ЛОГИКО-ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ*

Д.Ю. Власов

Предлагается рассматривать машинную верификацию формальных доказательств, записанных на некотором компьютерном языке, как логико-эмпирическое основание математики. Анализируются возникающие при этом философские проблемы.

Ключевые слова: логика, математика, язык, верификация

Математика и доказательства

Вопрос о сущностной природе математики можно сформулировать следующим образом: чем математика отличается от не-математики? Ответ на этот вопрос не один, и зависит от аспекта, в котором вопрос рассматривается. Для физика математика – это язык, на котором записываются физические законы, для неискушенного обывателя – наука о числах, для социолога – особая форма деятельности, имеющая в качестве результата публикации в математических журналах. Нас же будет интересовать точка зрения самих математиков на то, что такое математика.

Метафорически ответ на этот вопрос дан в первом томе трактата Н. Бурбаки «Элементы математики» [1]: «*Со времен греков говорить* "*математика*" *– значит говорить* "*доказательство*"». Действительно, понятие математического доказательства лежит в основе методологии математики. Как математик отличает верное утверждение от неверного? Он строит его доказательство. И верным считается лишь то утверждение, которое обладает неоспоримым доказательством. Поэтому примем такую точку зрения на математику, согласно которой базовым понятием, отличающим математическое от нематематического, является понятие доказательства.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (грант № 3 СО РАН (2012-2014) «Принципы построения онтологии на основе концептуализаций средствами логических дескриптивных языков».

«Неоспоримость» доказательства в разные времена понималась и воспринималась по-разному. Тем не менее можно ясно выделить тенденцию: по мере развития математики критерии «неоспоримости» (т.е. строгости) доказательств неуклонно усиливались. Этот процесс был внутренне мотивирован последовательными кризисами математики, которые порождались парадоксами. Механизм увеличения строгости доказательств позволял исключать парадоксы, тем самым их разрешая. К XX в. процесс подошел к своему логическому завершению, когда было сформулировано понятие «формальной дедуктивной системы», оперирующей цепочками символов по строго определенным правилам, не имеющим исключений. При этом само понятие *доказательства* превратилось из метаматематического объекта в математический, породив математическую логику и сделав строгость абсолютной. В рамках такого формального подхода основания математики становились однозначно определенными с кристальной ясностью: исчисление предикатов и аксиоматическая теория множеств. При этом подразумевалось, что вся математика может быть изложена на таком языке, правда, чисто теоретически, *потенциально*. Эта позиция четко отражена во введении к «Элементам математики» Н. Бурбаки. Вообще, ни одного полностью формального доказательства в первом томе у Бурбаки нет: даже самый простой строго формальный вывод потребовал бы слишком много места в книге.

Но с течением времени ситуация изменилась. С появлением мощных вычислительных машин вопрос об *актуальной* (в противоположность потенциальной) формализации тех или иных частей математики стал активно исследоваться. Системы компьютерной алгебры являются ярким примером практического применения таких формализаций. Помимо алгебраических появилось множество и чисто логических систем, претендующих на актуальную формализацию математики. Сегодня вычислительных мощностей, доступных для исследователя, вполне хватило бы для верификации всех ветвей математики, если бы они уже были формализованы. Основной проблемой в данной области является крайне трудоемкий процесс перевода математического текста в формальный вид.

Таким образом, предельной формой строгости доказательства является формальное доказательство на некотором языке, которое верифицируется некоторым «механизмом» (в общем смысле это может быть, например, электронный механизм) и, таким образом, является объективно проверяемым. Подобный подход к верификации доказательств, по сути, качественно меняет методологию математики: вместо субъективной верификации человеком (математиком) доказательство верифицируется физическим механизмом. При этом процесс верификации, а именно последовательная проверка всех шагов доказательства, становится объективным физическим процессом. Методологически сведя процесс установления истины в математике к наблюдению результата некоторого процесса, мы получаем новое, эмпирическое основание математики. Точнее, если принять во внимание основной объект, по отношению к которому мы получаем знание (эмпирическое) – доказательство, то такое основание математики можно назвать логико-эмпирическим.

