w = \sum w_i$ и семейства совместимых элементов x_i условие склейки означает, что существует элемент $x \in w$, такой, что его расширение в каждом из миров w_i совпадает с соответствующим x_i. Другими словами, совместимые элементы x_i являются возможными расширениями единственного элемента x. Крипке показал[1], что с помощью описанной модели можно описать как интуиционистскую логику, так и метод форсинга Коэна. Таким образом, этот метод, а вместе с ним и вся техника, развитая Бадью, может быть описана в терминах пучков на трансцендентали $\mathcal{P}^+$. Это даёт нам связь между поздней теорией объекта Бадью и его ранним подходом.

* * *

Мы видим в результате, что как первоначальный подход Бадью, так и его позднейшая теория объекта схватывают сходную структуру, которую можно обозначить как структуру становящихся множеств.

Дополнительная литература

Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / под ред. Д. А. Бочвара ; пер. с англ. В. Н. Гришина, В. В. Шокурова. М. : Мир, 1983. 488 с.

Bell J. L. Set Theory : Boolean-Valued Models and Independence Proofs. 3rd ed. Clarendon Press, 2005. 216 pp. (Oxford Logic Guides ; 47).

Borceux F. Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. 522 pp. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications ; 52). DOI: `10.1017/CBO9780511525872`.

---

[1] *Kripke S.* Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I.

8

Обновлённая теория субъекта

§ 8.1. Теория изменений

Теории изменений посвящена 5-я книга «Логик миров». Она не относится к онтологии, поскольку бытие как чистая множественность неизменно (378). Однако она не относится и к феноменологии: на феноменальном уровне мы встречаемся не с настоящим изменением, а лишь с тем, что Бадью называет модификациями. Разнообразные различия, в том числе темпоральные, уже содержатся в феномене: «феномен в своей феноменальности объединяет вариации, которые его конституируют во времени, так же как различия шкалы, расслаивающей его пространство» (379). Модификации феномена и составляют его явление в мире. Это «внутренние движения явления», и «мир есть множество этих модификаций» (379). Мы видели это в случае модели Крипке, в которой темпоральные модификации уже содержатся в ней самой. В конечном итоге, Бадью определяет: «Мы назовём „модификацией“ упорядоченное явление вариаций интенсивности, которые трансценденталь делает возможными в мире, в котором она служит трансценденталью» (379). Модификация, таким образом, это не изменение. В результате, для того, чтобы имело место изменение, должно быть что-то, выходящее за пределы как онтологии, так и феноменологии (или логики), т. е. нечто, не согласующееся ни с аксиомами теории множеств, ни с логикой конституирования объекта — ни с бытием, ни с явлением. Бадью использует здесь то же решение, что и в «Бытии и событии» — обращается к множеству, принадлежащему самому себе. Он описывает это как появление сущего-множества «на поверхности» объективности, смесь чистого бытия и существования:

> Для этого достаточно, чтобы множество претендовало на явление, поскольку оно ссылается на само себя, на свою собственную трансцендентальную

> индексацию. Короче говоря, достаточно, чтобы множество оказалось играющим двойную роль в мире, в котором оно является. Во-первых, оно должно быть объективировано посредством трансцендентальной индексации своих элементов. Во-вторых, оно должно объективировать (себя), фигурируя среди своих собственных элементов и будучи тем самым само пойманным в трансцендентальную индексацию, опорой которой оно служит. Внутримирная объективация производит с такой множественностью синтез между объективирующим (множественная опора и референт феноменальности) и объективированным (принадлежащим явлению). (380)

Бадью называет парадоксальное сущее, в котором имеет место такое явление, «местом» (фр., site). Таким образом, место есть чистое множество, принадлежащее самому себе, и являющееся на уровне объективности как объект, являющийся в качестве собственного элемента, т. е. индексированный внутри самого себя: «В том, что касается его чистого бытия, место есть просто многое, которому случилось быть элементом самого себя» (386). Эта схема, как подчёркивает Бадью, является новой по сравнению с первым томом «Бытия и события». Напомню, каким образом Бадью характеризует эту новизну:

> В самом деле, в то время, не имея в своём распоряжении никакой теории бытия-здесь, я думал, что возможна чисто онтологическая характеристика события. Внимательные читатели (а именно, Десанти, Делёз, Нанси и Лиотар) быстро обратили моё внимание, что я ограничил своё онтологическое определение «того-что-наступает» сверху и снизу. Снизу, полагая существование места события, которого требует всякое событие и формальную структуру которого я с большим трудом описал. Сверху, настаивая, что всякое событие получает имя. Можно, следовательно, сказать, что на самом деле имелась, с одной стороны, «внутримирная» структура события (его место, обращённое к пустоте всякой ситуации), а с другой стороны, менее ясная трансцендентальная структура (имя, присвоенное анонимным субъектом). Мы увидим, что теперь я способен полностью отождествить «место» и «множество события» — избегая тем самым банальные апории диалектики структуры и истории — и минимизировать обращение к таинственному именованию. Более того, вместо жёсткой оппозиции ситуации и события у меня теперь имеются нюансы трансформации, начиная с модификации мобильного-немобильного и заканчивая событием в собственном смысле, между которымы имеется нейтральностью факта. (381)

Мы видим, что, по мысли Бадью, феноменология позволяет разрешить проблему экспликации множества, принадлежащего самому себе. Вспомним (§ 5.1), что в «Бытии и событии» местом события называлось множество ситуации, такое, что никакой его элемент не принадлежит ситуации. Оно полностью сингулярно или а-нормально. На уровне чистой множественности таким множеством может быть только пустое, поэтому Бадью говорит, что место находится «на грани/краю пустоты» (au bord du vide). Событие состоит из элементов места и самого себя. Его присутствие в ситуации, как мы видели, проблематично, и Бадью описывает его, обращаясь к процедуре именования. Теперь же это присутствие может быть описано, и наша первая задача состоит в том, чтобы понять, как это происходит.

§ 8.2. Математика изменения

Как мы видели, модификацией называются вариации интенсивности или явления, относящиеся к элементам одного и того же объекта. Другими словами, модификации это значения функции $\mathbf{Id}$ для объекта $(A, \mathbf{Id})$. Модификации не требуют наличия места, они уже содержатся в описании объекта. Например, колонны на картине Юбера Робера различаются соответственно их трансцендентальной индексации, но все их возможные модификации уже вписаны в эту индексацию и тем самым уже содержатся в определении объекта. Это приводит Бадью к отождествлению: модификация есть объективация (413).

Напротив, подлинное изменение приводит к непредвиденному нарушению в порядке явления, вызванному сущим, которое оно локализует (412). Поскольку появление этого сущего противоречит онтологии, Бадью вынужден изобрести особый способ этого появления. Он состоит в том, что место возникает и сразу исчезает, оставляя после себя последствия, в ориентации на которые и выстраивается субъект. Логика места, говорит Бадью, состоит в организации интенсивностей вокруг этого исчезнувшего места (391). Если объект есть место, т. е. верно, что $A \in A$, то объект сам случается или прибывает (il arrive[1]) в своё собственное референциальное поле. Объект является, чтобы сразу же исчезнуть, но при этом оставляет некоторый след. Вопрос для Бадью состоит в том, какую степень явления приобретает A после такого прибытия, или точнее, какова степень существования $\mathbf{E}A = \mathbf{Id}(A, A)$ — какова степень существования самого места. Бадью различает здесь два случая.

