ЛОГИЧЕСКИЕ МОДАЛЬНОСТИ КАК АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ – 1

Н.Л. Архиереев

В статье представлено краткое описание принципиально нового подхода к анализу понятий логической необходимости, возможности и случайности. При данном подходе роль возможных миров и модельных структур семантик возможных миров выполняют ограниченные и относительно ограниченные множества описаний состояний. Они позволяют описывать модальные системы в традиционных терминах (логической) истинности и (логической) ложности и осуществлять доказательства теорем о полноте соответствующих систем относительно семантик данного типа финитными средствами.

Ключевые слова: логика, модальность, возможные миры

Неформальные замечания

При построении семантик модальных исчислений в современной логике в качестве исходных обычно используются понятия модельной структуры, возможного мира и отношения достижимости между мирами. Несмотря на то, что данные понятия общеприняты, их смысл во многом остается неясным. Так, иногда под возможным миром подразумевают мыслимое (возможное, действительное или необходимое) положение дел, состояние наших знаний об окружающем мире в определенный момент времени и т.д. Иногда предлагается вообще не конкретизировать понятие возможного мира, а рассматривать его просто как абстрактную «точку соотнесения», выбор которой в качестве исходной («выделенной») в семантическом анализе модальных понятий определяется задачами данного анализа или же особенностями отношения достижимости в соответствующей системе. При этом «размножение» самих систем, называемых модальными, осуществляется в основном сугубо формальными методами, например наложением дополнительных, зачастую весьма экзотических ограничений на отношение достижимости между мирами. Указанная ситуация кажется тем более странной, что метод «возможных миров» широко используется не только для уточнения смысла алетических модальных понятий, но и при построении семантик для систем с временными, эпистемическими, деонтическими модальностями, при истолковании интуиционистских и релевантных систем. Поэтому проблема построения семантик модальных систем, не использующих понятия «модельная структура», «возможный мир», «отношение достижимости», представляет интерес не только для модальной логики самой по себе, но и для всех логических систем, в основе которых лежат определенные модификации названных понятий.

Попытки содержательно истолковать указанные понятия предпринимались неоднократно. Так, Е.К. Войшвилло писал о семантике возможных миров для $S5$: «…Мир β естественно трактовать как множество фактов, относящихся к индивидам некоторого непустого множества с определенными на нем свойствами и отношениями. …В языке это множество фактов представляет обычное классическое карнаповское описание состояния (о.с.). …Описания мира β можно представить как $\Gamma \cup \alpha$, где α есть классическое о.с., а Γ – множество… законов и, возможно… некоторых их следствий нефактического характера в языках рассматриваемых систем… Существенно, что Γ ограничивает множество возможных различных фактических состояний мира. Так, при наличии закона $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ исключаются о.с. α, в которых имеются $A(a_i)$ и одновременно $\rceil B(a_i)$ для любых индивидов a_i. Если М есть множество всех возможных классических о.с., то Γ выделяет из него подмножество M^{Γ} (которое не является пустым в силу непротиворечивости Γ). Это последнее представляет собой модельную структуру $S5$, если учесть, что отношение достижимости $\boldsymbol{R}$ имеет место для любых $a_i, a_j \in M_{\Gamma}$» [1].

Наличие сложных итерированных модальностей вида $\Diamond$, $\Diamond$ в более «богатой» системе $S4$ предполагает, по мнению Е.К. Войшвилло, «возможность каких-то изменений Γ, по крайней мере за счет появления каких-то следствий нефактического характера из имеющихся законов» [2]. (Опровержимость формулы $\Diamond A \supset \Diamond A$ в $S4$ подразумевает, что при $\rceil A$ (т.е. $\Diamond \rceil A$) в исходном α может оказаться A в некотором β, достижимом из него.) Кроме того, отношение достижимости $\boldsymbol{R}$ в $S4$ является, как известно, рефлексивным и транзитивным, но, в отличие от $S5$, уже не симметричным, т.е. в $S4$-модельной структуре каждый мир не достижим из каждого, поэтому существенным оказывается понятие выделенного (действительного) мира. Тем не менее вполне возможен вариант семантической теории *S*4, в котором понятие модельной структуры можно исключить, как и в *S*5 [3].