Подобная методологическая привязка истинности математических утверждений к физической реальности минуя какие-либо стадии установления математической истины, связанные с психологизмом, дает новое понимание того, что есть математическая истина. Математическая истина становится эмпирическим фактом наличия выводимости этой истины, а точнее, проверки существующего вывода этой истины на логическую корректность.

Может показаться, что приведенные выше рассуждения о природе математической истины являются чистым теоретизированием, не имеющим каких-либо существенных практических приложений. Однако это не так. Существующие в современной математике тенденции однозначно свидетельствуют о том, что реализация таких логико-эмпирических методов установления истины крайне желательна, хотя и является весьма сложной и ресурсоемкой на практике. Так, для некоторых теорем вообще не существует возможности проверки человеком в силу длины доказательства, как правило при наличии комбинаторного перебора очень большого количества вариантов. Таковы, например, доказательство теоремы о четырех красках [2] или недавно доказанная при помощи компьютера гипотеза Кеплера [3].

В качестве другого примера доказательства запредельной сложности можно привести решение проблемы классификации конечных простых групп. Еще в середине 80-х годов XX в. было объявлено, что классификационная теорема доказана. Но даже беглый взгляд на то, что являет собой «доказательство» этой проблемы, заставляет задуматься о статусе «доказанности». Доказательство представляет собой массив журнальных статей, многие из которых далеко не тривиальны и общий объем которых составляет тысячи страниц. Даже самые крупные специалисты, принимавшие участие в доказательстве проблемы, признают, что не в состоянии проследить и проверить весь текст доказательства. Так, в 2004 г. М. Ашбахер, один из авторов классификационной теоремы, в своей статье [4] утверждает, что он верит в то, что доказательство этой теоремы верное. Вместе с тем в той же работе говорится, что отчасти это доказательство опирается на утверждения, доказанные при помощи компьютера. Если сами авторы доказательства не могут однозначно осознать все доказательство целиком, то тем более этого не могут сделать люди, не потратившие многие годы своей жизни на эти цели.

Тем не менее существует метод окончательного установления истинности классификационной теоремы: для этого текст доказательства нужно формализовать и проверить на машине. Ясно, что для реализации такого проекта потребуется привлечь экстраординарные ресурсы (в том числе и человеческие). Принципиальный момент заключается в том, что процесс формализации доказательства может иметь кусочный вид: отдельные части доказательства формализуются разными группами людей, при этом отдельная группа не обязана вникать в подробности доказательства другой группы. Собственно, классификационная теорема так и доказывалась. Но с того момента, как все кусочки доказательства формализованы, из них можно «сшить» общее доказательство, которое будет проверено машиной. Это принципиальный момент, отличающий формальное доказательство от неформального. Никто, никакой человек не сможет прочитать многие тысячи страниц неформального доказательства классификационной теоремы и собрать мысленно все доказательство в целое в своем уме – просто по причине чрезмерного масштаба проблемы. В то же время у машины подобных ограничений не будет.

Разумеется, подобная трактовка «математической истины» может вызвать критику. В частности, статус настоящего доказательства как такого, которое может быть ясно осознано человеком, конечно же, не присущ актуально формализованному доказательству, проверенному на машине. Также может вызвать вопросы надежность механической проверки доказательств. Если на первое критическое возражение прямо ответить нельзя, то вопрос о надежности проверки доказательств можно раскрыть.

Во-первых, сама природа эмпирически устанавливаемых фактов накладывает некоторые ограничения на их достоверность, так как любое измерение имеет свою погрешность.

Во-вторых, путем многократного повторения верификации доказательства на различных машинах степень достоверности верификации может быть увеличена до любых наперед заданных значений.

В-третьих, существует принципиальная асимметрия между двумя исходами верификации: подтверждением и опровержением доказательства. А именно, случайное опровержение корректного доказательства на много порядков более вероятно, чем случайное подтверждение некорректного доказательства. Это следует из самого механизма верификации, так как при проверке на доказательство накладываются очень жесткие требования и случайная ошибка гораздо более вероятно приведет к несоответствию этим жестким требованиям, чем к прохождению некорректного перехода через них.