1. Эта степень существования равна некоторому $p \neq \top$, т. е. меньшему максимума. В этом случае место называется *фактом*.
2. Степень существования равна максимуму: $\mathbf{Id}(A, A) = \top$. В этом случае место называется *сингулярностью* или *единичностью* (singularité).

Этого, однако, недостаточно для характеристики места, дополнительно требуется некая характеристика влияния события. Для этого Бадью вводит понятие реального или абсолютного влияния. Влияние (dépendance) вообще определяется как импликация гейтинговой алгебры. Соответственно, элемент

---

[1] Это *il arrive* (случается, происходит) отличается от *être* (быть), поскольку место исключено из онтологии.

влияет на другой элемент реально или абсолютно, если степень импликации от одного к другому максимальна:

$$x \text{ влияет абсолютно на } y := [(\mathbf{E}x \Rightarrow \mathbf{E}y) = \top].$$

В случае факта, когда $\mathbf{E}A = p$, A реально влияет только на элементы, степень существования которых больше p, поскольку только тогда выполняется равенство $(\mathbf{E}A \Rightarrow \mathbf{E}x) = \top$. В случае сингулярности мы имеем ещё более ограниченное влияние, т. к. она реально влияет лишь на элементы с максимальной степенью принадлежности. Такую сингулярность Бадью называет слабой. Нам же требуется сильная сингулярность, т. е. реальное влияние на элементы со всеми степенями, вплоть до минимальной. Именно такую сингулярность Бадью называет событием:

> Для данного объекта $(A, \mathbf{Id})$ *событием* называется появление/исчезновение места A, если это место представляет собой сингулярность, т. е. $\mathbf{E}A = \top$, такую, что она реально влияет на собственного несуществующего объекта, т. е. $(\mathbf{E}A \Rightarrow \mathbf{E}\varnothing_A) = \top$. (416)

Но последнее равенство может быть выполнено лишь при условии $\mathbf{E}\varnothing_A = \top$. Это означает, что событие переводит несуществующего объекта в максимально существующего («кто был ничем, тот станет всем», цитирует Бадью), это «экзистенциальная абсолютизация несуществующего» (416).

В результате, мы имеем Табл. 8.1 классификации изменений (417).

Таблица 8.1. Классификация изменений

Изменение [для объекта $(A, \mathbf{Id})$ в мире $\mathbf{m}$]	A — место ? ($A \in A$)	$\mathbf{E}A = ?$	$\mathbf{E}A \Rightarrow \mathbf{E}\varnothing_A = ?$ ($\mathbf{E}\varnothing_A = \bot$)
Модификация	Нет	Нет оценки $\mathbf{E}A$	Не имеет степени
Факт	Да	$\mathbf{E}A = p$ ($p < \top$)	$\mathbf{E}A \Rightarrow \mathbf{E}\varnothing_A = \neg p$ (т. к. $p \Rightarrow \bot = \neg p$)
Слабая сингулярность	Да	$\mathbf{E}A = \top$	$\mathbf{E}A \Rightarrow \mathbf{E}\varnothing_A = \bot$ (т. к. $\top \Rightarrow \bot = \neg\top = \bot$)
Сильная сингулярность	Да	$\mathbf{E}A = \top$	$\mathbf{E}A \Rightarrow \mathbf{E}\varnothing_A = \top$ (подрыв правила) $(\mathbf{E}\varnothing_A = \bot) \rightarrow (\mathbf{E}\varnothing_A = \top)$

Нас интересует здесь, в основном, последняя строка. Событие с сильной сингулярностью состоит в переходе несуществующего (элемента с минимальной степенью явления) в максимально существующего (полностью явленный элемент). Такой переход, разумеется, не может оставить прежней трансцендентальную организацию мира. Например, как можно показать, в объекте всегда имеется один и только один несуществующий. Поэтому переход несуществующего в максимально существующий означает, что некоторый другой элемент занимает его место, принимает минимальную степень существования (умирает, как характеризует это Бадью). А это, в свою очередь, значит, что перестраивается функция явления **Id** данного объекта, в частности, степени идентичности всех элементов с тем, что стал теперь несуществующим, становятся минимальными.

В этом описании важно подчеркнуть следующий момент. Изменение степени явления несуществующего само по себе обладает трансформирующей силой, само по себе приводит к перестройке трансцендентальной организации. Мы видим, что, как и в первом томе «Бытия и события» событие опять играет здесь скорее вспомогательную роль. Она состоит в том, что переводит несуществующего в абсолютно существующего, но остаётся неясным, почему для этого мы должны обращаться к его самопринадлежности. Если же учесть, что тезис о выходе рефлексивного множества за пределы онтологии сам по себе является проблематичным, теория события Бадью становится ещё более спорной. Тем более, что, как и раньше, механизм влияния этой самопринадлежности на элементы места, на повышение степени явленности несуществующего и пр. остаётся непрояснённым. Всё это приводит к тому, что, как и в первоначальном подходе Бадью, теория субъекта оказывается независимой от теории события — настолько, что первая может быть развита без ссылки на вторую.

Рассмотрим далее, как это происходит.

§ 8.3. Точки

Понятие точки обобщает и трансформирует понятие решения и форсинга из первого тома «Бытия и события». Точка формализует действие решения и определяется как отображение трансцендентали мира T в бинарную трансценденталь T_0. При этом, во-первых, частичная информация о принадлежности, выраженная в степенях трансцендентали, превращается в определённое решение о принадлежности, определённое «да» или «нет». Во-вторых, и Бадью на это указывает, это отображение, фактически, переводит явление в бытие или феноменологию в онтологию, поскольку T_0 является трансценденталью онтологии. Искомое отображение должно сохранять основные операции и отношения, т. е. быть гомоморфизмом гейтинговых алгебр. Для этого гомоморфизм h должен удовлетворять следующим условиям:

$$h(p \wedge q) = h(p) \wedge h(q)$$
$$h(p \vee q) = h(p) \vee h(q)$$
$$h(\neg p) = \neg h(p)$$
$$h(p \Rightarrow q) = h(p) \Rightarrow h(q).$$

Здесь слева и справа стоят операции и константы исходной и результирующей трансцендентали, соответственно. Не все из этих соотношений независимы, некоторые выводятся из остальных, поэтому Бадью, в частности, определяет нужный гомоморфизм двумя равенствами:

$$h(p \wedge q) = h(p) \wedge h(q)$$
$$h\left(\sum B\right) = \sum \{\, h(p) \mid p \in B \,\}.$$

Здесь слева и справа стоят операции в трансцендентали T и T_0, соответственно.

Кроме этого, отображение должно быть сюръективным, т. е. каждый элемент T_0 должен являться образом хотя бы одного элемента T. С точки зрения решения это означает, что исключается ситуация, при которой все значения T «схлопываются» в одно значение, и тем самым не происходит их разделения на две группы.

