«PRINCIPIA MATHEMATICA» О ПРИРОДЕ ЛОГИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ*

В.А. Ладов

Статья посвящена исследованию природы логических парадоксов. Утверждается, что принцип порочного круга, который авторы «Principia Mathematica» рассматривали как универсальное основание парадоксальности, не является таковым по отношению по крайней мере к некоторым парадоксам. В частности, парадокс класса всех стандартных классов, сформулированный Б. Расселом, имеет иную природу и должен получить объяснение своего появления исходя из иного основания, отличного от принципа порочного круга.

Ключевые слова: логика, парадокс, основания

А. Уайтхед и Б. Рассел в «Principia Mathematica» указывают следующее общее основание возникновения логических парадоксов: «Анализ парадоксов, которых необходимо избежать, показывает, что все они проистекают из порочного круга некоторого вида. Порочные круги возникают при предположении, что некоторое собрание объектов может содержать элементы, которые могут быть определены лишь посредством этого собрания как единой совокупности» [1].

При этом сами авторы «Principia Mathematica» в этом месте ссылаются на работу А. Пуанкаре «Математика и логика» [2] как на основание собственных взглядов. Пуанкаре ведет речь о так называемом petitio principii – порочном круге, при котором в доказательстве какого-либо положения используется само это положение. В качестве одного из примеров французский математик приводит определение единицы у Ч. Бурали-Форти: «Мы видим, что Бурали-Форти опреде-

* Статья подготовлена при поддержке РФФИ (проекты № 10-06-00039-а, 12-06-00078-а), РГНФ (проект № 11-03-00039-а), а также в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научных исследований (тематический план НИР Томского государственного университета) № 6.4832.2011.

ляет число 1 следующим образом: $1 = \mathrm{t}T'\{\mathrm{Ko} \cap (u,h)\varepsilon(u\varepsilon\mathrm{Un})\}$. …Я опасаюсь, что это определение заключает petitio principii, так как я вижу цифру 1 в первой части и изображенное буквами слово "один" (Un) во второй части равенства» [2].

Понимание порочного круга у А. Пуанкаре и его понимание у А. Уайтхеда и Б. Рассела – на самом деле подобны. Разница только в том, что первый говорит о круге в определении того или иного понятия, тогда как авторы «Principia Mathematica» – о порочном круге при построении определенных объектов (классов, множеств). В данном исследовании нас будет интересовать именно вопрос построения множеств, поэтому мы примем за основу ту трактовку порочного круга в рассуждении, которая дается авторами «Principia Mathematica». Проанализируем их тезис более подробно.

Во-первых, «все они (парадоксы. – *В.Л.*) проистекают из порочного круга некоторого вида», и, во-вторых, этот порочный круг возникает при определенном предположении. Данное предположение состоит в том, что некоторый класс объектов может содержать в качестве элемента себя самоё, взятое как единое целое. Таким образом, мы имеем совокупность индивидов, в которую входит как отдельный индивид сама эта совокупность. Можно проиллюстрировать порочный круг, описанный в «Principia Mathematica» с помощью метафоры «Каталог». Допустим, директор библиотеки дает поручение своим сотрудникам составить каталог всех каталогов данной библиотеки. Сотрудники берут каталог периодических изданий, добавляют к нему каталог иностранной литературы, различные тематические каталоги и т.д. Поскольку поручение директора состояло в том, чтобы составить каталог *всех* каталогов, постольку в данный каталог должен войти и он сам после того, как будет составлен. Однако чтобы его составить и чтобы он смог войти в качестве элемента в себя самое, необходимо, чтобы он уже оказался законченным элементом, который можно использовать. Проще говоря, необходимо, чтобы он уже был составлен. Возникает парадоксальная ситуация: для того чтобы что-то возникло, необходимо, чтобы оно уже существовало.

Основание подобного рода парадоксальности состоит в затруднении прояснения соотношения части и целого. Целое может быть образовано только тогда, когда даны все его части. Но если задано условие, в соответствии с которым одной из частей целого является оно само, то для того, чтобы образовать целое, оно уже должно существовать. Попытка образовать целое в данном случае оказывается пустым занятием, потому что реализовать ее либо невозможно (если целое еще не образовано), либо ненужно (если оно и так уже есть). Невозможно составить каталог всех каталогов, ибо чтобы сделать это, необходимо, чтобы он уже существовал. Если же он уже существует, то поручение директора библиотеки оказывается просто бессмысленным.