Где же находится актуально формализованная математика в иерархии абстракции математических понятий? Мысленно построим «лестницу абстракции» математических понятий (не претендуя на полноту и строгость). На первой ступени будут находиться классические математические объекты – обобщающие друг друга числовые системы: целые, рациональные, действительные, комплексные числа. На следующей ступени – функции на числовых системах, функционалы высших порядков, различные алгебраические и топологические структуры, объекты другого типа по сравнению с числами. На третьей ступени будет находиться понятие структуры в смысле Н. Бурбаки – теоретико-множественные объекты, включающие в себя все классические алгебраические, топологические и прочие структуры. Что характерно, продолжение лестницы абстракции далее с необходимостью требует логических понятий. А именно, на следующей ступени будут находиться абстрактные теории первого порядка, в том числе включающие в себя аксиоматическую теорию множеств и структуры в смысле Бурбаки как частный случай. Далее следует понятие формального дедуктивного исчисления как обобщения исчисления предикатов, равно как и других возможных исчислений, пригодных для развития на их основе математики (возможно, не теоретико-множественной).

Таким образом, актуальная формализация математики как логически доведенная до конца концепция формализации дедуктивных систем находится на вершине лестницы абстракции математических объектов. С другой стороны, методологическая привязка к вычислительному эксперименту как методу установления истинности спускает уровень абстракции практически до нуля – до уровня реально наблюдаемых явлений. Данная двойственность не представляет собой противоречия, так как статус объектов актуально формализованной математики также двойствен. С одной стороны, все, чем оперирует актуально формализованная математика, – это физически представленные строки символов (например, в виде уровней напряжения в ячейках памяти). С этой стороны уровень абстракции данных объектов практически нулевой, – это уровень побитного представления информационных объектов, таких как строки. С другой стороны, вся формальная система вместе с машиной проверки вывода (которая реализует операционную семантику дедуктивной системы) как целое представляет собой объект, отражающий в своем поведении идеально мыслимый мир математических объектов, причем вершиной в иерархии абстракций этого мира, высшей точкой будет понятие формальной дедуктивной системы, в точности отражающее физическое представление этой абстракции на нулевом уровне. Соответственно, уровень абстракций объектов в идеально мыслимом математическом мире может быть произвольным, в то время как уровень отражения этих объектов будет неизменно наименьшим из возможных.

Математическое знание

После обсуждения методологических оснований математики логично обсудить и статус самого математического знания. Дело в том, что, согласно распространенной точке зрения, формально доказанные утверждения суть тавтологии и поэтому содержат объективной информации не более, чем, например, тавтология $A \rightarrow A$. В качестве следствия такого наблюдения часто выдвигается тезис о том, что формально доказанные утверждения не являются знанием, поскольку не несут никакой новой информации о мире в отличие от, например, знаний в естественных науках. Но если принять тезис об эмпирической природе проверки формального доказательства, то можно сделать противоположный вывод: формально доказанные утверждения можно считать знанием, если интерпретировать это знание как знание о существовании формального доказательства.

Действительно, как уже было замечено, математическое утверждение не может считаться верным, пока оно не доказано. Но сам факт наличия верного доказательства некоторого утверждения уже является знанием об этом утверждении. Тогда наличие формального доказательства, проверенного механически (некоторой физической машиной), будет уже эмпирическим *знанием* об этом утверждении. Следует отметить, что это знание будет носить сугубо синтаксический, формальный характер, т.е. не будет непосредственно отражать свойства тех идеальных математических объектов, которые скрываются за формализмом.

С другой стороны, опосредованно свойства идеальных математических объектов будут выражаться через доказуемые утверждения. Более того, если принять тезис о формальной дедуктивной системе как об ультимативном основании математики, то, по существу, никакого другого знания об идеальных математических объектах, кроме того синтаксического знания, которое может быть получено путем эмпирической проверки формальных доказательств, и не существует.