В итоге, *точкой* называется сюръективный гомоморфизм T на T_0 (напомню, что сюръективный гомоморфизм называют также эпиморфизмом). Можно показать, что такое отображение сохраняет порядок, а также отображает минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный. Нетрудно видеть, что точка является фильтром. Фактически, верно более общее утверждение для решёток[1]: если h — гомоморфизм решётки T в решётку T' и F — фильтр в решётке T', то $h^{-1}(F)$ является фильтром в T, если оно не пусто. Мы имеем здесь частный случай этого утверждения, когда F совпадает с 1.

Пусть теперь $\pi(T)$ — множество точек трансцендентали T. Определим его подмножество P_p следующим образом:

$$P_p = \{\, \varphi \mid \varphi \in \pi(T) \text{ и } \varphi(p) = 1 \,\}.$$

Бадью называет его позитивацией p (positivation de p). Далее Бадью демонстрирует, что точки трансцендентали образуют топологическое пространство. Поскольку он определяет топологию через внутренность, то требуется определить последнюю. В качестве внутренности A возьмём объединение всех позитиваций, включённых в A. Формально (464):

$$\mathbf{Int}(A) = \bigcup \{\, P_p \mid P_p \subseteq A \,\}.$$

---

[1] *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. С. 58—59.

Можно показать, как Бадью делает на следующих страницах, что это определение удовлетворяет аксиомам (4.3).

Как выглядят эти определения при определении топологии через систему открытых подмножеств? *Внутренняя точка* определяется как точка, входящая в множество вместе с какой-то своей окрестностью. Таким образом, для внутренней точки всегда существует открытое множество, которое её содержит. Напротив, для точки на границе нельзя найти такое множество.*Внутренность* всякого множества вообще определяется как множество его внутренних точек. Она также является наибольшим открытым множеством, являющимся его подмножеством, или объединением всех открытых множеств, являющихся его подмножествами. Если мы учтём все эти утверждения, то получим, что определённые Бадью множества P_p составляют семейство открытых множеств: P_p является открытым множеством, соответствующим элементу трансцендентали p. Точку, поскольку она, фактически, является отображением в пару $\{0, 1\}$, можно рассматривать как характеристическую функцию, т. е. как подмножество трансцендентали, т. е. как семейство открытых множеств. Обозначим это семейство через O_φ для некоторой точки φ. Тогда по определению: $\varphi \in P_p$ тттк $p \in O_\varphi$. Таким образом, точка является множеством таких открытых подмножеств, которые содержат данную точку. Это одно из основных свойств фильтра в топологическом пространстве, что согласуется с утверждением выше: точки являются фильтрами.

Наличие точек не является необходимым свойством трансцендентали. Вполне возможны трансцендентали, в которых «недостаточно точек». Бадью квалифицирует мир как инертный (atone), если в нём нет ни одной точки, напряжённый (tendu[1]), если в нём столько же точек, сколько элементов трансцендентали, или как промежуточный.

Например, если мы возьмём в качестве трансцендентали множество-степень некоторого множества, то характеристические функции синглетонов будут точками. В этом случае P_p содержит лишь одну функцию φ, а именно, соответствующую синглетону $\{p\}$: $\varphi(p) = 1$. Топология, в которой открытыми считаются все подмножества некоторого множества, называется дискретной. Можно показать, что топологическое пространство является дискретным тогда и только тогда, когда множество, содержащее лишь одну любую его точку, открыто. Таким образом, пример Бадью напряжённого пространства это пример дискретного топологического пространства. Каждый синглетон в нём является открытым множеством.

Рассмотрим пример трансцендентали, в которой недостаточно точек. Он требует технических деталей, которые представлены в литературе[2], я здесь

---

[1] Бадью также говорит о мире «под напряжением», «en tension» (469).

[2] *Johnstone P. T.* Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium. Vol. 2. Oxford : Clarendon Press, 2002. Pp. 495 sqq.

изложу лишь общую идею.

Рассмотрим сюръективные функции $N \to A$ из множества натуральных чисел в некоторое множество A, т. е. функции, для которых каждый элемент множества A имеет хотя бы один прообраз в множестве N. Множество таких функций можно рассматривать как пространство и определить на нем топологию, открытые множества которой будут представлять частичную информацию о функциях. Они будут упорядочены по «точности» или «полноте» этой информации, и всякая такая информация может бесконечно уточняться (путем добавления пар $\langle n, x\rangle$ к частичной информации о функции). Можно показать, что подобные подмножества составляют топологию, и мы получим структуру, в которой можем попытаться определить точки как предельные сюръективные функции $N \to A$ — пределы некоторого «уточнения». Однако, — и это существенный момент — если множество A несчетно, то сюръективных функций $N \to A$ не существует, т. к. всегда найдется элемент A, не имеющий прообраза. Поэтому в рассмотренном случае мы не будем иметь точек вообще. Дело обстоит так, как будто мы имеем пространство гипотетических функций, открытые множества которого задаются условием их совпадения на соответствующем подмножестве множества N. Хотя сами функции гипотетические — более того, как оказывается, они вообще не существуют — осмысленно говорить об их множествах и даже о порядке на этих множествах. Это оказывается возможным благодаря тому, что в теории фигурируют не сами объекты, а их приближения.

Итак, точка это «бинарная драматизация нюансов явления» (459), «решать это пропускать бесконечность через фильтр Двоицы» (459). Это также означает «проецировать сложную сингулярность явления в простоту бытия, поскольку T_0 есть трансценденталь онтологии» (459). Бадью называет это по-французски «faire le point» — «подводить черту», буквально, «поставить точку». Это «сгущение» Бадью также называет локализацией (464).

Таким образом, будучи фильтром, точка занимает место генерического множества из «Бытия и события». Мы видим, что теория решения переходит, в сущности, в неизменном виде из первого тома во второй. Субъективная процедура переводит частичное существование элементов в максимальное или минимальное, т. е. в $\bot$ или $\top$. Мы имеем, таким образом, два описания субъективного процесса. С одной стороны, он основан на решении субъекта и выборе точки. С другой — он как бы повторяет событие, постепенно переводя несуществующего в максимально существующего. Эти два процесса могут не совпасть: субъективная процедура может оказаться пустой, если не имеет события своим основанием, а событие может оказаться бесплодным, если не найдётся субъективного процесса, направленного на максимизацию соответствующего несуществующего.

Мы видим, в каком смысле второй том является непосредственным продолжением первого: теория решения, по существу, остаётся той же самой и лишь получает иную формулировку. Но мы видим и отличие — уточнённую теорию события. Вместе с оригинальной теорией объекта она позволяет провести классификацию изменений (одним из которых служит событие, см. (413-417)), построить понятие субъективного тела (471-514) и определить различные формы отношения субъекта к событию (512-514).

§ 8.4. Тело

Понятие тела является синтезом логики явления (505) и основным понятием обновлённой теории субъекта: «тело есть особый тип объекта, способного служить опорой для субъективного формализма и, следовательно, конституировать агента возможной истины в мире» (473). Тело есть особый объект, в котором является субъект (475). Мы видели, что событие состоит в появлении в объекте элемента, способного обрести максимальную степень существования, но имеющего лишь минимальную, т. е. несуществующего. Этот объект служит основанием возможности субъективной процедуры, поскольку степень его существования зависит от субъекта, конкретной же инстанцией, осуществляющей субъективную процедуру, является тело[1]. Обратимся к его формальной разработке.