Основные принципы построения семантик исчислений *S*5, *S*4, *M*, в которых не используются ставшие традиционными понятия модельной структуры, возможного мира, отношения достижимости между мирами, а сами модальные понятия рассматриваются как логические, были предложены Ю.В. Ивлевым [4]. При данном подходе каждое элементарное (атомарное) высказывание последовательно рассматривается как логически истинное (необходимое), логически недетерминированное (случайное), логически ложное (невозможное) высказывание. Далее, если два и более элементарных (атомарных) высказывания истолковываются как случайные, каждая их конъюнкция последовательно рассматривается как возможное или невозможное высказывание (поскольку конъюнкция случайных высказываний может оказаться логически ложной: «31 декабря 2019 года будет всемирный банковский кризис и 31 декабря 2019 года всемирного банковского кризиса не будет»). В результате таких интерпретаций – ограничений на допустимые истинностные значения элементарных высказываний из исходного множества о.с. для формулы могут исключаться некоторые о.с. Так, если некоторая переменная рассматривается как обозначающая невозможное (т.е. логически ложное, невыполнимое) высказывание, то из множества всех возможных о.с. для формулы, содержащей эту переменную, исключаются все о.с., в которые она входит без отрицания. В итоге на базе исходного множества о.с. для формулы создаются особые конструкции – ограниченные и относительно ограниченные множества о.с. (ОМОСы и ОГОСы соответственно), выполняющие роль модельных структур семантик возможных миров [5]

Далее рассмотрим, как строится семантика указанного типа для системы *S*5 К.И. Льюиса.

Трехзначная не-истинностно-функциональная семантика для S5

Опишем семантику интересующего нас вида для пропозиционального фрагмента *S*5. Пусть язык содержит исходные символы $\rceil$, $\supset$,   (оператор логической необходимости). Понятие формулы и другие логические связки определяются обычным образом. Операторы логической возможности и случайности определяются соответственно как $\Diamond A = \rceil \quad \rceil A$ и $\nabla A = \Diamond A \wedge \Diamond \rceil A$.

Как указывает Ю.В. Ивлев, основой для ограничения возможных истинностных значений переменных модализированной формулы являются элементарные содержательные соображения. Рассмотрим, к примеру, формулу $q \supset \Diamond(p \supset \ q)$ и все возможные о.с. для нее: $\alpha_1 = \{p, q\}$, $\alpha_2 = \{p, \rceil q\}$, $\alpha_3 = \{\rceil p, q\}$, $\alpha 4 = \{\rceil p, \rceil q\}$.

В описаниях состояний α_2, α_4 ложным является элементарное высказывание q, а значит – и высказывание q, поскольку высказывание, принимающее значение f («ложь») при некоторой интерпретации, не может считаться логически истинным. Значит, в этих о.с. формула $q \supset \Diamond(p \supset \ q)$ принимает значение t («истина») независимо от значения p. В описании состояния α_3 переменная p истолковывается как обозначающая ложное высказывание, поэтому в этом о.с. формула $(p \supset \ q)$ принимает значение t независимо от значения q и q. (Иными словами, если p в данной формуле рассматривается как обозначающая невозможное высказывание, то исходная формула оказывается истинной при любом значении q.) Наконец, в о.с. α_1 истинными оказываются оба элементарных высказывания p и q.

