СИММЕТРИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ: МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ И ФИЛОСОФСКИЙ АНАЛИЗ

*В.М. Резников**

Показана значимость симметрии в стохастической математике для частичного решения проблемы индукции, поставленной Юмом. Показана роль второй теоремы Байеса, и принципа эпистемологической симметрии, используемого при ее доказательстве в качестве инструмента решения проблемы индукции. Вторая теорема Байеса является реверсным вариантом теоремы Муавра. Первая теорема Байеса, наиболее известная относится к элементарной теории вероятностей, и была в действительности доказана Лапласом. Лаплас независимо от Байеса обнаружил принцип эпистемологической симметрии, а усовершенствованный им метод решения теоремы Муавра привел к интерпретации этой теоремы, которая является частичным решением проблемы Юма: при многократной повторяемости результатов вероятность очередного повторения близка к единице. В настоящее время наиболее адекватным видом симметрии для решения проблемы индукции считается концепция марковской обмениваемости, в рамках которой обнаружена связь с понятием статистической достаточности, играющим важную роль в теории и практике математической статистики.

Ключевые слова: проблема индукции, Юм, теоремы Байеса, теорема Муавра, правило последовательности Лапласа

Идея симметрии в естественных науках является респектабельной. Значимость связана с обоснованностью симметрии. Так, например, реакцией на кризис физики в связи с непонятными результатами в квантовой механике было предложение на основе законов сохранения и принципов симметрии получить заново все физические законы. Значимость идеи симметрии подкрепляется наличием адекватного аппарата для формализации идеи симметрии, в частности теории групп.

В стохастической математике идея симметрии также как и в физике является креативной. Так, например, идея симметрии используется для назначения первичных вероятностей: в классической теории веро-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-07-00560а) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 47.

Публикуется в авторской редакции.

© Резников В.М., 2011

ятностей, в логической и субъективистских интерпретациях теории вероятностей. Кроме того, неоспорима значимость идеи симметрии для частичного решения проблемы индукции методами теории вероятностей. Несмотря на близость физики, и стохастической математики в отношении эвристичности идеи симметрии, эти науки в разной степени оценивают обоснованность симметрии. Если в физике принципы симметрии считаются обоснованными, то в вероятностной математике основания для принятия симметрии являются объектами критики. В стохастической математике идея симметрии наиболее часто используется на основе теоремы Байеса. Однако понятие «теорема Байеса» не является однозначным понятием. Как справедливо заметил Шейнин: «…выражение теорема Бейеса исторически недостаточно определенно» [1]. Действительно известны три теоремы под названием теоремы Байеса. Две из них разные и третья, являющаяся предельным вариантом второй.

Первая теорема Байеса. Она наиболее известна и относится к элементарной теории вероятностей. Для того чтобы ее сформулировать необходимо ввести следующее определение. Полным пространством событий называется такое множество событий попарно несовместимых событий: A1, A2, …, An, что сумма вероятностей этих событий равна единице. Теперь сформулируем теорему Байеса. Пусть A1, A2, …, An составляют полное пространство событий, заданы вероятности: P(Ai), I = 1, n. Для изучения изменения вероятностей P(Ai), I = 1, n, используется другое событие B. Пусть заданы условные вероятности: P(B/Ai), I = 1, n. Тогда:

$$P(Ai/B) = P(B/Ai) * P(Ai)/\sum P(B/Ai) * P(Ai) \qquad (1)$$

Последнее выражение представляет формулировку теоремы Байеса в элементарной теории вероятностей. По-видимому, оно впервые было доказано П. Лапласом. По мнению О.Б. Шейнина [2], это название впервые было предложено О. Курно в его известной работе [3]. Сама эта теорема не вызывает никаких проблем, однако несмотря на простоту она популярна как в философии науки, так и в качестве аналитического аппарата, используемого в экспертных системах. В философии науки она используется для опровержения тезиса Дюгема – Куайна. Тезис Дюгема – Куайна имеет холистский характер, согласно тезису теории опровергаются и принимаются полностью. На основе теоремы Байеса предложено антихолистское опровержение этого тезиса [4]. В качестве фактора, ответственного за несовершенство теории принимается событие Ai, такое, которое максимизирует следующее выражение:

$$\max_{i} \left| P(Ai) - P(Ai/B) \right| \tag{2}$$

Другими словами ответственным за неадекватность теории считается событие, вероятность которого наиболее сильно изменяется при получении новой информации.