Все вышеприведенные тезисы, казалось бы, выхолащивают математику, делают из нее нечто сухое и механическое, пусть и методологически привязанное к реальности через процедуру проверки вывода. Однако это не противоречит творческому характеру математики. Ведь помимо жесткой привязки к наличию формального вывода у формальной математики практически нет ограничений. Возможность создавать различные математические теории никуда не исчезает. Равно как и не исчезает возможность развивать и углублять существующие теории. Может показаться, что уж по крайней мере основания математики в таком контексте жестко зафиксированы, но это также неверно. Фиксируется лишь некая рамочная методология получения математического знания, а не конкретная дедуктивная система, призванная служить основанием математики. С другой стороны, наличие подобного рамочного ограничения также вполне обоснованно, ибо если убрать вообще все ограничения, то как тогда можно отделить математическое от нематематического (с постановки вопроса о подобном разделении начиналась эта статья)? Поэтому фиксация рамочной математической методологии является конструктивным шагом в упорядочении оснований математики.

Физические границы математики

Методологическая привязка формальных дедуктивных систем (которые мы отождествим с математикой в самом общем понимании) к эмпирически проверяемым опытам ставит также ряд вопросов о взаимосвязи физического мира и математики. Действительно, если математическое знание является эмпирически проверяемым, то в какой степени оно зависит от физических законов? Так, в космологии распространены в чем-то спекулятивные рассуждения о принципиально ненаблюдаемых объектах, таких, например, как альтернативные (множественные) вселенные или, как минимум, практически недоступные для наблюдения в силу своей отдаленности области Вселенной (в модели инфляционной Вселенной). При этом строятся некие математические модели, предсказывающие те или иные свойства этих ненаблюдаемых объектов. Ясно, что здесь неявно принимается некий обобщенный принцип Галилея, гласящий, что законы природы записываются на некотором универсальном языке (языке математики), не зависящем ни от пространственных, ни от временных координат, ни от каких бы то ни было других физических параметров. Но если сама математика становится, пусть и очень слабо, но зависимой от эмпирических процедур, то в какой степени обоснован такой принцип?

Человеческая интуиция, базирующаяся на платонистском непосредственном оперировании идеальными математическими сущностями, а также на принципиальной убежденности в непреложности логических законов, однозначно говорит в пользу этого обобщенного принципа относительности. Действительно, зная доказательство некоторого утверждения, очень сложно представить, что в какой-либо другой пространственно-временной точке (или под воздействием каких-либо внешних физических факторов) внезапно обнаружится, что данное доказательство неверно (или, наоборот, станет верным изначально неверное доказательство). Это противоречит общепризнанному пониманию сути математики, которую многие действительно считают вневременным и внепространственным универсальным языком. Тем не менее если принять тезис об эмпирических основаниях самой дедуктивной системы математики, то подобная убежденность уже не кажется столь очевидной.

Действительно, история науки свидетельствует о том, что человеческая интуиция зачастую нас подводит и на первый взгляд парадоксальные явления действительно имеют место. Поэтому и вопрос о физических границах математики в контексте данной статьи вполне осмыслен. Ясно, что пока мы можем лишь умозрительно представить себе ситуацию, когда отчетливо проявляется петля обратной связи дедуктивной математики и физической реальности, и сама возможность таких явлений выглядит довольно дико. В то же время некоторая тенденция к подобным взглядам наблюдается у космологов. Когда космологи в рассуждениях об альтернативных вселенных говорят о возможных различиях между ними на уровне значений мировых констант, это первая, самая слабая степень проявления такой тенденции. Более сильная степень предполагает возможность вариации уже на уровне физических законов в различных вселенных. Тогда наивысшей предельной, степенью этой тенденции станет в точности положение о возможности изменения самой «логической» (т.е. дедуктивной в общем понимании) основы другой вселенной (другого физического мира).

К сожалению, если отказаться от обобщенного принципа Галилея, то мы лишаемся мощнейшего аппарата (математики), дающего науке огромную предсказательную силу. Более того, колоссальный успех естественных наук, базирующихся на математике как на универсальном внефизическом языке, свидетельствует о том, что если и есть физические пределы применимости математики, то они очень далеко и, по всей видимости, не скоро будут достигнуты. Поэтому, по большому счету, никаких оснований для отказа от обобщенного принципа Галилея с прагматической точки зрения нет.