Пусть имеется объект $(A, \mathbf{Id})$, который является событием. Пусть ε — несуществующий, степень существования которого становится максимальной в результате события. Бадью называет его *следом* события. Тело C_ε определяется как множество элементов, инкорпорированных в следствия следа события. Формально, элемент x инкорпорирован в событийное присутствие (présent événementiel), если и только если $\mathbf{Id}(x, \varepsilon) = \mathbf{E}x$. Другими словами, это элементы, идентичность которых следу события является максимальной из возможных, т. е. равна степени их существования. Поскольку указанное равенство есть, фактически, определение отношения порядка $\boldsymbol{<}$, индуцированного трансценденталью на элементах объекта, тело оказывается множеством элементов, меньших следа события в смысле этого отношения: $C_\varepsilon = \{ x \mid x \boldsymbol{<} \varepsilon \}$. Далее оказывается, что элементы тела попарно совместимы, и оно допускает синтез оболочки, причём его результатом является ε, тот самый несуществующий, который получил максимальное существование в событии. Это означает, что тело можно определить как множество элементов, подчинённых ε (в смысле $x \boldsymbol{<} \varepsilon$). Кроме того, поскольку $\mathbf{Id}(\varepsilon, \varepsilon) = \mathbf{E}\varepsilon$, то $\varepsilon \in C_\varepsilon$ и, более того, ε оказывается единственным элементом тела, степень существования которого максимальна (509). Тело, следовательно, является атомом. Событие как бы задаёт цель, то, чем

---

[1] Corps. В контексте философии Бадью его следует, по-видимому, понимать как социальное тело, corps social. К. Меясу называет его также corps-sujet: *Meillassoux Q.* Décision et indécidabilité de l'événement dans *L'Être et l'événement I* et *II* // Autour de *Logiques des mondes d'Alain Badiou*. Paris : Archives Contemporaines, 2011. P. 121-142. Слово означает также «корпус», «главная часть».

призваны стать другие элементы объекта, получив максимальное существование. Тело можно рассматривать как становление ε, как его «части», постепенно собирающиеся в единство.

Получив максимальное существование, след события получает максимальную определённость, его идентичность с другими элементами становится максимально возможной. В исходном же объекте, когда существование ε минимально, его идентичность с любым объектом также минимальна. Это означает, что мы не знаем, каковы его свойства, т. е. не можем также сказать, какие элементы включены в тело события. Это становится ясно лишь по мере становления тела и обретения следом события максимальной степени существования.

Как связано субъект-тело с точками? Будем говорить, что элемент тела x *удостоверяет* (affirme) точку φ, если $\varphi(\mathrm{E}x) = 1$ (отсюда, в частности, следует, что ε удостоверяет все точки). Тогда эффективная или продуктивная (efficace) часть тела C_ε определяется как

$$C_{\varepsilon\varphi} = \{\, x \mid x \in C_\varepsilon,\ x \neq \varepsilon \text{ и } \varphi(x) = 1 \,\}.$$

Поскольку элементы продуктивной части тела оказываются попарно совместимы, она также допускает синтез, который Бадью обозначает как ε_φ при условии, что он не равен ε и называет его *органом* тела C_ε для точки φ. Лишь если тело имеет орган для некоторой точки, мы говорим, что оно *разрабатывает* эту точку (traite ce point). Далее Бадью показывает, что $\varepsilon_\varphi \in C_{\varepsilon\varphi}$, и мы, таким образом, имеем три варианта (512):

1) продуктивная часть пуста, никакой орган не существует, тело не разрабатывает никакую точку,
2) продуктивная часть не пуста, но её синтез ей не принадлежит; тогда можно показать, что этот синтез равен ε; в этом случае точка также не разрабатывается телом,
3) $\varepsilon_\varphi \neq \varepsilon$, орган существует, тело разрабатывает точку.

Эти варианты изображены графически на рис. 8.1 (513).

Таким образом, при условии, что событие совершилось, для того чтобы существовало тело, разрабатывающее некоторую точку (т. е. для того, чтобы существовал субъект, верный этому событию), должны удовлетворяться пять требований (512-514).

1) Трансценденталь мира должна допускать существование точек (т. е. фильтров).
2) В мире должно случиться событие, приводящее к максимальному существованию несуществующего ε.
3) Должно существовать тело C_ε, т. е. элементы, удовлетворяющие условию $\mathrm{Id}(x, \varepsilon) = \mathrm{E}x$.

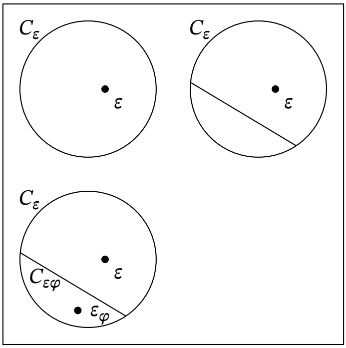

Рис. 8.1. Орган

4) Среди элементов тела должны быть такие, которые решают φ, т. е. $C_{\varepsilon\varphi}$ не должно быть пустым.
5) Оболочка $C_{\varepsilon\varphi}$ должна быть отлична от ε, т. е. в теле должен существовать орган для точки φ, оно имеет дело с этой точкой (ce corps traite ce point).

Эти условия очень жёсткие, поэтому истина редка. Даже если событие произошло и оставило след, условия для разработки его последствий могут не реализоваться, и событие останется бесплодным. Но, несмотря на свою редкость, существование органа всё же возможно.

Такова обновлённая теория субъекта, как она изложена Бадью в заключительных главах «Логик миров». Мы переходим теперь к тому, как выглядит эта теория в более широком математическом контексте.

§ 8.5. Пучки и топология

Прежде всего, обратимся к обобщению теории пучков. Выше мы определяли различные пучки на гейтинговых алгебрах, однако этот подход можно расширить и говорить о более широком классе категорий для построения пучков. Тогда предпучок определяется как функтор $S: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ для любой (малой) категории $\mathcal{C}$. Каждой стрелке $f: U \to V$ этой категории соответствует функция на множествах $S(f): S(V) \to S(U)$ (с обращением стрелок). Она часто называется функцией ограничения. Чтобы превратить предпучок в пучок, нам требуется дополнительная структура в категории $\mathcal{C}$, которая называется покрытием. Я не буду приводить здесь определение покрытия в общем виде[1]. В целом, оно определяется для каждого элемента категории U как такое *покрывающее семейство*

---

[1] См., например, *Johnstone P. T.* Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium. Oxford : Clarendon Press, 2002. Pp. 536 sqq.

морфизмов $p_i : U_i \to U$, которое для каждого $V \to U$ индуцирует покрытие для V, являющееся в некотором смысле ограничением p_i. В частном случае топологического пространства покрытие определяется как совокупность открытых множеств, и упомянутое условие на него означает, что всякое покрытие индуцирует покрытие для *любого* его подмножества, являющееся ограничением p_i на это подмножество, — в этом смысле, множества покрытия покрывают «всё» множество U. В более общем случае гейтинговых алгебр покрытие элемента a можно определить как семейство таких a_i, что $\sum_i a_i = a$.