Что можно сказать в этом случае о значении исходной формулы? Необходимо рассмотреть четыре возможности:

1) p и q обозначают необходимые (логически истинные) высказывания. Допустимым относительно такой интерпретации возможных значений переменных будет одноэлементное множество о.с. $\{\{p, q\}\}$;

2) p обозначает необходимое (логически истинное) высказывание, q – логически случайное. Такому ограничению допустимых значений переменных будет соответствовать двухэлементное множество о.с. $\{\{p, q\}; \{p, \rceil q\}\}$;

3) p обозначает случайное, высказывание q – необходимое. Такой интерпретации будет соответствовать набор о.с. $\{\{p, q\}; \{\rceil p, q\}\}$;

4) обе переменные «истинны случайным образом», т.е. обозначают логически недетерминированные высказывания. В таком случае возможными наряду с α_1 оказываются все остальные о.с. для формулы.

Последний случай требует некоторых дополнительных ограничений на возможные сочетания высказываний p, q: как указывалось выше, конъюнкция двух или более высказываний, по отдельности являющихся недерминированными, может оказаться невозможным высказыванием.

Поэтому в подобных случаях необходимо учитывать все допустимые варианты образования таких «невозможных» конъюнкций. Какие же варианты являются допустимыми? Из вышесказанного вытекает, что «детерминистская» интерпретация возможных значений некоторой переменной (т.е., скажем, $p \vee \rceil \Diamond p$) может задаваться единичным о.с., точнее, единичным множеством о.с., которое выполняет условия соответ-ствующей интерпретации. Но чтобы при помощи последовательности (множества) о.с. корректно представить ограничение *Cp*, описаний состояний в соответствующем множестве должно быть не менее двух, так как интерпретация *Cp* предполагает, что переменная *p* в сответствующем множестве по крайней мере однажды меняет значение. Стало быть, допустимыми будем считать все такие варианты образования «невозможных» конъюнкций двух и более случайных высказываний, при которых соответствующее множество о.с. содержит «от» 2^1 «до» 2^n о.с. и каждая переменная в этом множестве по крайней мере однажды меняет значение.

Будем, вслед за Ю.В. Ивлевым, называть ОМОСом (ограниченным множеством описаний состояний) двухэлементное множество <*ОГ*; *W'*>, где *ОГ* – интерпретация переменных, входящих в формулу в качестве (логически) необходимых, случайных или невозможных высказываний, а *W'* – соответствующее такой интерпретации множество о.с.; $W' \in 2^W$, где *W* есть исходное 2^n-элементное множество о.с. для формулы с *n* переменными. Далее, если *ОГ* некоторого ОМОСа содержит две или более интерпретации вида *Cp*, то на его основе строится множество всех допустимых (в обозначенном выше смысле) дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний, входящих в формулу. В результате по каждому такому ОМОСу мы получаем некоторое множество дополнительно ограниченных множеств описаний состояний (подОМОСов) вида <*ОГ*; *W''*>, где *ОГ* – полное ограничение указанной структуры; *W''* – соответствующее ему множество о.с. ($W'' \subseteq W'$). (В дальнейшем изложении во избежание терминологической путаницы всюду будем использовать обозначение <*ОГ'*; *W''*>.) Тогда для приведенной ранее формулы возможными будут следующие истолкования ее переменных:

1. $<\{\ p,\ \ q\};\ \{\{p, q\}\}>$;
2. $<\{\ p, \rceil\Diamond q\};\ \{\{p,\ \rceil q\}\}>$;
3. $<\{\ \rceil\Diamond p,\ \ q\};\ \{\{\rceil p, q\}\}>$
4. $<\{\ \rceil\Diamond p;\ \ \rceil\Diamond q\};\ \{\{\rceil p,\ \rceil q\}\}>$;

$5. < \{ \quad p, \nabla q\}; \{\{p, q\}, \{p, \quad \rceil q\}\} >;$
$6. < \{ \quad \rceil \Diamond p, \nabla q\}; \{\{\rceil p, q\}, \{\rceil p, \rceil q\}\} >;$
$7. < \{\nabla p, \quad q\}; \{\{p, q\}, \{\rceil p, q\}\} >;$
$8. < \{\nabla p, \quad \rceil \Diamond q\}; \{\{p, \quad \rceil q\}, \{\rceil p, \rceil q\}\} >;$
$9. < \{\nabla p, \nabla q\}; \{\{p, q\}, \{p, \quad \rceil q\}, \{\rceil p, q\}, \{\rceil p, \quad \rceil q\}\} >.$