Языки формальной математики

Как уже отмечалось, программа явной формализации математики в виде компьютерного языка, во-первых, весьма актуальна и, во-вторых, технически реализуема на современной электронной базе. В качестве программного документа по этой теме можно привести так называемый QED-манифест [5], опубликованный в 1994 г. Обзорная статья Х. Барендрегта и Ф. Видайка [6] посвящена той же теме. С тех пор много групп по всему миру работало над реализацией целей манифеста, обзор 17 наиболее популярных универсальных систем формальной математики можно посмотреть в статье Ф. Видайка [7], но к настоящему моменту, к сожалению, QED-манифест так и не реализован в полной мере. В частности, в повседневной работе математиков-исследователей системы формальной математики используются крайне мало. В основном применяются специализированные программы, например в теории групп используется система компьютерной алгебры GAP. В другой статье Ф. Видайка [8] анализируются причины, по которой QED до сих пор так и не реализован в полной мере. Если попытаться выделить основные проблемы, которые препятствуют полной реализации QED-манифеста, то из вышеупомянутой статьи Ф. Видайка можно выделить следующие принципы.

Принцип элиминации ограничений. Многие системы формальной математики базируются на исчислениях, ограничивающих выразительные возможности в пользу большей теоретической и философской корректности. В виде ограничений могут выступать различные условия конструктивности, исключение аксиом типа аксиомы выбора, запрет на непредикативные определения и т.д. Принцип элиминации ограничений означает, что следует максимально уменьшать ограничивающие выразительную силу исчисления факторы, а не увеличивать их.

Принцип синтаксической ясности. Синтаксис многих систем формальной математики весьма изощрен, сильно связан с логическим исчислением, лежащим в основе этих систем, и не адекватен реальной математической практике. Например, для обычного математика естественной формой доказательства является декларативная, т.е. такая, при которой доказательство приводится явно. Но во многих системах вместо декларативной применяется процедурная форма записи доказательства, когда вместо самого доказательства описывается способ его порождения. Это, естественно, будет большим неудобством для классически мыслящего математика, если он захочет воспользоваться подобной системой. Принцип синтаксической ясности означает, что структурно формализованная теория должна максимально походить на свой неформальный первоисточник в общепринятом синтаксисе.

Принцип когерентной открытости. В статье Ф. Видайка все рассматриваемые им системы формальной математики разделяются на два класса: 1) системы с большим количеством людей, пополняющих базу теорем, и плохо организованные (некогерентные); 2) системы с малым количеством людей, пополняющих базу теорем, и хорошо организованные (когерентные). Очевидно, что оптимальным вариантом является система с большим количеством пополняющих базу теорем пользователей, но при этом хорошо организованная. Это и есть принцип когерентной открытости.

Таким образом, при создании QED-реализующей системы формальной математики необходимо соблюсти эти принципы.

Язык metamath

Язык формальной математики metamath [9] был разработан Н. Мегилом в начале 90-х годов XX в. Этот язык резко выделяется из многообразия различных систем формальной математики по двум ключевым признакам: *универсальности* и *простоте*.

Универсальность языка metamath заключается в том, что фактически этот язык не описывает никакое логическое исчисление. Вместо этого он предоставляет средства для записи широкого спектра формальных исчислений и теорем на их базе. В частности, в metamath не зафиксирован синтаксис выражений – он задается, как и само исчисление, в исходном файле формализации. Более того, на уровне языка нет разницы между описанием синтаксиса выражений исчисления и описанием его аксиом и правил вывода, что дает очень большую свободу для задания синтаксиса выражения. Таким образом, metamath – это метаисчисление, позволяющее определять разные конкретные исчисления и математику на их основе.

Прямым следствием столь большой универсальности metamath является то, что этот язык очевидно удовлетворяет принципам элиминации ограничений и синтаксической ясности математических выражений. Все ограничения элиминированы полностью, так как на задаваемые в metamath исчисления никаких ограничений нет. Синтаксическая ясность выражений может быть обеспечена определением соответствующего синтаксиса выражений, максимально приближенным к современной математической практике.

Отдельного внимания достойна и вторая ключевая особенность языка metamath: несмотря на свою универсальность, это очень простой язык. Прямым следствием его простоты является тот факт, что можно написать сравнительно простой, небольшой по объему верификатор для этого языка. То есть доказательства, записанные на metamath, могут быть *надежно* проверены. Существует верификатор metamath, написанный на языке python и состоящий всего из 300 строк [10].