Покрытие оказывается минимальной структурой, достаточной для определения пучка на основе предпучка. В общем виде, *совместимое семейство элементов* определяется как набор $s_i \in S(U_i)$, такой, что для всех j, k и всех морфизмов $U_j \overset{f}{\leftarrow} K \overset{g}{\rightarrow} U_k$ в $\mathcal{C}$, таких, что $p_j \circ f = p_k \circ g$, мы имеем $S(f)(s_j) = S(g)(s_k)$. Предпучок S является пучком по отношению к покрытию J, если для каждого покрывающего семейства $\{ p_i : U_i \to U \}$ в J и для каждого совместимого семейства элементов $s_i \in S(U_i)$ существует единственный элемент $s \in S(U)$, такой, что $S(p_i)(s) = s_i$ для всех i.

В частном случае пучка сечений над топологическим пространством покрытие определяется как семейство открытых множеств, морфизмы p_i — как включения $U_i \hookrightarrow U$, $S(f)$ является функцией ограничения, и совместимым семейством становится такое семейство, в котором для всякого j, k и подмножества $K \hookrightarrow U_j, K \hookrightarrow U_k$ ограничения на K совпадают. Предпучок сечений является пучком, если для всякого совместимого сечения s_i существует сечение, отграничения которого совпадают с s_i для каждого i.

Во всех этих определениях важно, что пучок может быть определён для широкого класса категорий, для которых можно говорить о покрытиях. В частности, оно определяется для фреймов, являющихся обобщением топологического пространства. *Фрейм*[1] определяется как частично упорядоченное множество, в котором существуют все супремумы (суммы), все конечные инфимумы (произведения) и выполнен бесконечный дистрибутивный закон

$$a \wedge \left(\sum_i b_i \right) = \sum_i (a \wedge b_i) .$$

Иначе говоря, фрейм это дистрибутивная решётка, в которой существуют все бесконечные супремумы. Сравнение с первым определением топологии (4.2) показывает, что семейство открытых подмножеств образует фрейм. Если взять фреймы в качестве объектов, а гомоморфизмы (сохраняющие произвольные супремумы и конечные инфимумы) — в качестве стрелок между ними, то получится категория, которую будем называть $\mathcal{Frm}$. Как нетрудно показать, фреймы

---

[1] Англ., frame. В английских текстах используется тот же термин, который я выше переводил как «шкала» для моделей Крипке.

являются полными гейтинговыми алгебрами, однако морфизмы категории $\mathcal{Frm}$ не обязательно сохраняют операции алгебр Гейтинга, в частности, импликацию. Этим они отличаются от гейтинговой категории $\mathcal{CHey}$, хотя и содержат те же самые объекты. Категория локалей $\mathcal{Loc}$ определяется как дуальная к категории фреймов, т. е. как $\mathcal{Frm}^{\mathrm{op}}$. Это, в частности, означает, что её объектами также являются полные гейтинговы алгебры. Все три категории отличаются лишь морфизмами. Морфизмы категории $\mathcal{CHey}$ удовлетворяют тем же условиям, что и морфизмы категории $\mathcal{Frm}$, но дополнительно сохраняют импликации. Что касается морфизмов категории $\mathcal{Loc}$, то они являются обратными к морфизмам категории $\mathcal{Frm}$. Они обобщают непрерывные отображения топологических пространств. Действительно, рассмотрим в качестве примера некоторое топологическое пространство X. По определению, оно имеет фрейм открытых подмножеств $\mathcal{O}(X)$. Всякая непрерывная функция между топологическими пространствами $f : X \to Y$ индуцирует функцию $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ (допуская некоторую вольность в обозначениях), поскольку (см. § 4.2) при этом каждое открытое подмножество U в $\mathcal{O}(Y)$ имеет прообразом открытое подмножество V в $\mathcal{O}(X)$, равное $f^{-1}(U)$. Эта функция является, фактически, гомоморфизмом фреймов и индуцирует непрерывную функцию между локалями, т. е. морфизм категории $\mathcal{Loc}$. Обратно, элементы $\mathcal{O}(X)$ являются топологией и превращают X в топологическое пространство, а всякая непрерывная функция на локалях индуцирует непрерывную функцию на соответствующих пространствах. Таким образом, объектами категории $\mathcal{Loc}$ являются фреймы $\mathcal{O}(X)$, а её морфизмами — гомоморфизмы фреймов $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. В итоге, морфизмы категорий $\mathcal{Frm}$ и $\mathcal{Loc}$ соответствуют непрерывным функциям между топологическими пространствами[1]. В этом смысле, $\mathcal{Loc}$ и $\mathcal{Frm}$ можно рассматривать как обобщение топологического пространства, обобщение семейства его отрытых множеств. Как видно, это обобщение не требует обращения к понятию точки пространства, поэтому теорию локалей и фреймов называют также бесточечной топологией[2]. Топологическое пространство определяется системой его открытых подмножеств, которое является полной гейтинговой алгеброй. Поэтому, изучая эту систему, мы изучаем топологическое пространство независимо от его точек. Поскольку существуют локали, не берущие происхождение из какого-либо топологического пространства, то локаль рассматривается как обобщение такого пространства. Если локаль можно рассматривать как построенную из

---

[1] Фактически, имеются функторы из $\mathcal{Loc}$ в $\mathcal{Top}$ и из $\mathcal{Top}$ в $\mathcal{Loc}$, хотя это и не означает их эквивалентности см. подробнее: *MacLane S., Moerdijk I.* Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory. New York, Berlin etc. : Springer-Verlag, 1992. 630 pp. IX.2, 3.

[2] См. обзор бесточечной топологии в: *Johnstone P. T.* The Point of Pointless Topology // Bulletin of the American Mathematical Society (New Series). 1983. Jan. Vol. 8, no. 1. Pp. 41–53, а также *Picado J., Pultr A.* Frames and Locales : Topology Without Points. Vol. 28. Basel : Birkhäuser, 2012. 420 pp. DOI: `10.1007/978-3-0348-0154-6`.

топологического пространства, то она называется топологической или пространственной (как мы увидим далее, она «имеет достаточно точек»).

Всё это не означает, конечно, что точки не возникают в такой топологии вообще, но точка в ней является производным, тогда как локаль — основным понятием. Почему точка называется точкой? Ответ состоит в том, что она соответствует точке обобщённого пространства. Точка локали определяется как её элемент в категориальном смысле, т. е. как морфизм из начального элемента категории. Для категории локалей начальной является категория, состоящая из двух элементов — $(0, 1)$ или (Ложь, Истина). Действительно, это минимальное топологическое пространство, оно имеет лишь два открытых подмножества — пустое множество и самого себя. В результате, точкой является непрерывное отображение $1 \to X$ или, в терминах трансценденталей, $T_0 \to T$. В дуальных терминах это соответствует $f^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(1)$ или $T \to T_0$. Именно так определяет точку Бадью. Таким образом, решение, действительно, соответствует выбору точки пространства, построенного на локали. Мы видим, что Бадью не различает категории фреймов и локалей, работая с их элементами, т. е. полными гейтинговыми алгебрами, но не делая специального акцента на морфизмах. Однако само название точки становится понятнее, если мы рассматриваем её в категории локалей, особенно если они сами рассматриваются как обобщённые пространства — точка это точка такого пространства. Однако, рассмотренная в категории фреймов, точка становится более пригодной для теории субъекта Бадью, поскольку морфизм $T \to T_0$ является характеристической функцией и разбивает трансценденталь на два подмножества, что требуется для интерпретации точки как решения.