Д. Гильберт и В. Аккерман, обсуждая расселовскую теорию типов в своей работе «Основы теоретической логики», по-своему проясняют принцип порочного круга, однако суть дела при этом не меняется: «…Выражения, которые получают смысл лишь через отношение к совокупности высказываний (соответственно – функций), в свою очередь, причисляются к высказываниям или функциям, между тем как, с другой стороны, чтобы иметь возможность ссылаться на совокупность высказываний или функций, мы должны рассматривать последнюю как заранее определенную. Здесь перед нами, таким образом, нечто вроде логического круга, и мы имеем основание предполагать, что этот круг является причиной парадоксов» [4].

Основная цель данной статьи состоит в попытке указать на ту достаточно курьезную ситуацию, в которую, как нам представляется, попадает по крайней мере один из авторов «Principia Mathematica» – Б. Рассел. Думается, что подобного рода указание было бы небезынтересным для специалистов в области истории философии логики и математики. Дело в том, что когда Рассел в «Principia Mathematica» заявляет о порочном круге, возникающем в том случае, если целое становится своей частью, как об общем основании появления логических парадоксов, то это никак не согласуется с природой того парадокса, который он же сам ранее сформулировал в письме к Г. Фреге.

В 1902 г. Б. Рассел написал Г. Фреге письмо, в котором указывал на логические затруднения, возникающие при отсутствии каких-либо ограничений на образование множеств (классов): «Вы утверждаете, что функция может быть неопределяемым элементом. Я тоже так считал, но теперь этот взгляд кажется мне сомнительным из-за следующего противоречия: Пусть *w* будет предикатом "быть предикатом, неприложимым к самому себе". Приложим ли *w* к самому себе? Из любого ответа вытекает противоречие. Стало быть, мы должны заключить, что *w* не является предикатом. Также не существует класса (как целого) тех классов, которые как целое не являются членами самих себя. Отсюда я заключаю, что при определенных обстоятельствах определяемое множество не образует целого» [5].

Так был сформулирован парадокс, который в дальнейшем в логической литературе называли парадоксом множества всех непредикативных множеств или парадоксом класса всех стандартных классов. Существует два вида классов: стандартные и нестандартные. Стандартным называется класс, который не включает себя самое в качестве собственного элемента. Например, класс всех яблок является стандартным. Он включает в себя конкретные объекты материального мира – яблоки, но не включает в качестве собственного элемента себя самое, поскольку класс всех яблок сам яблоком уже не является. Таких классов подавляющее большинство: класс всех людей, класс всех деревьев, класс всех столов и т.д. Поэтому они и именуются стандартными. Однако существуют и специфические, нестандартные классы. Нестандартным называется класс, который включает себя самое в качестве собственного элемента. Например, класс всех предметов, не являющихся яблоками, является нестандартным. Он включает в себя все предметы, не являющиеся яблоками, а именно, людей, деревья, столы и т.д. Но при этом и сам класс предметов, не являющихся яблоками, также может быть рассмотрен как предмет, не являющийся яблоком. Поэтому данный класс включает себя самое в качестве собственного элемента.

Б. Рассел видит проблему в образовании класса всех стандартных классов. Класс всех классов, не являющихся членами самих себя, оказывается противоречивым в том смысле, что по отношению к нему мы с одинаковой претензией на истинность можем высказать два противоречащих друг другу суждения. Истинным является как суждение «Класс всех стандартных классов есть стандартный класс», так и противоречащее ему «Класс всех стандартных классов есть нестандартный класс». Если мы допустим, что класс всех стандартных классов стандартен, то он должен стать членом самого себя, ведь это класс, включающий в себя все возможные стандартные классы. Но в таком случае, мы приходим к выводу, что этот класс является нестандартным. Если мы допустим, что класс всех стандартных классов является нестандартным, то мы должны рассмотреть его в качестве члена себя самого. Но членами данного класса являются только стандартные классы, и поэтому мы приходим к выводу, что данный класс тоже является стандартным.

С подачи Б. Рассела в более популярной формулировке данная проблема часто фиксируется в парадоксе под названием «Брадобрей». Брадобрей – деревенский цирюльник, в чьи обязанности входит брить только тех жителей деревни, которые не могут бриться сами. Встает вопрос: может ли брадобрей брить себя самого? Если мы предполагаем, что может, то он попадает в класс тех людей, которые не могут бриться сами, и поэтому мы приходим к выводу, что данное действие в отношении себя он осуществить не в состоянии. Если мы предполагаем, что не может, то он становится членом той группы людей, в отношении которых он осуществляет свою деятельность, и поэтому мы приходим к выводу, что он может себя побрить.