Для формулы с двумя переменными возможными оказались девять ОМОСов. Поскольку каждая переменная последовательно интерпретируется как необходимая, невозможная либо случайная, в общем случае число различных ОМОСов для формулы с n различными переменными определяется выражением 3^n.

Девятый ОМОС содержит два ограничения вида C, поэтому на его основе образуем следующие дополнительные истолкования:

$1. < \{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p,q\},\{p, \quad \rceil q\},\{\rceil p,q\},\{\rceil p, \quad \rceil q\}\} >.$

$2. < \{\nabla p, \nabla q, \quad \rceil \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p, \quad \rceil q\},\{\rceil p,q\},\{\rceil p, \quad \rceil q\}\} >.$

$3 . < \{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \rceil \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p,q\},\{\rceil p,q\},\{\rceil p, \quad \rceil q\}\} >.$

$4 . < \{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \rceil \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p,q\},\{p, \quad \rceil q\},\{\rceil p, \quad \rceil q\}\} >.$

$5 . < \{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \rceil \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p,q\},\{p, \quad \rceil q\},\{\rceil p,q\}\} >.$

$6 . < \{\nabla p, \qquad \nabla q, \quad \rceil$
$\Diamond\{p \wedge q\}, \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \rceil \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p, \quad \rceil q\},\{\rceil p,q\}\} >.$

$7 . < \{\nabla p, \nabla q, \Diamond\{p \wedge q\}, \rceil \Diamond\{p \wedge \quad \rceil q\}, \rceil \Diamond\{\rceil p \wedge q\}, \Diamond\{\rceil p \wedge \quad \rceil q\}\};$
$\{\{p,q\},\{\rceil p, \quad \rceil q\}\} >.$

Нетрудно убедиться, что иных допустимых ограничений на конъюнкции случайных переменных при $n = 2$ не существует. Таким образом, число всех возможных подОМОСов для формулы с двумя переменными определяется выражением $2^W - 3^n$, где W – число о.с. для формулы с n переменными. Однако, при $n > 2$ формула для определения числа допустимых подОМОСов выглядит не столь элементарно. Чтобы обобщить ее для произвольных значений n, рассмотрим еще раз число ОМОСов 3^n.

При достаточно больших значениях n это число становится весьма большим, поэтому хотелось бы иметь способ описания ОМОСов различного типа, более эффективный, чем простое поэлементное перечисление множества 3^n. Для этого нужно всего лишь представить данное число в виде эквивалентной ему арифметической функции вида

$$Cn^0 \cdot 2^n + Cn^1 \cdot 2^{n-1} + Cn^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + Cn^{n-1} \cdot 2^1 + Cn^n \cdot 2^0 = 3n,$$

где Cn^i есть биномиальный коэффициент; n – число переменных в формуле.

Каждое слагаемое в данной сумме описывает некоторый класс эквивалентности – группу ОМОСов (аналогов модельных структур) с одинаковым числом переменных, проинтерпретированных в качестве случайных. Например, первое слагаемое описывает общее число ОМОСов, *ОГ* которых истолковывает все переменные формулы как имеющие свои значения по необходимости. Ясно, что общее их число совпадает с числом о.с. для данной формулы и в каждом W'' содержится ровно одно о.с. Второе слагаемое представляет собой общее число ОМОСов, в каждом из которых в качестве случайной истолковывается какая-либо одна переменная. W'' каждого ОМОСа данной группы представляет собой двухэлементное множество о.с. Наконец, последнее слагаемое представляет собой единственный «индетерминистский» ОМОС, в котором все переменные истолковываются как случайные. Проиллюстрировать вышесказанное удобнее при помощи таблицы.