Понимание топологического пространства как локали имеет свои ограничения. Открытое подмножество сообщает некоторую информацию о своих точках, но её может быть недостаточно. В частности, её может не хватать для существования точек вообще. Как мы видели, локаль может не иметь точек или иметь недостаточно точек, чтобы различить открытые подмножества. Однако с нашей точки зрения локаль интересна тем, что достаточна для определения пучка. Действительно, это определение не ссылается на точки локали, а требует лишь знания открытых подмножеств или, точнее, структуры гейтинговой алгебры. Этой алгебры, т. е. трансцендентали, достаточно для построения пучка.

Рассмотрим теперь, что означают понятия Бадью с точки зрения описанной топологии.

§ 8.6. Топологическая интерпретация теории изменений Бадью

Мы уже видели топологический смысл понятия точки, рассмотрим теперь позитивацию или множество точек. Будем называть *ситусом* (англ., site; обычно используется тот же термин, что Бадью использует для места) категорию, с определённым на ней покрытием. Позитивация определяется Бадью следующим образом:

$$P_p = \{\, \varphi \mid \varphi \in \pi(T) \text{ и } \varphi(p) = 1 \,\},$$

где $\varphi(p)$ — точка, определённая как функция $T \to T_0$. Эти множества удовлетворяют аксиомам системы открытых подмножеств (4.2). Действительно, пусть $X = P_1 = \pi(T)$. Обозначим через $\mathcal{O}(X)$ совокупность P_p для всех $p \in T$. Тогда $\varnothing \in \mathcal{O}(X)$ и $X \in \mathcal{O}(X)$. Кроме того, если некоторое φ_1 принадлежит как P_p, так и P_q, то, поскольку $\varphi_1(p \wedge q) = \varphi_1(p) \wedge \varphi_1(q) = 1$, получаем, что $\varphi_1 \in P_{p\wedge q}$. Это означает, что $P_p \cap P_q = P_{p\wedge q}$, т. е. принадлежит $\mathcal{O}(X)$. Аналогично можно показать, что $P_p \cup P_q = P_{p\vee q}$, т. е. тоже принадлежит $\mathcal{O}(X)$. В результате, поскольку T содержит любые супремумы и конечные инфимумы, семейство P_p представляет собой семейство открытых подмножеств для топологического пространства $\pi(T)$. Фактически, каждое P_p является «точечной реализацией» степени p для трансцендентали, понятой как обобщённое пространство в бесточечной топологии. Задание P_p уже задаёт топологию. Бадью далее определяет внутренность множества как объединение всех его открытых подмножеств:

$$\mathbf{Int}(A) = \bigcup (P_p, \text{ таких, что } P_p \subseteq A).$$

Это соответствует обычному пониманию внутренности в топологии.

В целом, Бадью использует как исходную именно бесточечную топологию. Однако определение существования всё же интуитивно понятнее, если иметь в виду, что элементы трансцендентали представляют собой подмножества. Посмотрим, например, как понятия Бадью интерпретируются для случая пучка сечений. След события ε есть элемент с максимальным существованием, т. е. сечение, определённое на всех степенях трансцендентали. Элемент x инкорпорирован в тело, если $\mathbf{Id}(x, \varepsilon) = \mathbf{E}x$, т. е. если совпадает с ε во всей степени своего существования — иначе говоря, сечение x полностью является частью следа ε. Тело C_ε содержит все такие сечения, что означает, что оно представляет собой «частичное осуществление» ε, все сечения, которые уже полностью совпадают с ε. След выступает как конечная цель субъективной процедуры, а тело — как её (цели) частичная реализация.

Элемент тела x удостоверяет точку φ, если она входит в область его определения как сечения. Продуктивная часть тела $C_{\varepsilon\varphi}$ объединяет такие части тела, которые не равны ε, но удостоверяют точку φ. Его синтез ε_φ совпадает тогда с той частью тела C_ε, которая имеет φ в своей области определения. Другими словами, это такое сечение, которое, не совпадая со следом, является его частью, включающей элемент сечения, зависящий от φ.

Мы видим, что эта теория субъективного тела продолжает тенденции, заложенные в первоначальном подходе Бадью. Она использует язык более лаконичный и лишённый некоторых деталей, не позволяющих видеть важнейшие структуры. Но в целом, мы встречаем здесь ту же схему, что и в моделях Крипке и гейтингозначных моделях. Вместе с тем, математика становится более адекватной описываемой области, и это позволяет Бадью яснее увидеть и описать одну из его основных интуиций: субъект это часть процесса, направленного на реализацию возможности, открытой некоторым событием.

Дополнительная литература

Gerla G. Pointless geometries // Handbook of Incidence Geometry / ed. by F. Buekenhout, W. Kantor. North-Holland, 1994. Pp. 1015–1031. URL: `http://www.dmi.unisa.it/people/gerla/www/Down/point-free.pdf`.

Johnstone P. T. The Point of Pointless Topology // Bulletin of the American Mathematical Society (New Series). 1983. Jan. Vol. 8, no. 1. Pp. 41–53. URL: `http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=682820`.

Picado J., Pultr A. Frames and Locales : Topology Without Points. Vol. 28. Basel : Birkhäuser, 2012. 420 pp. (Frontiers in Mathematics). DOI: `10.1007/978-3-0348-0154-6`.

A

Используемые обозначения

$:=$	«равно по определению»
тттк	«тогда и только тогда, когда» или «если и только если»
$\forall$	для всех
$\exists$	для некоторых
$\wedge$	и, инфимум
$\vee$	или, супремум
$\neg$	отрицание, псевдодополнение
$\Rightarrow$	импликация, относительное псевдодополнение
$a \in A$	a принадлежит A
$A \setminus B$	разность множеств
$A \subseteq B$	A — подмножество B
$A \subset B$	$A \subset B$ и $A \neq B$
$A \hookrightarrow B$	функция включения (подмножество)
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	кортеж длины n
$\{ a \mid \varphi(a) \}$	a, такие, что $\varphi(a)$
$\{ a \in A \mid \varphi(a) \}$	a из множества A, такие, что $\varphi(a)$
$(\forall a \in A)\, \varphi$	сокращение для $\forall a\, (a \in A \Rightarrow \varphi)$
$(\exists a \in A)\, \varphi$	сокращение для $\exists a\, (a \in A \wedge \varphi)$
Y^X	множество всех функций $X \to Y$
$\circ$	композиция функций
$f\|_A$	ограничение функции f на множество A
$\mathcal{P}X$ или $\mathcal{P}(X)$	множество подмножеств множества X

B

Таблица соответствия терминов Бадью математическим терминам

Таблица B.1. Терминология книги «Логики миров»

Термин Бадью	**Математический термин**
Трансценденталь, Transcendantal	Полная алгебра Гейтинга, локаль (locale)
Объект	Ω-значное множество или Ω-множество
Функция явления	Функция равенства
Атом	Синглетон
Зависимость, dépendance, $a \Rightarrow b$	Относительное псевдодополнение (псевдодополнение к a относительно b)
Изнанка, l'envers, $\neg a$	Псевдодополнение (к a)
Мажоранта, Majorante	Верхняя грань
Феноменальная компонента, Composante phénoménale	Подмножество
Несуществующий (элемент)	Элемент минимальной степени
Мир	Топос Гротендика
Объединение, Enveloppe, $\sum$	Наименьшая верхняя грань
Постулат материализма	Условие полноты Ω-множества
Точка	Фильтр
Трансцендентальный функтор	Пучок как функтор

Список литературы

Аристотель. Метафизика / пер. А. В. Кубицкого, сверен М. И. Иткиным // Сочинения в 4-х т. Т. 1 / под ред. В. Ф. Асмуса. М. : Мысль, 1976. С. 64—368.