Теорему Байеса часто интерпретируют как инверсную теорему, так как она обеспечивает вычисление вероятностей P(Ai/B) на основе обратных вероятностей P(B/Ai). Сложность применения теоремы связана с тем, что для ее применения необходимо знание многих вероятностей P(Ai), P(B/Ai), I = 1, n. Так как знание теоретических величин априори, как правило, недоступно, то для определения первичных вероятностей P(Ai) используют принцип индифферентности на основе соображений симметрии [5].

Вторая теорема Байеса. Именно эта теорема и была доказана Томасом Байесом. Она оказала влияние на исследование проблемы индукции и частичного решения проблемы индукции. Прежде чем говорить об этой теореме уделим некоторое внимание личности Томаса Байеса.

Несмотря на огромную популярность Байеса в вероятностной математике, приложениях математики и в философии науки о нем достоверно известно немного. Он был сыном министра нонконформиста, то есть не верящего в Троицу. Точная дата рождения Томаса Байеса неизвестна, предположительно он родился в 1701 году. Дата смерти 1761 год. Известно, что он получил домашнее образование, по некоторым данным математике он обучался у известного математика де А. Муавра. Он стал математиком, его работы получили признание, о чем свидетельствует избрание его в лондонское королевское (научное) общество в возрасте до сорока лет, хотя до своей кончины им была опубликована только одна работа. Это трактат, посвященный вычислительным аспектам метода флюксий, открытого И. Ньютоном. После смерти Байеса его архив был передан душеприказчику Ричарду Прайсу. Прайс был искушенным как в вероятностной математике, так в и приложениях вероятностной математики. В частности он был автором таблиц продолжительности жизни в городе Нортгемптоне графства Нортгемптонширх [6]. В 1765 году за издание работ Байеса он стал членом Королевского общества.

Архив Байеса содержал две работы. В первой работа сформулированы основные законы теории вероятностей. По мнению Б.В. Гнеденко [7], Байес первым сформулировал формулу сложения вероятностей и формулу умножения вероятностей, которая является частным случаем формулы Байеса в первом, отмеченном нами значении, и кроме того в первой работе была дана аппроксимация формулы де Муавра – Стирлинга для вычисления функции n! Благодаря второй работе, содержащей доказательство второй теоремы Байеса, и в особенности благодаря эпистемологическому постулату, используемому при доказательстве этой теоремы, Байес является одним из самых знаменитых математиков в истории человечества. Прайс в письме к Катону члену Королевского Общества убедил в необходимости печатать работу, и был ее редактором.

В итоге работа Байеса под названием: «Эссе, направленное на разрешение проблемы доктрины шансов» вышла в двух частях в 1764 и 1765 годах в трудах Королевского общества. Байес поставил следующую проблему: определить вероятность P того, что статистическая оценка ^p, для постоянной, но неизвестной вероятности успеха p в единственном испытании будет принадлежать интервалу, граничными точками которого являются заданные вероятности: l и u. По сути, Байес рассматривал схему Бернулли. В этой схеме вероятность успеха в каждом испытании одна и та же, и в рамках этой схемы исследуются вероятности событий, состоящие в реализации некоторого числа s успехов при n испытаниях. Пусть S случайная величина, описывающая число успехов при n испытаниях: $0 \leq S \leq n$.

Решение проблемы реализуется Байесом следующим образом:

$$P(l<\hat{}p<u \mid S=s) = \int_L^U C_n^s p^s (1-p)^{n-s}\, dp \Big/ \int_O^1 C_n^s p^s (1-p)^{n-s}\, dp \quad (3)$$

Здесь $C_n^s = n!/(s! * (n-s)!)$ это число сочетаний из n элементов по s. (4)

В эпоху Байеса для вычисления интегралов в выражении (3) не существовало аналитических способов решения, поэтому для их вычисления использовался синтез геометрического и эмпирического подходов. Для определения оценки вероятности успеха ^p и числа успешных испытаний S Байес проводит эксперимент [8]. Вначале определяется ^p оценка вероятности успеха в каждом испытании. Для эксперимента используется квадратный биллиардный стол. Пусть AB символическое обозначение длины стола. На стол бросают случайно мяч, абсциссу падения мяча обозначим буквой o, тогда AO определяет величину p вероятности успеха в каждом эксперименте. Далее производится n кратный эксперимент с бросанием мяча, пусть s число успехов:

это число попаданий мяча в область AO. Тогда по формуле

$$ {}^{s}C_{n}\hat{}p^{s}\ (1-\hat{}p)^{n-s} \quad (5)$$

определяется ордината точки O. По ординате этой точки графически определяются ординаты точек L и U. Через точки A, B и ординаты точек O, L и U проводится кривая. С помощью полученной кривой определяются площадь фигуры, ограниченная предельными точками L и U, а также площадь всей фигуры, а также искомая вероятность по формуле (3). В предложенном Байесом решении неизвестная вероятность успеха p является не константой, а непрерывным параметром, с некоторой плотностью вероятности π(p). Поэтому в подинтегральных выражениях рассматриваемых интегралов необходимо учитывать распределение π(p) параметра p. С учетом этого решение принимает вид:

$$P(l<\hat{}p<u \mid S=s) = \int_{L}^{U} {}^{s}C_{n}\hat{}p^{s}(1-\hat{}p)^{n-s}\pi(\hat{}p)d\hat{}p \Big/ \int_{O}^{1} {}^{s}C_{n}\hat{}p^{s}(1-\hat{}p)^{n-s}\pi(\hat{}p)d\hat{}p \quad (6)$$

При решении конкретной задачи на основе физических соображений Байес полагал, что распределение π(p) является равномерным распределением для всех p (0<p<1), при этом:

$$\pi(p) = 1 \quad (7)$$

В работе [5] показано, что условия (6) и (7) эквивалентны условию:

$$\int_{O}^{1} {}^{s}C_{n}\hat{}p^{s}(1-\hat{}p)^{n-s}\pi(\hat{}p)d\hat{}p = 1/n+1,\ s=0, 1, \ldots, n. \quad (8)$$

Главной заслугой Байеса является не решение конкретной задачи с помощью формулы (6) на основе дополнительных корректных для этой задачи условий (7), а обоснование, что предложенный им метод решения, использующий предположение о равномерном распределении имеет универсальный характер. Байес справедливо полагал, что в обычных ситуациях исследователь не знает какое значение в определенный момент времени примет вероятностный параметр p, и поэтому не имеется никаких предпочтений для одних значений параметра по отношению к другим, а значит, условие равновероятности является естественным. В работе Байеса не приведена область применения доказанной теоремы для исследования проблемы индукции. Это было сделано Прайсом.

Прайс дал детальное объяснение значимости решения второй теоремы Байеса. Согласно Прайсу теорема Байеса является реверсной по отношению к известной теореме, доказанной Муавром, сейчас имеющей название теоремы Муавра – Лапласа. Муавр в рамках схемы Бернулли изучал предельное поведение (центрированной и нормированной случайной величины, равной отношению разности случайной величины, определяющей число успехов в n испытаниях и ее математического ожидания к среднеквадратичному отклонению этой случайной величины). Результат Муавра имеет следующий вид [9]:

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le (\mu - np)/[(np(1-p)]^{1/2} \le b) = 1/(2\pi)^{1/2} \int_a^b \exp(-z^2/2)dz \qquad (9)$$

Здесь $q = 1 - p$, $E\mu = np$, $D\mu = npq$, $E\mu$ и $D\mu$ это математическое ожидание и дисперсия случайной величины μ.

Муавр дал решение предельной теоремы о принадлежности известной вероятности события к интервалу. Во второй теореме Байеса дано решение о принадлежности оценки этой вероятности, когда она неизвестна к интервалу, однако решение не является асимптотическим. Реверсный вариант теоремы Муавра для бесконечного числа испытаний как отмечал Шейнин, принадлежит Г. Тимердингу редактору немецкого издания Байеса. Тимердинг [10], показал, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{\,|\,{}^\wedge p - \mathbf{a}\,|\,/(\mathbf{pq/n^{3/2}})^{1/2} \le z\} = 1/(2\pi)^{1/2} \int_0^z \exp(-w^2/2)dw \qquad (10)$$

Здесь ^p – это статистическая оценка неизвестной вероятности попадания мяча в область АО в эксперименте Байеса. Величина **a** это математическое ожидание оценки ^p, $(\mathbf{pq/n^{3/2}})^{1/2}$ **–** это среднеквадратичное отклонение оценки ^p. Утверждение (10) – это третья теорема Байеса.