Тем не менее у языка metamath есть и фундаментальный недостаток, являющийся прямым следствием его простоты: доказательства на этом языке синтаксически совершенно не ясны, т.е. для доказательств принцип синтаксической ясности не выполнен. Доказательства на metamath представляются как неструктурированная последовательность меток утверждений (фактически это обратная польская запись) и потому без помощи специальных программ не могут быть поняты и отредактированы человеком (кроме совсем простых случаев).

Таким образом, несмотря на то что metamath очень выгодно выделяется среди остальных претендентов на реализацию QED-манифеста, у него есть очень серьезный недостаток, не позволяющий считать его языком, полностью реализующим QED.

Язык Russell

Язык Russell [11] (назван так в честь выдающегося философа и логика Б. Рассела) был разработан автором данной статьи для преодоления указанного выше недостатка языка metamath: невозможности редактировать и понимать доказательства на этом языке без применения специализированных программ. Вместе с тем требовалось сохранить степень надежности metamath. Поэтому программной реализацией Russell является транслятор, переводящий исходные файлы на языке Russell в язык metamath. Это позволяет использовать преимущества языка Russell (удобство чтения и редактирования доказательств) и языка metamath (надежность верификации доказательств), а степень универсальности почти не изменилась. Единственным ограничением, уменьшающим степень универсальности Russell по сравнению с metamath, является то, что в Russell рассматриваются только контекстно свободные, не леворекурсивные грамматики выражений. Но если принять во внимание широту данного класса языков, это не является принципиальным ограничением. Отметим, что на самом деле транслятор Russell переводит файл с исходной формализацией не в полный язык metamath, а в подмножество языка metamath с идентичной семантикой, но более простого. Этот язык называется smm (акроним от Simplified MetaMath).

Следует отметить, что по сравнению с metamath принцип синтаксической ясности доказательств в Russell выполнен. Выполнимость принципа элиминации ограничений и синтаксической ясности выражений также наследуется. Для обеспечения принципа когерентной открытости в Russell есть языковое средство, позволяющее структурировать базу теорем в виде дерева теорий, а также специальная синтаксическая конструкция для определений, гарантирующая консервативность расширений языка определениями. Таким образом, можно считать Russell хорошим кандидатом на роль полной реализации QED-манифеста.

Программной реализацией языка Russell является транслятор из Russell в язык smm. Для импорта библиотеки теорем языка metamath в Russell также требуется транслятор в противоположную сторону. Поскольку в языке metamath для описания синтаксиса выражений и синтаксиса исчисления используются одинаковые средства, постольку в общем случае в metamath, во-первых, нельзя отделить правила грамматики выражений от содержательных правил формализуемого исчисления, и, во-вторых, грамматика выражений может быть произвольно сложной, в частности не контекстно-свободной. Поэтому транслятор из произвольного кода на языке metamath в Russell представляется невозможным. К счастью, существующая база теорем metamath использует контекстно свободную грамматику выражений для языка математики. Кроме того, в этой базе можно легко отделить выражения, имеющие семантику утверждений, от выражений, использующихся как составные части других выражений (например, термов исчисления предикатов), так как все утверждения начинаются с символа $\vdash$. Следует отметить, что символ $\vdash$ никак не выделяется в самом языке metamath, и поэтому в другом формальном исчислении может играть другую роль.

Несмотря на то что грамматика языка математики в базе теорем metamath контекстно свободная, она является леворекурсивной. Поскольку текущая реализация транслятора Russell не допускает леворекурсивной грамматики выражений, транслятор из metamath в Russell модифицирует грамматику математики metamath «на лету» при трансляции.

Реализация языка Russell – система формальной математики mdl может быть загружена из http://www.russellmath.org и на данный момент включает исходные коды транслятора mdl, исходные коды транслятора mm (это транслятор из metamath в Russell, специально адаптированный для трансляции файла math.mm), исходные коды откорректированного оригинального верификатора языка metamath, базы теорем math.mm и тестового скрипта. Тестовый скрипт вначале транслирует файл math.mm в файл math.mdl на языке Russell при помощи транслятора mm, потом файл math.mdl транслируется в файл math.smm, который после этого верифицируется оригинальным верификатором metamath. Таким образом, тестовая цепочка трансляций и заключительная верификация проверяют корректность трансляторов на достаточно большой базе (более 12 тыс. теорем). Все исходные коды программ, входящих в пакет mdl, распространяются по лицензии GPLv3.