Число ограничений типа *С* в *ОГ* каждого ОМОСа группы	Число ОМОСов в группе	Число о.с. в W'' каждого ОМОСа группы
0	$Cn^0 \cdot 2^n$	20
1	$Cn^1 \cdot 2^{n-1}$	21
$0<k<n$	$Cn^k \cdot 2^{n-k}$	$2k$
$n-1$	$Cn^{n-1} \cdot 2^1$	2^{n-1}

n	$Cn^n \cdot 2^0$	2^n

При определении числа корректных подОМОСов для $n = 1$, $n = 2$ можно было исходить из элементарных соображений: все переменные в таких множествах истолковываются как случайные, поэтому для определения числа всех различных подОМОСов нужно из общего числа 2^W (где W – число всех возможных о.с. для формулы 2^n) вычесть число множеств, содержащих «детерминистские» интерпретации, т.е. 3^n. Для формул с данными n получали: $2^W – 3n$ (один и семь соответственно). Теперь рассмотрим подробнее разложение на степенные слагаемые указанного вида числа 3^n для $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$:

$$n = 3\text{: } C3^0 \cdot 2^3 + C3^1 \cdot 2^2 + C3^2 \cdot 2^1 + C3^3 \cdot 2^0 = 27.$$

Первое слагаемое обозначает число «полностью детерминированных» ОМОСов, второе – число ОМОСов с одной случайной переменной, третье – число ОМОСов с двумя случайными переменными. Ранее отмечалось, что в случае истолкования в качестве случайных двух и более переменных каждое такое истолкование порождает множество дополнительных ограничений на образование конъюнкций случайных высказываний. При n =2, как мы выяснили, таких дополнительных ограничений (подОМОСов) семь. В результате каждый элемент из группы $C3^2 \cdot 2^1$ порождает семь дополнительных «кластеров» – множеств о.с. Таким образом, при $n = 3$ число всех различных допустимых ограничений на образование конъюнкций трех случайных высказываний будет определяться выражением

$$2^8 – [C3^0 \cdot 2^3 + C3^1 \cdot 2^2 + C3^2 \cdot 2^1 \cdot 7 + C3^3 \cdot 2^0] = 256 – 63 = 193.$$

$$n = 4\text{: } C4^0 \cdot 2^4 + C4^1 \cdot 2^3 + C4^2 \cdot 2^2 + C4^3 \cdot 2^1 + C4^4 \cdot 2^0 = 81.$$

Первое слагаемое представляет число ОМОСов, в которых фиксированы значения всех переменных, второе – число ОМОСов с одной случайной переменной. Третье слагаемое – число ОМОСов, в каждом из которых какие-либо две переменные истолковываются как случайные; каждый ОМОС этой группы порождает семь подОМОСов. Наконец, четвертое слагаемое представляет собой число множеств о.с., в которых в качестве случайных истолковываются какие-либо три переменные; каждый из ОМОСов этой группы порождает набор дополнительных ограничений, равный числу допустимых ограничений на образование конъюнкций трех случайных переменных, т.е. 193. В результате при $n = 4$ число всех различных допустимых ограничений на образование конъюнкций четырех случайных высказываний будет определяться выражением

$$2^{16} - [C4^0 \bullet 2^4 + C4^1 \bullet 2^3 + C4^2 \bullet 2^2 \bullet 7 + C4^3 \bullet 2^1 \bullet 193 + \\ + C4^4 \bullet 2^0] = 65\,536 - 1\,761 = 63\,775.$$

Соответственно, для $n = 5$ интересующее нас представление числа 3^n в виде арифметической функции специального вида запишется как

$$C5^0 \bullet 2^5 + C5^1 \bullet 2^4 + C5^2 \bullet 2^3 + C5^3 \bullet 2^2 + C5^4 \bullet 2^1 + C5^5 \bullet 2^0 = 243,$$