Если мы посмотрим на описанные выше парадоксы, такие как парадокс образования предиката «быть предикатом, неприложимым к самому себе», парадокс класса всех стандартных классов, парадокс «Брадобрей», то увидим, что все они имеют одно общее свойство. В каждом из этих случаев осуществляется попытка замкнуть на себя самое, обратить по отношению к себе самому некоторое свойство, имеющее какую-либо негативную характеристику. Так, ставятся вопросы о том, приложим ли к себе самому предикат «быть предикатом, *не*приложимым к самому себе», содержит ли себя самое класс всех классов, *не* содержащих самих себя в качестве собственных элементов, может ли брадобрей побрить себя самого при том условии, что он должен брить только тех, кто *не* может бриться самостоятельно. По сути, основанием возникновения парадоксов во всех этих случаях является то, что можно было бы назвать «негативной автореферентностью». Как только мы задаем вопрос о том, применимо ли к суждению, в котором задается негативное свойство по отношению к некоторым объектам, само это негативное свойство, возникает парадокс.

Как уже было заявлено выше, данное основание парадоксальности, на наш взгляд, никак не согласуется с тем, которое было сформулировано в «Principia Mathematica» как общее основание логических парадоксов. Парадоксальность класса всех стандартных классов возникает не на основе того, что этот класс уже должен существовать в качестве собственного элемента, чтобы быть образованным. Здесь дело не в проблеме части и целого, не в проблеме самого образования данного класса. Парадокс возникает позже, при попытке задать данному классу определенную характеристику. По сути, парадокс возникает уже на основании предположения, что данный класс построен. Мы предполагаем, что данный класс имеет место и пытаемся определить, является ли он стандартным или нестандартным. В случае же порочного круга при соотношении части и целого проблема состоит в том, чтобы класс, включающий себя самое, в принципе был построен. Парадоксальность характеристики класса всех стандартных классов возникает из-за того, что стандартный класс имеет негативное свойство – быть классом, *не* включающим себя самое. Тогда при попытке отдать отчет о классе всех классов, содержащих данное негативное свойство, возникает явление негативной автореферентности: мы не знаем, можно ли приписать это же свойство общему классу.

Разница в указанных основаниях парадоксальности хорошо видна на примере соотношения стандартных и нестандартных классов. Класс всех нестандартных классов не является парадоксальным в том смысле, в каком Б. Рассел считает парадоксальным класс всех стандартных классов. В самом деле, пусть класс всех нестандартных классов является нестандартным. В таком случае у нас нет оснований заключать, что мы тут же должны признать его стандартным. Класс всех нестандартных классов содержит в качестве элементов все возможные нестандартные классы. Если класс всех нестандартных классов мы признаем нестандартным, то он становится своим собственным элементом без каких-либо противоречий. Классу всех нестандартных классов не могут быть приписаны одновременно два противоречивых свойства (быть стандартным и быть нестандартным), как это имело место в случае класса всех стандартных классов.

В то же время образование класса всех нестандартных классов может быть рассмотрено с точки зрения принципа порочного круга. Если класс всех нестандартных классов является нестандартным, то в качестве одного из своих элементов он должен содержать совокупность всех нестандартных классов, мыслимую как единое целое. В таком случае при построении данного класса мы уже должны допускать его существование, в результате чего возникает порочный круг в рассуждении.

Означает ли это, что принцип порочного круга в самом деле является более глубинным основанием парадоксальности, нежели принцип негативной автореферентности? Каким бы ни был ответ на этот вопрос, мы все же можем с определенностью утверждать, что парадокс класса всех стандартных классов с точки зрения того, в чем именно Б. Рассел усматривал его парадоксальность, основывается именно на явлении негативной автореферентности, хотя и к построению данного класса применим критический аргумент, основывающийся на принципе порочного круга.

В современной логике распространенным является мнение, в соответствии с которым все логические парадоксы следует разделять на теоретико-множественные (логико-математические) и семантические (лингвистические). Такое различие проводит, например, Ф. Рамсей: «Группа А (к которой относится и парадокс Рассела. – *В.Л.*) состоит из противоречий, которые, если против них не принять меры предосторожности, встречались бы в самих логических и математических системах. Они включают только логические или математические термины, такие как класс и число, и показывают, что здесь должна быть какая-то ошибка с нашей логикой или математикой. Но противоречия группы В (в которую попадают, например, парадокс "Лжец" или парадокс "Гетерологическое". – *В.Л.*) не являются чисто логическими и не могут быть сформулированы в одних логических терминах, ибо все они содержат некоторую отсылку к мысли, языку или символизму, которые являются не формальными, но эмпирическими терминами. Поэтому своим возникновением они могут быть обязаны не ошибочной логике или математике, но ошибочным идеям, касающимся мысли и языка» [6].