Классификация систем формальной математики

Среди понятий дедуктивных систем (исчислений) можно выделить следующие три базовых класса понятий:

1. *языковые*, определяющиеся синтаксисом выражений данной дедуктивной системы;
2. *логические*, определяющиеся как набор логических аксиом и правил вывода, т.е. схем вывода логических выражений;
3. *математические*, определяющиеся как набор содержательных аксиом дедуктивной системы.

В качестве примера можно привести связку: язык исчисления предикатов + само исчисление предикатов + систему аксиом теории множеств (например, ZFC) в качестве формальной дедуктивной системы, определяющей классическое основание математики. Данное разбиение адекватно стандартному пониманию того, из каких компонентов состоит формальная математическая теория.

Следовательно, любая система формальной математики (точнее, язык формальной математики) должна в той или иной форме поддерживать на уровне синтаксиса возможность оперировать элементами этих трех базовых классов понятий. В соответствии с тем, насколько унифицировано осуществляется подобное оперирование относительно этих трех классов, системы формальной математики можно разбить на три уровня:

1. *классические системы*. На языках этих систем все три класса понятий поддерживаются различными языковыми конструкциями, т.е. синтаксис выражений описывается одним классом конструкций языка, логика описывается другим классом конструкций (либо вообще жестко зафиксирована) и, наконец, содержательные аксиомы задаются третьим классом конструкций языка;
2. *металогические системы*. В этих системах синтаксис задания языка выражений отличен от синтаксиса задания логических аксиом и правил вывода, в то время как синтаксис задания логических аксиом уже не отличается от синтаксиса задания содержательных аксиом, т.е. синтаксис унифицирован. Ясно, что при этом возможность варьировать содержательные аксиомы и правила вывода влечет возможность варьировать также и логические аксиомы и правила вывода;
3. *инфралогические системы*. Эти системы характеризуются тем, что в них уже все три класса понятий дедуктивных систем (синтаксис, логика и содержательные аксиомы) определяются единообразно одной и той же синтаксической конструкцией.

В рамках такой классификации получается, что подавляющее большинство современных систем формальной математики относится к типу классических. Более того, у подавляющего большинства таких систем логика вообще жестко зашита в язык и, соответственно, в реализацию системы и не может меняться. Очень небольшой класс систем можно отнести ко второму типу – металогическим системам. Таковыми являются, например, Twelf и MetaPRL, использующие лямбда-исчисление с зависимыми типами для кодирования различных логических исчислений. Язык Russell также относится к этому типу, хотя он и не базируется на каком-либо варианте лямбда-исчисления, а непосредственно реализует выводимость в общем виде. Наконец, единственным представителем третьего типа является язык metamath, у которого унифицированные средства оперирования символьными последовательностями, с одной стороны, приводят к очень большой универсальности (фактически выразительной силе) этого языка и, с другой стороны, являются непосредственной причиной его простоты, так как достаточно реализовать универсальный механизм проверки вывода, который годится и для синтаксического разбора, и для логического вывода одновременно.

Можно заметить, что логические системы (второго типа) соответствуют такому направлению в философии математики, как логицизм, в то время как системы первого типа соответствуют классическому представлению о разделении логики и содержательных аксиом. Системы же третьего типа – инфралогические (т.е. более низкого уровня, чем просто логические) вообще выпадают из аналитического поля классической философии математики и требуют отдельного рассмотрения и философского осмысления. Системы инфралогического уровня ближе по своей идеологии к примитивным вычислительным устройствам, чем к классическому представлению о логическом выводе.

В качестве еще одного принципиального отличия инфралогических систем от металогических можно указать их пригодность для автоматического поиска доказательств теорем. В металогических системах формальной математики практическая возможность автоматического поиска доказательств существует. Более того, для языка Russell эта возможность реализована в системе mdl, и на практике проверена возможность нахождения доказательств простых теорем пропозициональной логики в чисто автоматическом режиме. На самом деле это нетривиальный результат, так как для реализации такой возможности приходится создавать алгоритмы поиска доказательств «в общем», т.е. для произвольной дедуктивной системы. Из общих соображений ясно, что это гораздо сложнее, чем реализовать алгоритм поиска доказательств в четко зафиксированном логическом исчислении, особенно если учесть то обстоятельство, что многие реально используемые системы автоматического поиска доказательств базируются на исчислениях, специально предназначенных для данной цели и в этом смысле удобных.