а число всех допустимых ограничений на образование конъюнкций пяти случайных переменных будет определяться выражением

$$2^{32} - [C5^0 \bullet 2^5 + C5^1 \bullet 2^4 + C5^2 \bullet 2^3 \bullet 7 + C5^3 \bullet 2^2 \bullet 193 + C5^4 \bullet \\ \bullet 2^1 \bullet 63\,775 + C5^5 \bullet 2^0] = 4\,294\,967\,296 - 646143 = 4\,294\,321\,153.$$

Если теперь символом $N(k)$ обозначить число допустимых ограничений на образование конъюнкций k случайных переменных ($2 \leq k \leq n - 1$), то обобщение полученного алгоритма для формул с произвольным конечным числом переменных n примет следующий вид:

$$2^W - [Cn^0 \bullet 2^n + Cn^1 \bullet 2^{n-1} + Cn^2 \bullet 2^{n-2} \bullet N(2) + Cn^3 \bullet 2^{n-3} \bullet N(3) + \ldots \\ \ldots + Cn^k \bullet 2^{n-k} \bullet N(k) + \ldots + Cn^{n-1} \bullet 2^1 \bullet N(n-1) + Cn^n \bullet 2^0].$$

Отдельно отметим, что первоначально данный алгоритм формулировался нами в виде последовательности вложенных разностных коэффициентов, что значительно его усложняло. Выяснилось, что в связи с совершенно иной проблемой (организацией пересчета модельных схем традиционной силлогистики) формулировкой схожей закономерности занимался В.А. Бочаров. В приведенном выше методе подсчета допустимых ограничений на образование конъюнкций n случайных переменных существенно использованы результаты В.А. Бочарова; более того, как оказалось, число допустимых модельных схем традиционной силлогистики с n различными непустыми и неуниверсальными терминами совпадает с числом допустимых подОМОСов для формулы с n переменными, а использованное нами представление числа 3^n в виде арифметической функции специального вида удачно описывает число модельных схем аристотелевой силлогистики с n различными терминами. Более подробное исследование данного вопроса будет проведено в отдельной работе.

В предложенной семантике формулам следующим образом приписываются значения

1. Пропозициональная переменная обычным образом принимает значение t или f в о.с. $\alpha \in W''$ в зависимости от того, входит ли в α она сама или ее отрицание.

2. Формула $\rceil B$ принимает значение t в α, если и только если (е.т.е.) формула B принимает значение f в α.

3. Формула $A \supset B$ принимает значение t в α, е.т.е. формула A принимает значение f в α или формула B принимает значение t в α.

4. Формула B истинна в <$О\Gamma$; W''>, е.т.е. B общезначима в W'', т.е. истинна в каждом о.с. α из соответствующего множества.

5. Формула $\Diamond B$ истинна в <$О\Gamma$; W''>, е.т.е. B выполнима в W'', т.е. истинна в некотором (хотя бы одном) о.с. α из соответствующего множества. Фактически, при решении вопроса об истинности/ложности формул вида B, $\Diamond B$ в <$О\Gamma$; W''> мы соотносим их не с отдельным «миром» $\alpha \in W''$, а с множеством о.с. W'' «в целом», т.е. рассматриваем операторы , $\Diamond$ как кванторы $\forall$, $\exists$, пробегающие по элементам этого множества.

6. Формула B логически общезначима, е.т.е. B общезначима в каждом $W'' \in 2^W$ (в каждом элементе множества всех подмножеств исходного множества о.с. для формулы), е.т.е. В истинна в каждом о.с. $\alpha \in 2^n$.

7. Формула B логически выполнима, е.т.е. B общезначима в некотором $W'' \in 2^W$, е.т.е. В истинна в некотором $\alpha \in 2n$ (существует множество о.с. $W'' \in 2^W$, возможно, одноэлементное, в каждом о.с. которого B истинна).