Анализируя работы Байеса, Прайс не только понял, что теорема Байеса является теоремой обратной к теореме Муавра, но и то, что теорема Байеса является инструментом для анализа проблемы индукции Юма. Хотя напрямую интерпретация результата содержащегося во второй теореме Байеса по отношению к проблеме индукции не является ясной. Поэтому Прайс на основе решения Байеса предложил три свои интерпретации адекватные анализу проблемы индукции Юма. Во-первых, он показал, что при получении повторных высоковероятных результатов, они с высокой вероятностью попадут в выделенный интервал. Во-вторых, он показал, что при получении повторных низковероятностных результатов, они с невысокой вероятностью попадает в выделенный интервал. Кроме того он показал, что с высокой вероятностью получится результат превышающий вероятность ½:

$$P(x > 1/2) = (2^{n+1} - 1)/2^{n+1} \qquad (11)$$

Другими словами, если событие уже произошло n раз, то можно делать ставку в соотношении $2^{n+1} - 1$ к одному, что это событие будет происходить в более половины случаев [11].

Прайс называет Байеса гениальным математиком, получившим инверсный вариант теоремы Муавра, адекватный для решения проблемы индукции, поставленной Юмом. Интересно, что гением был назван Байес и в письме Давида Гартли. Давид Гартли известный психолог, он был энтузиастом применения математики в психологии. В его работе «Наблюдения человека», написанной 1749 году есть следующий пассаж: «Мой гениальный французский друг сообщил мне решение реверсной проблемы, в которой он определил ожидание того, что первоначальное соотношение причин появления или непоявления события должно уклоняться на любую заданную степень от p до q если известно, что это событие произошло p раз и не произошло q раз. И как следует из его решения, что при очень большом числе испытаний это уклонение должно быть незначительным» [12]. Так как Байес в предисловии к его работе, написанным Прайсом, тоже характеризуется гениальным человеком, а Байес, Гартли и Прайс были людьми одного круга, то существуют большие основания считать, что и в работе Гартли имя неназванного корреспондента, к которому Гартли обращается и называет гениальным другом это Байес. Гартли не называет имя Байеса, по-видимому, это связанно с нежеланием последнего публиковать работу.

Результаты второй теоремы Байеса, и принципы на которых получено ее решение получили независимое развитие в работах П. Лапласа. Лаплас получил решение интегралов в (3) аналитическим путем. Аналитическое решение является основанием для адаптации решения к проблеме индукции. Пусть проведено r испытаний, из которых m испытаний были успешными, тогда вероятность следующего успешного испытания дается следующей формулой: $m + 1/r + 2$. При однородных испытаниях, когда все r проведенных испытаний были успешными, получаем, что вероятность следующего успешного испытания будет: $r+1/r+2$. Правило последовательности Лапласа при однородных испытаниях оказывается адекватным для анализа критического утверждения Юма о том неверно говорить, что после наступления ночи, только вероятно, а не точно будет день. Лаплас пишет: «Возьмем наиболее древнюю эпоху истории 5000 лет назад, или 1826213 дней, и солнце восходило постоянно в этом интервале вращаясь постоянно 24 часа, тогда можно сделать ставку 1826214 к одному, что оно взойдет снова завтра» [13].

Правило последовательности Лапласа было получено на основе эпистемологического постулата, о том, что все возможные события, при условии отсутствия предпочтений о шансах их появления, признаются одинаково вероятными. Другими словами при n испытаниях число k успехов $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ является одинаково вероятным. Этот принцип, получивший впоследствии название принципа индифферентности, приводит к противоречиям, и был нами проанализирован в работе [14]. Однако остается вопрос об адекватности этого принципа проблемам индукции? Впервые вопрос об основательности принципа симметрии, лежащего в основе подхода П. Лапласа, был поднят Г. Булем, создателем булевой алгебры. Буль полагал, что интуитивность предположения Лапласа будет, по крайней мере, косвенно подтверждена, если окажется обоснованным предположение об одинаковой вероятности всех исходов. Пусть $n = 3$, тогда все возможные исходы это все последовательности нулей и единиц от 000 до 111 включительно. Буль не занимался поставленной им проблемой, она была исследована независимо в работах В. Джонсона и Р. Карнапа [15]. Карнап показал, что в постановке Буля все возможные результаты оказываются независимыми. Например, условная вероятность P(00/10) = P(00). Другими словами обучение с использованием симметрии этого типа оказывается невозможным, что недопустимо для проблемы индукции. В постулатах симметрии, предназначенных для анализа проблемы индукции, имеется очевидная тенденция, заключающаяся в уменьшении степени использования симметрии. Так в работах Байеса и Лапласа симметрия касалась числа успехов, для каждого числа успехов имеется одна и та же вероятность реализации. В предложении Буля симметричными оказывались упорядоченные группы результатов с одним и тем же числом испытаний. Английский логик Вильям Эрнст Джонсон с одной стороны обобщил результаты Байеса и Лапласа. В их исследованиях результаты испытаний были двух типов, скажем при бросании монеты это герб и решка. Джонсон же рассматривал результаты t типов. С другой стороны, в его исследованиях симметрия касалась не всех результатов испытаний, а только успешных испытаний выделенного типа и общего числа испытаний. Симметрия в его подходе учитывается на основе постулата достаточности Джонсона.