Бадью А. Апостол Павел. Обоснование универсализма / пер. с фр. О. Головой. М.: Московский философский фонд; СПб.: Университетская книга, 1999.

Биркгоф Г. Теория решёток / пер. с англ. В. Салия. М. : Наука, 1984. 568 с.

Вопенка П. Альтернативная теория множеств : Новый взгляд на бесконечность. Новосибирск : Институт математики, 2004. 612 с.

Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / под ред. Д. А. Бочвара ; пер. с англ. В. Н. Гришина, В. В. Шокурова. М. : Мир, 1983. 488 с.

Доманов О. А. Единое и многое как трансценденталии: Аристотель, Фома и теория множеств // Сибирский философский журнал. Новосибирск, 2016. Т. 14, вып. 4. С. 262—272.

Йех Т. Теория множеств и метод форсинга / под ред. В. Н. Гришина ; пер. с англ. В. И. Фуксона. М. : Мир, 1973.

Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза / пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина. М. : Мир, 1969.

Маклейн С. Категории для работающего математика / пер. с англ., под ред. В. Артамонова. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.

Мальцев А. И. Алгебраические системы. М. : Физматлит, 1970. 392 с. (Современная алгебра).

Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики / пер. с англ. В. А. Янкова. М. : Наука, 1972. 591 с. (Математическая логика и основания математики).

Трубецкой Н. С. Основы фонологии / под ред. С. Кацнельсона ; пер. с нем. А. Холодовича. М. : Аспект Пресс, 2000. 352 с. (Классический учебник).

Фома Аквинский. Сумма теологии. Часть первая. Вопросы 1-64 / под ред. профессора Н. Лобковица и канд. филос. наук А. В. Апполонова ; пер. с лат. А. В. Апполонова. М. : Издатель Савин С. А., 2006. 874 с.

Фреге Г. Исчисление понятий, язык формул чистого мышления, построенный по образцу арифметического // Логика и логическая семантика : Сборник трудов / под ред. З. А. Кузичевой ; пер. с нем. и вступ. ст. Б. В. Бирюкова ; коммент. Б. В. Бирюкова, З. А. Кузичевой ; послесл. Б. В. Бирюкова. М. : Аспект Пресс, 2000. С. 65—142.

Черняков А. Г. Онтология как математика: Гуссерль, Бадью, Плотин // Сущность и слово : Сб. науч. ст. к юбилею проф. Н. В. Мотрошиловой / Отв. ред.: М. А. Солопова, М. Ф. Быкова. М. : Феноменология-герменевтика, 2009. С. 420—441. URL: `http://srph.1gb.ru/text`.

Энгелькинг Р. Общая топология / пер. с англ. М. Я. Антоновского, А. В. Архангельского. М. : Мир, 1986. 752 с.

Aczel P. Non-well-founded sets / with a forew. by J. Barwise. Stanford, CA : Stanford University, Center for the Study of Language, Information, 1988. xx, 137. (CSLI Lecture Notes ; 14).

Aertsen J. A. Medieval Philosophy and the Transcendentals : the Case of Thomas Aquinas. Leiden ; New York ; Köln : Brill, 1996. 468 pp. (Studien und Texte zur Geistesgeschichte des Mittelalters ; Bd. 52).

Aquinas T. De potentia // Quaestiones disputatae. Tomus II / ed. by P. M. Pession. Editio VIII revisa. Taurini, Romae : Marietti, 1949. Google Books: `d7knAQAAIAAJ`.

Aquinas T. De veritate // Quaestiones disputatae. Tomus I. De veritate / ed. by R. Spiazzi. Editio VIII revisa. Taurini, Romae : Marietti, 1949. Google Books: `vrgnAQAAIAAJ`.

Awodey S. Category Theory. Oxford : OUP, 2010. (Oxford Logic Guides). URL: `https://www.mpi-sws.org/~dreyer/courses/catlogic/awodey.pdf`.

Awodey S. A brief introduction to algebraic set theory // The Bulletin of Symbolic Logic. 2008. Vol. 13, no. 3. Pp. 281–298.

Badiou A. L'être et l'événement. P. : Seuil, 1988. 560 p. (Collection « L'Ordre philosophique »).

Badiou A. Logiques des mondes : L'être et l'événement, 2. P. : Seuil, 2006. 638 p. (Collection « L'Ordre philosophique »).

Badiou A. The Event as Trans-Being // Theoretical Writings / ed. and trans. by R. Brassier, A. Toscano. London, New York : Continuum, 2006. Pp. 99–104.

Barwise J., Etchemendy J. The Liar : An Essay on Truth and Circularity. Oxford University Press, USA, 1989. 194 pp.

Barwise J., Moss L. S. Vicious Circles : On the mathematics of non-wellfounded phenomena. Stanford, Calif : CSLI Publications, 1996. 400 pp.

Bell J. L. Set Theory : Boolean-Valued Models and Independence Proofs. 3rd ed. Clarendon Press, 2005. 216 pp. (Oxford Logic Guides ; 47).

Benacerraf P. What Numbers Could Not be // The Philosophical Review. 1965. Jan. Vol. 74, no. 1. Pp. 47–73.

Berg B. van den, Moerdijk I. A Unified Approach to Algebraic Set Theory // Logic Colloquium 2006 / ed. by S. B. Cooper [et al.]. Cambridge University Press, 2009. Pp. 18–37. (Lecture Notes in Logic ; 32).

Bishop E. Foundations of Constructive Analysis. New York : McGraw-Hill, 1967. 382 pp.

Bishop E., Bridges D. Constructive Analysis. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1985. 477 pp. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; 279).

Blass A. The Interaction Between Category Theory and Set Theory // Contemporary Mathematics. 1984. Vol. 30. Pp. 5–29.

Borceux F. Handbook of Categorical Algebra. In 3 vols. Vol. 3. Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994. 522 pp. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications ; 52). DOI: `10.1017/CBO9780511525872`.

Bosteels B. Can Change Be Thought?A Dialogue with Alain Badiou // Alain Badiou : philosophy and its conditions / ed. by G. Riera. Albany : SUNY Press, 2005. Pp. 237–261. (SUNY series, Intersections : Philosophy and Critical Theory).

Bourbaki N. Univers // Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie – 1963–64. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). T. 1 / sous la dir. de M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier. Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1972. P. 185-217. (Lecture notes in mathematics ; 269). URL : `http://library.msri.org/books/sga/sga/4-1/4-1t_185.html`.

Burris S., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. The Millenium Edition. 2012. URL: `https://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html`.

Butz C. Bernays-Gödel type-theory // Journal of Pure and Applied Algebra. 2003. Vol. 178, issue 1. Pp. 1–23. DOI: `10.1016/S0022-4049(02)00259-1`.