8. Формула $\Diamond B$ логически общезначима, е.т.е. B логически выполнима (имеется хотя бы одно о.с. $\alpha \in 2^n$, в котором B истинна).

Таким образом, в качестве $S5$-модельных структур при данном подходе рассматриваются все возможные подмножества исходного множества о.с. для формулы. Все о.с., включенные в один «кластер» (множество W' или W''), объединены общим набором «законов» *ОГ* (аналогом *S*5-отношения достижимости), в качестве которого выступают определенные ограничения допустимых истинностных значений переменных, входящих в формулу.

В результате мы получили теоретико-множественную (экстенсиональную) трехзначную не-истинностно-функциональную семантику для *S*5: любая модальная формула принимает ровно одно значение из трехэлементного множества $\{N, C, I\}$ («логически необходимо», «логически случайно», «логически невозможно» соответственно), причем сами эти значения задаются на определенных семействах множеств подмножеств исходного множества о.с. для формулы. Не-истинностно-функциональный характер данной семантики проявляется в том, что интерпретации, скажем, ∇p будет соответствовать любая последовательность о.с. длины «от» 2^1 «до» 2^n, в каждой из которых p хотя бы однажды меняет значение.

Будем иметь в виду следующую формулировку *S*5.

К аксиомам и правилам вывода КИВ добавляются схемы аксиом:

$A1.\quad (A\supset B)\supset(\ \ A\supset\ \ B);$

$A2.\quad A\supset A;$

$A3.\ \rceil\ \ \rceil A\supset\ \ \rceil\ \ \rceil A,$

а также правило Геделя.

Метатеорема 1. Каждая теорема исчисления *S*5 Льюиса является логически общезначимой формулой.

Рассмотрим лишь аксиому *A*3. Пусть в некотором W' (или W'') формула $\rceil\ \ \rceil A$ является истинной, а формула $\ \ \rceil\ \ \rceil A$ ложной. Тогда в некотором $\alpha\in W'$ (W'') формула A является истинной, а формула $\rceil\ \ \rceil A$ ложна в данном W' (W''). Значит, в данном W' (W'') истинна формула $\ \rceil A$, т.е. в каждом $\beta\in W'$ (W'') формула $\rceil A$ является истинной и, соответственно, формула A является ложной. Пришли к противоречию, т.е. *A*3 – логически общезначимая формула.

Метатеорема 2. Каждая логически общезначимая формула доказуема в *S*5.

Доказательство осуществляется методом Кальмара. Изложим схему доказательства метатеоремы. Формулировка леммы, предшествующей доказательству собственно теоремы о полноте, будет выглядеть следующим образом.

Лемма. Пусть D –модализированная формула, $<O\Gamma;W''>$ – ОМОС, $a_1, \ldots, a_n$ – все различные переменные, входящие в D, $\{b_{1k}^w, \ldots, b_{nk}^w\}$ – k-элементное множество n-мерных логических векторов – допустимых наборов значений переменных $a_1, \ldots, a_n$ в описаниях состояния $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in W''$ $(1 \le k \le 2^n)$.

Пусть A_i $(A_i \in O\Gamma)$ есть a_i, если b_{ik}^w есть t для каждого k, есть $\rceil\Diamond a_i$, если b_{ik}^w есть f для каждого k, и есть ∇a_i, если для некоторых k b_{ik}^w есть t и для некоторых k b_{ik}^w есть f.

Пусть $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge \sim a_m)$ $(\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m) \in O\Gamma$, $2 \le m \le n$, $\sim a_i$ есть a_i или $\rceil a_i$) есть $\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m)$, если соответствующая конъюнкция m «случайных» переменных интерпретируется как логически возможное высказывание (в этом случае о.с. α_i, содержащее данный набор переменных, включается в W'') и есть $\rceil\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m)$, если конъюнкция m случайных переменных интерпретируется как логически невозможное (противоречивое) высказывание (в этом случае соответствующее о.с. $\alpha_i \notin W''$).