Постулат Джонсона заключается в определении вероятности типа j последующего результата только на основе числа успешных результатов Xj типа j и общего числа испытаний n, но не зависит от числа успехов других типов. Для пояснения его новаций дадим необходимые строгие определения и полученные на основе этих определений результаты. Постулат достаточности Джонсона:

$$P[X_{n+1} = j / X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ \dots, \ X_n = i_n] = f(n_j, n). \qquad (12)$$

На основе постулата достаточности Джонсон доказал следующую теорему [16].

Теорема. Если вероятность (12) удовлетворяет постулату достаточности, то или результаты независимы, или существует такая постоянная k, что

$$P[X_{n+1} = j / X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ \dots, \ X_n = i_n] = \{j + k\}/\{n + tk\} \qquad (13)$$

Результат теоремы Джонсона получил критику преимущественно в работах философов, признающих, прежде всего логическую вероятность. В рамках логической концепции необходимо, что бы вероятности описывались единственной мерой. В подходе Джонсона постоянная k не определяется однозначно. Позднее Карнап в большой степени, повторивший результаты Джонсона показал, что существует континуум возможных вероятностных мер для изучаемой ситуации. Другая критика постулата Джонсона связана с тем, что он требует для применения знания большого объема предварительной информации [17].

В отличие от естественных наук, где идея симметрии используется на основе объективных оснований, в стохастической математике, в частности в байесовском анализе идея симметрии вводится на основе эпистемологических рассуждений. Идея привлечения симметрии на основе эпистемологического анализа связана с попытками математиков решить проблему индукции Юма. Впервые идея эпистемологической симметрии была использована Байесом при доказательстве теоремы, обратной к теореме Муавра. Прайс, душеприказчик Байеса понял, что доказанный Байесом результат, и использованный последним принцип эпистемологической симметрии адекватны для интерпретации и частичного решения проблемы индукции Юма. Лаплас независимо от Байеса пришел к принципу эпистемологической симметрии, и в отличие от Байеса он получил аналитическое решение теоремы Муавра. Решение Лапласа позволяет получить, что при наблюдении n одинаковых результатов в n последовательных экспериментах, если n достаточно большое число, то вероятность получения того же результата в n + 1 раз близка единице. В какой степени подход Байеса, Лапласа, Джонсона, Карнапа адекватен концепции Юма? Принял бы он их решения?

По нашему мнению это частичное решение проблемы Юма, так как оно получено для специальных условий: независимых экспериментах, принятии одинаковых вероятностей для любого числа успехов (принцип симметрии). Кроме того, как известно, в частности из оценки Суппеса, Юм не очень серьезно относился к идее вероятности. Однако, при большом числе повторных результатов вероятность получения результата, совпадающего с предыдущими, равна единице. Поэтому высоковероятный результат является частичным решением проблемы Юма.

При исследовании проблемы индукции идея симметрии всегда использовалась. Однако использовались различные варианты симметрии. Начиная с Буля, идея равновероятности Лапласа для любого числа успехов была заменена на идею одинаковой вероятности всех возможных результатов. Это привело к невозможности обучения, что неадекватно для решения проблемы индукции. Далее была популярна идея

Джонсона рассматривать результаты не двух типов(удача, неуспех), а множественности типов, но при определении вероятности конкретного результата ограничиться симметрией по отношению к результатам данного типа. Затем при исследовании проблем индукции стала популярна частичная заменяемость. Интерес к последнему виду симметрии связан со связью частичной заменяемости со значимой в статистике проблемой достаточности. В самое последнее время популярны попытки использования идеи симметрии в контексте игровых подходов в теории вероятностей, в качестве примера приведем результаты [18].