Dummett M. What is Mathematics About? // The Seas of Language. Oxford : Clarendon Press, 1996. Pp. 429–445. DOI: `10.1093/0198236212.003.0018`.

Esser O. Forcing with the Anti-Foundation axiom // Mathematical Logic Quarterly. 2012. Feb. Vol. 58, no. 1/2. Pp. 55–62. DOI: `10.1002/malq.201020079`.

Fitting M. Intuitionistic logic, model theory and forcing. Amsterdam, London : North-Holland Pub. Co., 1969. 191 pp. (Studies in logic and the foundations of mathematics).

Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A. Foundations of set theory. 2d rev. ed. Noord-Hollandsche U.M, 1973. (Studies in logic and the foundations of mathematics 67).

Gerla G., Miranda A. Mathematical Features of Whitehead's Pointfree Geometry // Handbook of Whiteheadian Process Thought. In 2 vols. Vol. 2 / ed. by M. Weber, W. Desmond. Frankfurt : Ontos Verlag, 2008. Pp. 119–130. DOI: `10.1515/9783110333299.2.119`.

Hovda P. What is Classical Mereology? // Journal of Philosophical Logic. 2009. Vol. 38. Pp. 55–82. DOI: `10.1007/s10992-008-9092-4`.

Howard W. A. The formulae-as-types notion of construction // To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism. Boston : Academic Press, 1980. Pp. 479–490.

Jech T. Set Theory. 3rd Millennium ed, rev. and expanded. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2006. (Springer Monographs in Mathematics).

Johnstone P. T. Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium. Vol. 2. Oxford : Clarendon Press, 2002. 716 pp. (Oxford Logic Guides ; 44).

Johnstone P. T. Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium. Oxford : Clarendon Press, 2002. (Oxford Logic Guides).

Johnstone P. T. The Point of Pointless Topology // Bulletin of the American Mathematical Society (New Series). 1983. Jan. Vol. 8, no. 1. Pp. 41–53. URL: `http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=682820`.

Joyal A., Moerdijk I. Algebraic Set Theory. Cambridge : CUP, 1995. 123 pp. (London Mathematical Society Lecture Note Series ; 220).

Kripke S. Outline of a Theory of Truth // The Journal of Philosophy. 1975. Nov. 6. Vol. 72, no. 19. Pp. 690–716.

Kripke S. Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I // Formal Systems and Recursive Functions (Eighth Logic Colloquium, Oxford, July 1963) / ed. by J. N. Crossley, M. A. E. Dummett. Amsterdam : North Holland Publishing Co., 1965. Pp. 92–130.

Krömer R. Tool and Object : A History and Philosophy of Category Theory. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2007. (Science Networks. Historical Studies, 32).

Kunen K. Set Theory : An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam, New York : North-Holland Pub. Co, 1980. xvi, 313 p. (Studies in logic and the foundations of mathematics: v. 102).

Laruelle F. Anti-Badiou : Sur l'introduction du maoisme dans la philosophie. Paris : Kime, 2011.

Lawvere F. W. An Elementary Theory of the Category of Sets (long version) // Theory and Applications of Categories. 2005. Vol. 11. Pp. 7–35.

Lawvere F. W. Cohesive Toposes and Cantor's "lauter Einsen" // Philosophia Mathematica (3). 1994. Vol. 2. Pp. 5–15.

Lawvere F. W. Diagonal arguments and cartesian closed categories with author commentary // Category Theory, Homology Theory and their Applications II : Proceedings of the Conference held at the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, June 24–July 19, 1968 Volume Two / ed. by M. B. (auth.) Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969. Pp. 134–145. (Lecture Notes in Mathematics ; 92). DOI: `10.1007/BFb0080769`.

Leibniz G. W. Discours de métaphysique et correspondance avec Arnauld / sous la dir. de G. L. Roy. 6^{e} éd. P. : J. Vrin, 1993. 320 p. (Bibliothèque des textes philosophiques).

Lewis D. Parts of Classes. Cambridge : Basil Blackwell, 1991. 155 pp.

Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. 2nd ed. Springer, 1998. 314 pp. (Graduate Texts in Mathematics ; 5).

MacLane S., Moerdijk I. Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory. New York, Berlin etc. : Springer-Verlag, 1992. 630 pp. (Universitext).

McLarty C. Numbers Can be Just What They Have to // Noûs. 1993. Vol. 27, no. 4. Pp. 487–498. DOI: 10.2307/2215789. JSTOR: 2215789.

Meillassoux Q. Décision et indécidabilité de l'événement dans *L'Être et l'événement I et II* // Autour de *Logiques des mondes d'Alain Badiou* / sous la dir. de D. Rabouin, O. Feltham, L. Lincoln. Paris : Archives Contemporaines, 2011. P. 121-142.

Mendelson E. Introduction to mathematical logic. 6th ed. L., NY : CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015. xxiv,472. (Discrete mathematics and its applications).

Nirenberg R. L., Nirenberg D. Badiou's Number : A Critique of Mathematics as Ontology // Critical Inquiry. 2011. Vol. 37, Summer, no. 4. Pp. 583–614. JSTOR: 10.1086/660983.

Picado J., Pultr A. Frames and Locales : Topology Without Points. Vol. 28. Basel : Birkhäuser, 2012. 420 pp. (Frontiers in Mathematics). DOI: 10.1007/978-3-0348-0154-6.

Plotnitsky A. Experimenting with ontologies : sets, spaces, and topoi with Badiou and Grothendieck // Environment and Planning D: Society and Space. 2012. Vol. 30, issue 2. Pp. 351–368. DOI: 10.1068/d6610.

Relating First-Order Set Theories, Toposes and Categories of Classes / S. Awodey [et al.] // Annals of Pure and Applied Logic. 2014. Vol. 165, no. 2. Pp. 428–502. DOI: 10.1016/j.apal.2013.06.004.

Sato K. Forcing under Anti-Foundation Axiom : An expression of the stalks // Mathematical Logic Quarterly. 2006. June. Vol. 52, no. 3. Pp. 295–314. DOI: 10.1002/malq.200410060.

Shiver A. How do you say 'everything is ultimately composed of atoms'? // Philosophical Studies. 2015. Vol. 172, issue 3. Pp. 607–614. DOI: 10.1007/s11098-014-0321-0.

Shoenfield J. R. Unramified forcing // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 13. Part 1. Axiomatic Set Theory / ed. by D. S. Scott. Providence : American Mathematical Society, 1971. Pp. 357–381.

Tzouvaras A. Forcing and antifoundation // Archive for Mathematical Logic. 2005. July. Vol. 44, no. 5. Pp. 645–661. DOI: 10.1007/s00153-004-0268-5.

Whitehead A. N. An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge. Cambridge : Cambridge University Press, 1919. 216 pp.

Whitehead A. N. The Concept of Nature. Cambridge : Cambridge University Press, 1920. URL: http://www.gutenberg.org/files/18835/18835-h/18835-h.htm.

Yanofsky N. S. A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points // The Bulletin of Symbolic Logic. 2003. Vol. 9, no. 3. Pp. 362–386. DOI: 10.2178/bsl/1058448677. arXiv: math/0305282 [math.LO].

Учебное издание

О. А. Доманов

ОНТОЛОГИЯ И ФЕНОМЕНОЛОГИЯ АЛЕНА БАДЬЮ

Учебное пособие