Нам думается, что выводы, которые мы делаем из анализа парадокса Рассела, позволяют представить оригинальное основание классификации парадоксов. Теоретико-множественные парадоксы действительно возникают на основании порочного круга, указанного в «Principia Mathematica», и введение ограничений на построение множеств в самом деле оказывается необходимым по данному основанию. Например, парадокс Кантора о множестве всех множеств может быть проанализирован с точки зрения принципа порочного круга. Однако так называемые семантические парадоксы возникают на совершенно ином основании. К ним вообще неприменим принцип порочного круга, их основанием выступает явление негативной автореферентности. Парадокс "Лжец", который в формулировке У. Куайна выглядит следующим образом: «…Критянин Эпименид говорит, что все критяне лгут; следовательно, его высказывание должно, в случае истинности, быть ложным» [7], – наиболее красноречиво демонстрирует эту специфику семантических парадоксов.

Проблема Эпименида не в том, что он в своем суждении «Все критяне лгут» должен сделать предметом рассмотрения каждое конкретное суждение каждого конкретного жителя острова Крит, а также совокупность этих суждений, взятых как единое целое. Дело не в том, что Эпименид в принципе не может продуцировать суждение «Все критяне лгут», потому что должен включить в его предметную область свое собственное суждение и затем еще рассмотреть все эти суждения как единое целое. Речь здесь не идет ни о какой совокупности, рассматриваемой как отдельный элемент предметной области. Проблема заключается в попытке задать характеристику еще одному *конкретному* суждению наряду с другими конкретными суждениями жителей острова Крит, а именно, суждению самого Эпименида «Все критяне лгут». В данном случае мы не говорим, что у нас возникает затруднение в продуцировании этого суждения. Скорее, у нас возникает затруднение в его оценке. В свою очередь, невозможность однозначной истинностной оценки данного суждения возникает, как уже было сказано, на основании явления негативной автореферентности. Эпименид в своем суждении приписывает каждому жителю острова Крит негативное свойство, а именно: все они *не* говорят правду. И когда встает вопрос о том, можем ли мы приписать это же негативное свойство самому суждению Эпименида, то здесь и возникает парадокс.

Парадокс Рассела о классе всех стандартных классов занимает в данной классификации особое место. В нем можно усмотреть сразу два выделенных основания парадоксальности. Данный парадокс может рассматриваться как своеобразное соединительное звено между теоретико-множественными парадоксами типа парадокса Кантора о множестве всех множеств и семантическими парадоксами типа парадокса «Лжец». Коллизия, заключающаяся в несоответствии общего принципа парадоксальности, формулируемого в «Principia Mathematica», и способа формулировки парадокса класса всех стандартных классов, состоит в том, что авторы «Principia Mathematica» делают акцент на основании, характерном для теоретико-множественных парадоксов, тогда как парадокс Рассела формулируется скорее на том основании, которое характерно для семантических парадоксов.

Примечания

1. *Уайтхед А., Рассел Б.* Основания математики: В 3 т.– Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2005. – Т. I. – С. 110.
2. См.: *Пуанкаре А.* Наука и метод // Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 283–403.
3. Там же. – С. 377.
4. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – С. 208–209.
5. *Frege G.* Philosophical and Mathematical Correspondence. – Oxford: Basil Blackwell, 1980. – P. 130–131.

6. *Рамсей Ф.* Основания математики // Рамсей Ф. Философские работы. – М: Канон+, 2011. – С. 38.

7. *Куайн У.* Заметки по теории референции // Куайн У.В.О. С точки зрения логики. – М.: Канон+, 2010. – С. 191–192.

Дата поступления 12.05.2012

Томский государственный
университет, г. Томск
ladov@yndex.ru

Ladov, V.A. **«Principia Mathematica» about the nature of logic paradoxes**

The paper studies the nature of logic paradoxes. It states that the vicious circle principle treated as a universal basis of paradoxicality in «Principia Mathematica» is not the same at least in regard to certain paradoxes. Thus, Russel's paradox of the class of all classes has a different nature, so it is necessary to explain its occurrence on different grounds which are not similar to the vicious circle principle.

Keywords: logic, paradox, basis