Пусть D^w есть D или $\rceil D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t или f в W.

Тогда для любого набора гипотез $A_1, \ldots, A_n$, $\sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m)_1, \ldots, \sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m)_r$ ($r = 2^m$) выполняется

$$A_1, \ldots, A_n, \sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m)_1, \ldots, \sim\Diamond(\sim a_1 \wedge \ldots \wedge\sim a_m)_r \mid\!- D^w.$$

Лемма доказывается возвратной математической индукцией по числу вхождений символов $\rceil$, $\supset$, в D без учета вхождений этих символов в элементарные формулы (элементарными формулами назовем формулы вида A, в которых A – формула КЛВ).

Результатом доказательства леммы является истинность утверждения:

если формула D общезначима, то для любого $О\Gamma$ верно, что $О\Gamma \mid - D$.

Далее, в результате последовательного применения $\vee$-удаления к гипотезам из $О\Gamma$ выясняется, что при любой интерпретации переменных, входящих в общезначимую формулу D в качестве необходимых, невозможных или случайных высказываний, D доказуема в $S5$ [6].

Предварительные выводы

Мы изложили основные принципы построения семантик указанного типа на примере системы $S5$ Льюиса. Связь данных семантик с семантиками возможных миров очевидна, но в отличие от последних в них используются лишь традиционные для логики понятия (логической) истинности, (логической) ложности, выполнимости и т.д. Особенно интересной представляется возможность содержательной интерпретации на основе данного подхода сложных итерированных модальностей в системе $S4$ и ее модификациях. Как известно, в $S5$ нет собственных несводимых модальностей «неэлементарных» степеней, поэтому число ОМОСов, необходимых для установления общезначимости/выполнимости модальной формулы, определяется только числом переменных в формуле. При построении семантики для систем, подобных $S4$, это число будет также зависеть от максимальной степени собственных модальностей, входящих в формулу. Но поскольку в $S4$ имеется всего 12 собственных модальностей различного типа, число конструкций, выполняющих роль модельных структур семантик возможных миров (для $S4$ это так называемые *ОГ*ОСы), всегда будет конечным. Это означает, что при построении семантик нового типа для пропозициональных фрагментов систем с конечным числом итерированных модальностей, а также при рассмотрении их предикатных расширений для конечных предметных областей, можно исчерпывающим образом перечислить все ОМОСы и *ОГ*ОСы, выполняющие роль модельных структур семантик возможных миров. Из этого, в свою очередь, следует, что при доказательстве теорем о полноте систем $S5$, $S4$ (и других систем с конечным числом итерированных модальностей) относительно семантик предложенного типа можно ограничиться только финитными средствами.

Более подробное исследование данных вопросов будет проведено во второй части настоящей работы.

Примечания

1. *Войшвилло Е.К.* Содержательный анализ модальностей *S4* и *S5* // Философские науки. – 1983. – № 3. – С. 76–80.

2. Там же.

3. Там же.

4. См.: *Ивлев Ю.В.* Модальная логика. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – С. 168–190.

5. Там же.

6. См.: *Архиереев Н.Л.* Семантики ограниченных множеств описаний состояний: Автореф. дисс. … канд. филос. наук. – М., 2001.

Дата поступления 22.09.2009
Российская правовая академия
Министерства юстиции РФ, г. Москва
star-gazer…13@list.ru;
arkh-nikolaj@yandex.ru

Archiereev N.L. **Logical modalities as arithmetical functions – 1**

The paper briefly describes an essentially new approach to the analysis of the notions of logical necessity, possibility and contingency. In this approach, restricted and relatively restricted sets of state descriptions function as possible worlds and model structures of possible world semantics. They permit to describe modal systems in traditional terms of (logical) truth and (logical) falsity and use finite methods to prove completeness theorems concerning these systems in respect to semantics of the mentioned type.

Keywords: logic, modality, possible worlds