Отметим, что самым сильным свидетельством в пользу идеи симметрии вне решения проблемы индукции считается теорема де Финнетти. В ней устанавливается связь субъективной и частотной концепций. Однако при очень сильных допущениях бесконечном числе независимых экспериментов, причем, вероятность любой серии исходов зависит, только от числа успешных исходов, но не от порядка, в котором реализовались успешные результаты [19]. Несмотря на определенные успехи в применении идеи симметрии, известно множество неинтуитивных результатов, связанных с ее применением даже для простых ситуаций [20].

Примечания

1. См.: *Шейнин О.Б.* http://www.sheynin.de/download/bayes.pdf, С.3.

2 Там же.

3. См.: *Курно О.* Основы теории шансов и вероятностей. – М.: Наука, 1970.

4. См.: *Резников В.М.* Проблема точных вычислений в байесовской концепции // Вест. Новосиб. ун-та. Сер. Философия. – Новосибирск, 2007. – Т. 2, вып. 1. – С. 22–28.

5. См.: *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. – М., Прогресс, 1978.

6. См.: *Chatterjee K.C.* Statistical Thought: A Perspective and History. – Oxford.: Oxford Univ. Press, 2003.

7. См.: *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М., Наука, 1988.

8. См.: *Chatterjee K.C.* Statistical Thought: A Perspective and History. – Oxford.: Oxford Univ. Press, 2003. – P. 201.

9. См.: *Шейнин О.Б.* http://www.sheynin.de/download/bayes.pdf

10. Там же. – С. 3.

11. См.: *Zabell S.* Symmetry and its discontents. – Cambridge.: Cambridge Univ. Press, 2005. – P. 76.

12. Ibid. – P. 45.

13. См.: *Laplace P.* Essai philosophique sur les probabilitres. – V. 7. – Paris: Gauthier-Villars, 1886. – P. xvii.

14. См.: *Резников В.М.* Логическая вероятностная концепция Д. Кейнса: методологический анализ // Вестн. Новосиб. ун-та. Сер. Философия. Новосибирск, 2010. – Т. 8, вып. 2. – С. 37–41.

15. См.: *Carnap R.* Logical Foundations of Probability. – Chicago.: The University of Chicago Press, 1950.

16. См.: *Zabell S.* Symmetry and its discontents. – Cambridge.: Cambridge Univ. Press, 2005, – P. 10.

17. *Good, I.J.* The Estimation of Probabilities: An essay on modern Bayesian methods. – Cambridge.: Mass.: M.I.T. Press, 1950.

18. См.: *Schurz G.* The Meta-inductivist's winning strategy in the prediction game: a new approach to Hume problem // Philosophy of science, 2008. – V. 75, No. 3. – P. 278–305.

19. См.: *Zabell S.* Symmetry and its discontents. – Cambridge.: Cambridge Univ. Press, 2005, – P. 4.

20. Ibid. – P. 30.

Дата поступления 22.04.2011

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
rvm@philosophy.nsc.ru

Reznikov V.M. **Symmetry in stochastic mathematics: philosophical and methodological analysis**

The article demonstrates the value of symmetry in stochastic mathematics for partial solution of the induction problem stated by Hume and shows the importance of Bayes' Second Theorem together with the principle of epistemological symmetry used for its proof as a tool of solving the induction problem. Bayes' second theorem is the reverse variant of de Moivre's theorem. Bayes' first theorem is the best known one, it is a theorem of the elementary probability theory, and it was, in fact, proved by Laplace. He, independently of Bayes, formulated the principle of epistemological symmetry, and his improved method of proof of de Moivre's theorem led to a clear interpretation of the theorem which provided a partial solution to the Hume problem: under multiple repetitions of the same results the probability of the next success is very close to one. Presently, the most adequate kind of symmetry for the solution of the induction problem is the symmetry defined by means of Markov exchangeability. As Markov exchangeability is connected with the notion of statistical sufficientness, the latter plays an important role in the theory and practice of mathematical statistics.

Keywords: the problem of induction, Hume, Bayes' theorems, Moivre's theorem, Laplace's rule of successions