Не вдаваясь в детали, можно сказать, что основным техническим понятием, работающим в такой ситуации, является понятие унификации (несимметричное). Одно выражение унифицируется с другим, если существует такая подстановка в переменные первого выражения, что при ее применении к первому выражению получается второе выражение. Один из базовых алгоритмов, которые используются в автоматическом доказательстве теорем в системе mdl, – это алгоритм поиска унификатора (несимметричного) выражений. При реализации общего алгоритма, позволяющего вычислить унификатор двух выражений (если он существует), применяется синтаксический разбор выражений в рассматриваемой дедуктивной системе. И критически важным обстоятельством является то, что в языке Russell (а значит, и в его программной реализации mdl) используются только контекстно свободные грамматики выражений, которые позволяют производить эффективный синтаксический разбор выражений. Любой инфралогический язык формальной математики (например, metamath) не допускает эффективных алгоритмов синтаксического разбора выражений, поскольку допускает произвольные грамматики. Это прямое следствие того, что языковые средства для описания языков выражений и для задания логических и содержательных аксиом дедуктивных систем одни и те же.

Можно сделать вывод, что в то время как металогические системы формальной математики допускают автоматическое доказательство теорем на практике, инфралогические системы поддерживают средства автоматического поиска доказательств лишь теоретически, а на практике реализовать такие средства невозможно.

Примечания

1. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965.
2. См.: *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable. P. I: Discharging // Illinois J. Math. – 1977. – V. 21. – P. 429–490; *Id.* Every planar map is four colorable. P. II: Reducibility // Ibid. – P. 491–567.
3. См.: *Hales T.C.* A proof of the Kepler conjecture // Annals of Mathematics. Second Series. – 2005. – V. 162, No. 3. – P. 1065–1185.
4. См.: *Aschbacher M.* The status of the classification of the finite simple groups // Mathematical Monthly. – 2004. – V. 51, No. 7. – P. 736–740.
5. См.: *Boyer R. et al.* The QED manifesto // Automated Deduction – CADE 12 / Ed. by A. Bundy. – V. 814 of LNAI. – Springer-Verlag, 1994. – P. 238–251. – URL: http://www.cs.ru.nl/~freek/qed/qed.ps.gz
6. См.: *Barendregt H., Wiedijk F.* The challenge of computer mathematics // Transactions A of the Royal Society. – 2005. – V. 363, No. 1835. – P. 2351–2375. – URL: http://www.cs.ru.nl/~freek/notes/RSpaper.pdf
7. См.: *Wiedijk F.* The Seventeen Provers of the World / Foreword by D.S. Scott, LNAI 3600. – Springer, 2006. – URL: http://www.cs.ru.nl/~freek/comparison/comparison.pdf

8. См.: *Wiedijk F.* The QED manifesto revisited // Studies in Logic, Grammar and Rhethoric. – 2007. – V. 10, No. 23. – P. 121–133. – URL: http://mizar.org/trybulec65/8.pdf

9. См.: *Megill N.D.* Metamath: A Computer Language for Pure Mathematics. – Morrisville, North Carolina, USA: Lulu press, 1997. – URL: http://us.metamath.org/ downloads/ metamath.pdf. См. также сайт http://www.metamath.org

10. URL: http://us.metamath.org/downloads/mmverify.py

11. См.: *Власов Д.Ю.* Язык формальной математики Russell // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика. – 2011. № 2. – С. 27–50.

Дата поступления 26.10.2012

Институт математики им. С.Л. Соболева
СО РАН, г. Новосибирск
vlasov@academ.org

***Vlasov, D.Yu.* Logic-empirical foundations of mathematics**

The author proposes to consider machine verification of formal proofs written in a certain computer language as a logic-empirical foundation of mathematics. He also analyses philosophical problems emerging in such consideration.

Keywords: logic, mathematics, language, verification